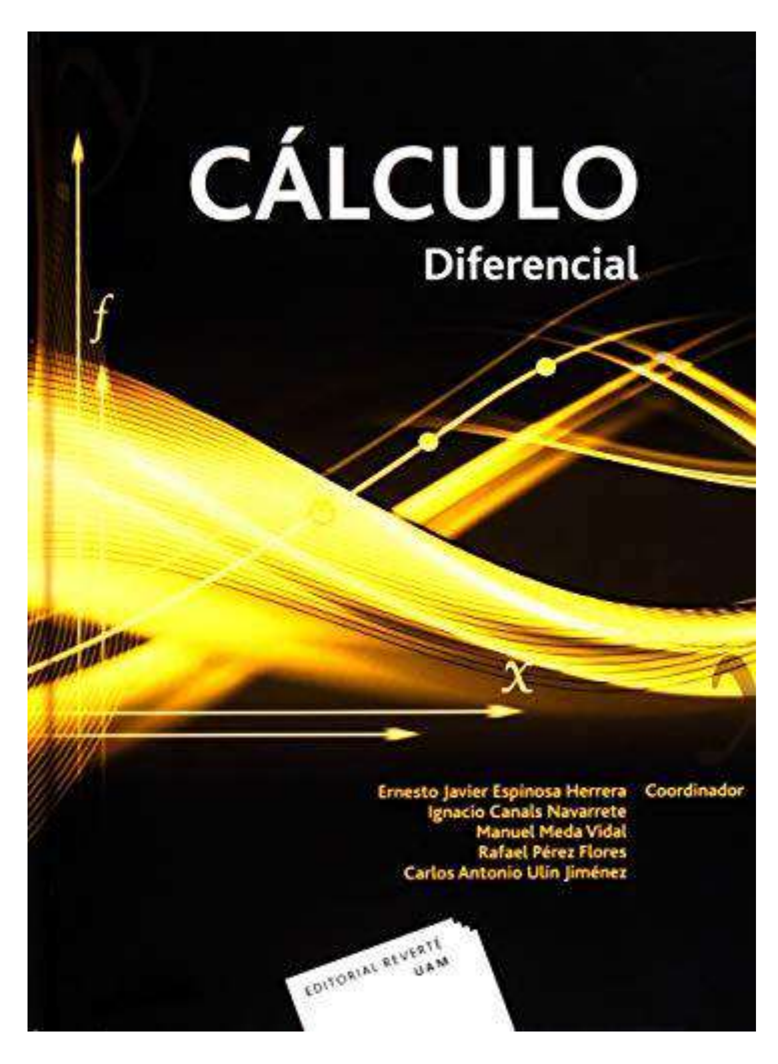


Todo el material de Cálculo diferencial e integral I se encuentra en línea en la dirección: http://canek.uam.mx/?secc=2

ISBN de la colección 978 968 6708 73-8

ISBN del volumen 978 968 6708 74-5

Primera edición 2008

Primera reimpresión 2009

Impreso en China. *Printed in China*
Everbest Printing Co. Ltd
Block C Unit 5. 10th Floor 7 Ko Fai Road
Yau Tong Kowloon, Hong Kong

Captura de datos: Teresa Jurado Dorantes

Portada: Lucila Montoya García

Cuidado editorial: Mtra. en Ed. Concepción Asuar

Universidad Autónoma Metropolitana

Rector general
Dr. José Lema Labadie
Secretario general
Mtro. Luis Javier Melgoza Valdivia

Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco

Rector
Dr. Adrián de Garay Sánchez
Secretaria
Dra. Sylvie Turpin Marion

Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Dr. Emilio Sordo Zabay
Jefe del Departamento de Ciencias Básicas
Dr. Luis Enrique Noreña Franco

ISBN de la colección 978 968 6708 73-8

ISBN del volumen 978 968 6708 74-5

Primera edición 2008

Primera reimpresión 2009

Impreso en China. *Printed in China*
Everbest Printing Co. Ltd
Block C Unit 5. 10th Floor 7 Ko Fai Road
Yau Tong Kowloon, Hong Kong

Captura de datos: Teresa Jurado Dorantes

Portada: Lucila Montoya García

Cuidado editorial: Mtra. en Ed. Concepción Asuar

Todo el material de *Cálculo diferencial e integral I* se encuentra en línea en la dirección:
http:\\canek.azc.uam.mx

CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.1 Algunos tipos de números

El conjunto de los números naturales o enteros positivos $\mathbb{N}$ es:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ \ldots, n, n+1, \ \ldots\};$$

éstos son una parte de los números enteros $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -(n+1), -n, \ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ \ldots, n, n+1, \ \ldots\}.$$

A los números $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -(n+1), -n, \ \ldots, -3, -2, -1\}$ se les conoce como enteros negativos por lo que vemos que los números enteros están constituidos por los naturales, el cero y los enteros negativos, esto es, en símbolos:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Expresión que se lee: el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ es igual al conjunto de los números enteros negativos $\mathbb{Z}^-$ unión con el cero, unión con el conjunto de los números naturales.

A su vez, los números enteros son una parte de los números racionales $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \ \& \ q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esta última expresión se lee: $\mathbb{Q}$ es igual al conjunto de los números de la forma $\dfrac{p}{q}$ tales que p es un entero y q un natural. Nótese que al ser q natural no puede ser 0.

Observemos que todo número entero a se puede escribir como $\dfrac{a}{1}$, o bien $\dfrac{2a}{2}$, o bien $\dfrac{3a}{3}$, $\ldots$, o bien $\dfrac{na}{n}$, para cualquier número natural n de donde se sigue claramente que los números enteros son una parte de los números racionales. Es decir tenemos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

---

[1]canek.azc.uam.mx: 14/ 5/ 2008

Usando la notació decimal, todo número racional se puede escribir como una expresión decimal periódica, por ejemplo:

$$\frac{1}{3} = 0.333,\ \cdots = 0.\overline{3};\ \frac{1}{2} = 0.5000,\ \cdots = 0.5\overline{0} = 0.5;$$

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857,\ \cdots = 0.\overline{142857}.$$

La representación decimal de un número racional $\frac{p}{q}$ se obtiene dividiendo el numerador p entre el denominador q. Ejemplificamos con el racional $\frac{4}{7}$:

$$\begin{array}{r|l} & \;0.571428 \\ \cline{2-2} 7 & \;40 \\ & \quad 50 \\ & \quad 10 \\ & \quad 30 \\ & \quad\; 20 \\ & \quad\; 60 \\ & \qquad 4 \end{array}$$

Como los diferentes residuos tienen que ser cero o un natural menor que el divisor 7, a lo más tendremos 7 residuos diferentes, entonces si continuamos el proceso de dividir más de 7 veces, necesariamente nos tiene que aparecer un residuo repetido y a partir de él también se producirán exactamente las mismas cifras en el cociente, por lo que la representación decimal será efectivamente periódica.

$$\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}.$$

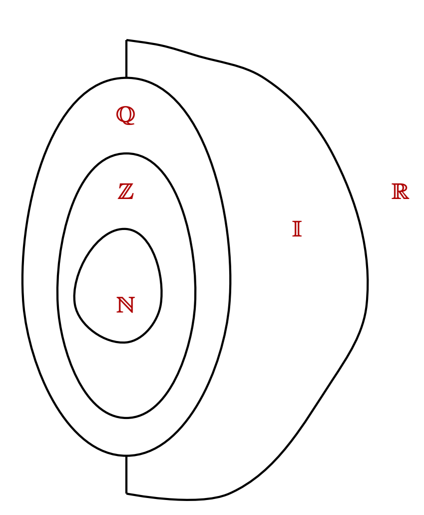
Otros números son los irracionales $\mathbb{I}$, es decir, aquellos cuyas expresiones decimales son no periódicas, como por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1.414213562\ldots;\ \pi = 3.141592653589\ldots;\ e = 2.718281828\ldots$$

Los números racionales $\mathbb{Q}$ y los irracionales $\mathbb{I}$ constituyen los números reales $\mathbb{R}$. Esto es:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Que visualizamos así:



Ejercicios 1.1.1 *Soluciones en la página 5*

Expresar el número racional dado mediante una expresión decimal finita (es decir, con periodo 0) o bien periódica infinita:

1. $\dfrac{3}{8}$.
2. $\dfrac{5}{6}$.
3. $\dfrac{-8}{125}$.
4. $\dfrac{17}{3}$.
5. $\dfrac{-100}{9}$.
6. $\dfrac{25}{22}$.
7. $\dfrac{1}{10}$.
8. $\dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{10^2}$.
9. $\dfrac{1}{10^n}$ con $n \in \mathbb{N}$.
10. Dé un ejemplo de número entero no natural.
11. Dé un ejemplo de número racional no entero.
12. ¿Cómo haría para hallar la representación decimal de un número racional de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural?
13. Transforme la representación decimal periódica $0.\overline{3}$ en racional de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.
14. Transforme la representación decimal periódica $0.5\overline{0}$ en racional de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.
15. Transforme la representación decimal periódica $0.\overline{142857}$ en racional, de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.
16. Transforme la representación decimal periódica $0.1\overline{3}$ en racional, de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.

17. Transforme la representación decimal periódica $0.2\overline{12}$ en racional, de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.

18. Transforme la representación decimal periódica $0.3\overline{123}$ en racional, de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.

Ejercicios 1.1.1 *Algunos tipos de números, página 3*

1. $0.375\bar{0} = 0.375\,.$
2. $0.833... = 0.83\bar{3}\,.$
3. $-0.064\bar{0} = -0.064\,.$
4. $5.66... = 5.\bar{6}\,.$
5. $-11.11... = -11.\bar{1}\,.$
6. $1.13636... = 1.1\overline{36}\,.$
7. $0.1\bar{0} = 0.1\,.$
8. $0.01\bar{0} = 0.01\,.$
9. $\underbrace{0.0\cdots 0}_{(n-1)\text{ ceros}}1\bar{0} = \underbrace{0.0\cdots 0}_{(n-1)\text{ ceros}}1\,.$
10. $-1.$
11. $\dfrac{1}{2}\,.$
12. Dividiendo p entre q .
13. $0.\bar{3} = \dfrac{1}{3}\,.$
14. $0.5\bar{0} = \dfrac{1}{2}\,.$
15. $0.\overline{142857} = \dfrac{1}{7}\,.$
16. $0.1\bar{3} = \dfrac{2}{15}\,.$
17. $0.2\overline{12} = \dfrac{7}{33}\,.$
18. $0.3\overline{123} = \dfrac{104}{333}\,.$

CAPÍTULO

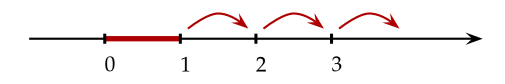
1

Los números reales

[1]

1.2 Representación geométrica de los números reales

A los números reales se les suele representar (o ubicar) en un eje, es decir, en una recta en la cual hay un punto fijo 0 llamado origen, una unidad de longitud convencional y un sentido.
Si a partir del origen marcamos la unidad de longitud consecutivamente en el sentido del eje, obtendremos una sucesión de puntos cuya distancia al origen es, respectivamente, $1, 2, 3, \ldots$; (estos puntos representan a los números naturales).



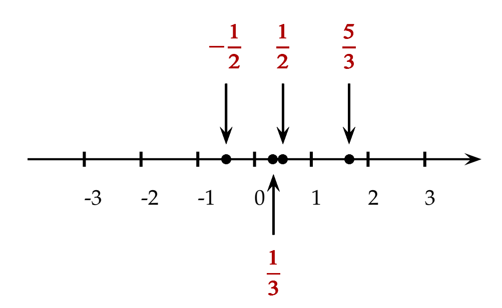
Los simétricos de estos puntos con respecto al origen, es decir, los puntos que se obtienen al marcar repetidamente la unidad de longitud en el sentido contrario al del eje, representan a los números negativos.

-3 -2 -1 0 1 2 3

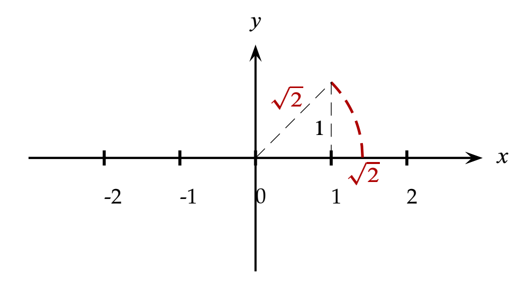
Además hay puntos en el eje cuya distancia al origen es el racional $\frac{p}{q}$ si $p \in \mathbb{N} \cup \{ 0 \}$ o $\frac{-p}{q}$ si $p \in \mathbb{Z}^-$ ($q \in \mathbb{N}$). Es decir, si dividimos la unidad de longitud en q partes iguales y tomamos p de ellas en el

[1] canek.azc.uam.mx: 14/ 5/ 2008

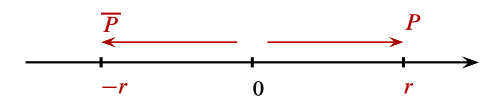
sentido del eje, si p es natural y en el sentido opuesto si es entero negativo, encontramos un punto cuya distancia al origen es $\frac{p}{q}$ o $-\frac{p}{q}$ dependiendo de si p es natural o entero negativo.



Además de los puntos cuya distancia al origen es un número racional, también se encuentran puntos cuya distancia al origen es un irracional. Por ejemplo si representamos un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan 1, por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$; entonces podemos marcar un punto cuya distancia al origen sea precisamente $\sqrt{2}$.



Los números reales comúnmente se representan con letras minúsculas.
De esta manera a cada número real positivo r le hacemos corresponder el punto P cuya distancia al origen es dicho número r. Al real negativo $-r$ le hacemos corresponder el punto $\overline{P}$ que es el simétrico de P con respecto al origen.



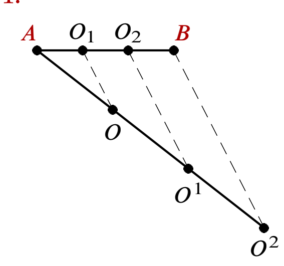
A todo punto del eje le corresponde un número real asociado a la distancia del punto al origen y a dos números reales diferentes les corresponden dos puntos distintos.
Por esta correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de un eje, es usual referirse indistintamente a un número real o a un punto.
Es costumbre dibujar horizontal al eje y considerar positivo el sentido de izquierda a derecha. Por eso se usan expresiones como “a la derecha" o “a la izquierda".

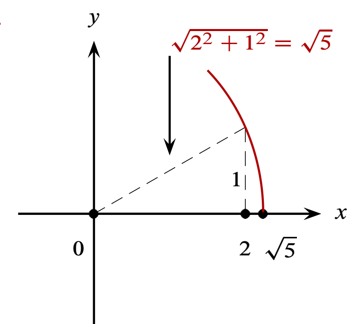
Ejercicios 1.2.1 *Soluciones en la página 4*

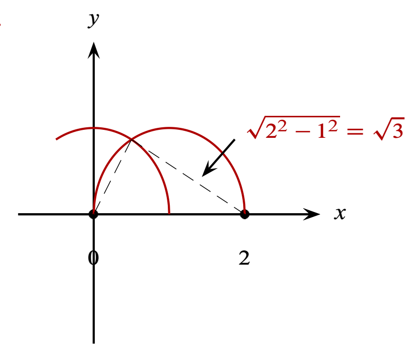
1. ¿Cuándo se dice que 2 puntos A y A' son simétricos con respecto a un tercero O?
2. Dados dos puntos A y O ¿cómo hallaría el simétrico de A con respecto a O?

3. Con regla y compás ¿cómo divide un segmento en 2 partes iguales?
4. Con regla y compás ¿cómo divide un segmento en 3 partes iguales?
5. ¿Cómo dividiría un segmento en q partes iguales (donde q es un número natural)?
6. ¿Cómo hallaría el punto en el eje real que le corresponde al número racional $-\frac{5}{3}$?
7. ¿Cómo hallaría el punto en el eje real que le corresponde al número racional $\frac{p}{q}$ donde $p \in \mathbb{Z}$ y donde $q \in \mathbb{N}$?
8. ¿Cómo hallaría el punto en el eje real que le corresponde al número irracional $\sqrt{5}$?
9. ¿Cómo hallaría el punto en el eje real que le corresponde al número irracional $\sqrt{3}$?

Ejercicios 1.2.1 *Representación geométrica de los números reales, página 2*

1. Cuando O es el punto medio del segmento AA'.
2. Trazando la recta AO y llevando a partir de O una distancia igual a $\overline{AO}$.
3. Trazando la mediatriz del segmento.
4. 

5. Haciendo lo mismo que en la cuestión anterior, cambiando 3 por n.
6. Dividiendo el segmento unitario en 3 partes iguales y llevando una de las partes a la izquierda de 0 (cero), 5 veces.
7. Dividiendo al segmento unitario en q partes iguales y llevando una de las partes a la izquierda de 0 (cero), p veces si $p < 0$ o a la derecha de 0 si $p > 0$.
8. 

9. 

CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.3 Propiedades algebraicas de los números reales

1.3.1 Propiedades básicas

En los números reales se definen dos operaciones, adición y multiplicación, las cuales tienen ciertas propiedades:

Propiedades	*Adición*	*Multiplicación*
Conmutatividad	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociatividad	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Existencia del elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Existencia del elemento inverso	$a + (-a) = 0$	$a \cdot a^{-1} = 1$ si $a \neq 0$
Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$		

[1]canek.azc.uam.mx: 14/ 5/ 2008

Al producto de dos números reales a, b lo denotaremos indistintamente poniendo punto entre ellos: $a \cdot b$, o $\times$: $a \times b$ o simplemente yuxtaponiéndolos: $a\, b$.

- Conmutativa.

Ejemplos:

1. $8 + 2 = 2 + 8$.
2. $a + 3 = 3 + a$.
3. $x^2 - 1 = -1 + x^2$.
4. $3 \times 6 = 6 \times 3$.
5. $a \times 5 = 5 \times a$.

- Asociativa.

Ejemplos:

1. $(5 + 2) + 6 = 5 + (2 + 6)$.
2. $(a + 7) + g = a + (7 + g)$.
3. $(y^2 + c) + 2 = y^2 + (c + 2)$.
4. $(3 \times 6) \times z = 3 \times (6 \times z)$.
5. $(5 \times x^2) \times 9 = 5 \times (x^2 \times 9)$.
6. $y \times f) \times h^2 = y \times (f \times h^2)$.

- Existencia del elemento neutro.

Ejemplos:

1. $5 + 0 = 5$.
2. $(a + c) + 0 = a + c$.
3. $(ya) + 0 = ya$.
4. $8 \times 1 = 8$.
5. $(g + h) \times 1 = g + h$.
6. $(g \times h) \times 1 = g \times h$.

- Existencia del elemento inverso.

Ejemplos:

1. $7 + (-7) = 0$.
2. $c + (-c) = 0$.
3. $3b + (-3b) = 0$.
4. $4 \times 4^{-1} = 1$.
5. $15 \times 15^{-1} = 1$.
6. $h \times h^{-1} = 1$ si $h \neq 0$.

- Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

Ejemplos:

1. $7 \times (a + h) = (7 \times a) + (7 \times h)$ o bien $7(a + h) = 7a + 7h$.
2. $b \times (5 + c) = (b \times 5) + (b \times c)$ o bien $b(5 + c) = 5b + bc$.
3. $f \times h \times (g + b) = [(f \times h) \times g] + [(f \times h) \times b]$ o bien $(fh)(g + b) = (fh)g + (fh)b$.

- Expresiones tales como:

  $\{[(a+b)+c]+d\}+e+\ \cdots$ o bien $\{[(a\cdot b)\cdot c]\cdot d\}\cdot e\ \cdot ...$

  se escriben simplemente así:

  $a+b+c+d+e+\ \cdots$ o bien $a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\ \cdot ...$

  pues son equivalentes y no se prestan a confusión.

  Ejemplos:

  1. $\{[(3+a)+g]+7b\}+5-d=3+a+g+7b+5-d$.
  2. $\{[(7\cdot a)\cdot c]\cdot d\}\cdot 2\cdot a\cdot c=7\cdot a\cdot c\cdot d\cdot 2\cdot a\cdot c$.

1.3.2 Consecuencias

Sean $a, b, c, d,\ \cdots$ números reales:

- $a+b=a+c \ \Rightarrow\ b=c$.

  Esta expresión se lee: si $a+b=a+c$, entonces $b=c$. Es decir, se puede cancelar un mismo término de los dos miembros de una igualdad.

- $a\cdot 0=0$.

- $a\cdot b=a\cdot c \ \&\ a\neq 0 \ \Rightarrow\ b=c$.

  Nótese que no podemos cancelar el 0 como factor, pues entonces tendríamos aberraciones del tipo siguiente:

  $$0\cdot 1=0 \ \&\ 0\cdot 2=0 \ \Rightarrow\ 0\cdot 1=0\cdot 2 \ \Rightarrow\ 1=2.$$

- $a\cdot b=0 \ \Rightarrow\ a=0$ o bien $b=0$.

  Esta propiedad se usa para resolver ecuaciones: si logramos factorizar un polinomio de grado n,

  $$P(x)=Q(x)R(x)$$

  entonces, resolver la ecuación $P(x)=0$ es lo mismo que resolver las dos ecuaciones $Q(x)=0$ y $R(x)=0$ que no son de grado mayor que n.

  Ejemplo:

  Se tiene que $x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$;

  $(x-5)(x+2)=0 \ \Rightarrow\ x-5=0$ o bien $x+2=0 \ \Rightarrow\ x=5$ o bien $x=-2$.

Se definen la sustracción y la división como:

- $a-b\overset{\text{def}}{=}a+(-b)$.

- $\dfrac{a}{b} \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot b^{-1}$ con $b \neq 0$.

Algunas igualdades importantes son:

- $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$ si $a \neq 0$.

  Ejemplos:

  1. $\dfrac{1}{3} = 3^{-1}$.
  2. $\dfrac{1}{ab} = (ab)^{-1}$ si $ab \neq 0$.

- $a - b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b$ (esta expresión se lee: $a - b = 0$ si y solamente si $a = b$).

  Ejemplos:

  1. $a - 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 5$.
  2. $a + b - z = 0 \;\Leftrightarrow\; a + b = z$.

- $\dfrac{a}{b} = 1 \;\Leftrightarrow\; a = b$ con $b \neq 0$.

  Ejemplos:

  1. $\dfrac{2}{c} = 1 \;\Leftrightarrow\; c = 2$.
  2. $\dfrac{z}{6} = 1 \;\Leftrightarrow\; z = 6$.
  3. $\dfrac{ac}{h} = 1 \;\Leftrightarrow\; ac = h$ con $h \neq 0$.

- $-0 = 0$.
- $1^{-1} = 1$.
- $-(-a) = a$.

  Ejemplos:

  1. $-(-10) = 10$.
  2. $-[-(h \times g)] = h \times g$.
  3. $-[-(a + b)] = a + b$.

- $(a^{-1})^{-1} = a$ con $a \neq 0$.

  Ejemplos:

  1. $(3^{-1})^{-1} = 3$.
  2. $[(a \times b)^{-1}]^{-1} = a \times b$.
  3. $[(8 + a)^{-1}]^{-1} = 8 + a$.

- $-(a+b) = -a - b$.

  Ejemplos:

  1. $-(2+4) = -2-4$.
  2. $-(5+c) = -5-c$.

- $(a \times b)^{-1} = a^{-1} \times b^{-1}$.

  Ejemplos:

  1. $(3 \times g)^{-1} = 3^{-1} \times g^{-1}$.
  2. $[(b+c) \times f]^{-1} = (b+c)^{-1} \times f^{-1}$.

- $a(-b) = (-a)b = -(ab)$ “más por menos es menos", “menos por más es menos".

  Ejemplos:

  1. $(-c) \times h = -(c \times h) = c \times (-h)$.
  2. $(-3) \times g = -(3 \times g) = 3 \times (-g)$.
  3. $(-1) \times (5+c) = -[1 \times (5+c)] = 1 \times [-(5+c)] = -(5+c)$.

- $(a-b) \times c = (a \times c) - (b \times c)$ propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la sustracción.

  Ejemplos:

  1. $(3-z) \times g = (3 \times g) - (z \times g)$.
  2. $[(f \times h) - y] \times 2 = [(f \times h) \times 2] - (y \times 2)$.

- $(-a)(-b) = a \cdot b$ “menos por menos es más".

  Ejemplos:

  1. $(-5)(-3) = (5)(3) = 15$.
  2. $(-z)(-6) = (z)(6)$.

- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$ donde $b \times d \neq 0$.

  Ejemplos:

  1. $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{5} \Leftrightarrow 5a = 2b$.
  2. $\dfrac{7}{c} = \dfrac{h}{f} \Leftrightarrow 7f = ch$ donde $cf \neq 0$.

- $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{(a \times d) \pm (b \times c)}{b \times d}$ donde $b \times d \neq 0$.

Ejemplos:

1. $\frac{7}{4}-\frac{2}{3}=\frac{(7)(3)-(4)(2)}{(4)(3)}=\frac{21-8}{12}=\frac{13}{12}$.
2. $\frac{2}{a}+\frac{c}{5}=\frac{(2\times 5)+(a\times c)}{a\times 5}=\frac{10+(a\times c)}{5\times a}$ donde $a\neq 0$.

- $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$ donde $b\times d\neq 0$.

Ejemplos:

1. $\frac{3}{z}\times\frac{4}{f}=\frac{3\times 4}{z\times f}=\frac{12}{f\times z}$ donde $z\times f\neq 0$.
2. $\frac{8\times a}{5}\times\frac{h}{b}=\frac{8\times a\times h}{5\times b}$ donde $b\neq 0$.

- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\times d}{b\times c}$ donde $b\times d\times c\neq 0$.

Ejemplos:

1. $\frac{\frac{3a}{5}}{\frac{c}{7}}=\frac{(3a)7}{5c}=\frac{21a}{5c}$ donde $c\neq 0$.
2. $\frac{\frac{2}{f}}{\frac{g}{h}}=\frac{2\times h}{f\times g}$ donde $f\times g\times h\neq 0$.

- $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}$ donde $b\neq 0$ “más entre menos es menos", “menos entre más es menos".

Ejemplos:

1. $\frac{c}{-9}=-\frac{c}{9}=\frac{-c}{9}$.
2. $\frac{f\times z}{-d}=-\frac{f\times z}{d}=\frac{-(f\times z)}{d}$ donde $d\neq 0$.

- $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$ donde $b\neq 0$ “menos entre menos es más".

Ejemplos:

1. $\frac{-2}{-7}=\frac{2}{7}$.
2. $\frac{-z}{-b}=\frac{z}{b}$ donde $b\neq 0$.
3. $\frac{-(ac)}{-(bd)}=\frac{ac}{bd}$ donde $bd\neq 0$.

- $\dfrac{a \times b}{a \times c} = \dfrac{b}{c}$ donde $a \times c \neq 0$, de numerador y denominador se puede cancelar el mismo factor siempre que éste sea diferente de cero.

  Ejemplos:

  1. $\dfrac{4 \times g}{4 \times h} = \dfrac{g}{h}$ donde $h \neq 0$.
  2. $\dfrac{a \times g \times f}{5 \times f} = \dfrac{a \times g}{5}$ donde $f \neq 0$.

- Si n es un número natural, se definen: $a^n = \begin{cases} a & \text{si } n = 1; \\ a^{n-1} \cdot a & \text{si } n > 1; \end{cases}$

  n es el exponente, a es la base y a^n es la enésima potencia de a.

  Ejemplos:

  1. $a^1 = a$.
  2. $2^1 = 2$.
  3. $a^2 = a^1 \times a = a \times a$.
  4. $6^2 = 6^1 \times 6 = 6 \times 6 = 36$.
  5. $a^3 = a^2 \times a$.
  6. $9^3 = 9^2 \times 9 = 729$.

- $a^0 = 1 \quad (\text{con } a \neq 0)$.

  Ejemplos:

  1. $^0 = 1$.
  2. $3^0 = 1$.
  3. $(a + b)^0 = 1$.
  4. $(3 + a)^0 = 1$.
  5. $(c \times d)^0 = 1$.
  6. $(8 \times 2)^0 = 1$.

- $a^{-n} \overset{\text{def}}{=} (a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = \dfrac{1}{a^n} \quad (\text{con } a \neq 0)$.

  Ejemplos:

  1. $b^{-2} = (b^{-1})^2 = (b^2)^{-1} = \dfrac{1}{b^2}$.
  2. $7^{-3} = (7^{-1})^3 = (7^3)^{-1} = \dfrac{1}{7^3}$.

- $\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a$ (si n es par entonces $a \geq 0$).

  Ejemplos:

  1. $\sqrt[2]{a} = b \Rightarrow b^2 = a$.
  2. En la raíz cuadrada poner el índice ^{2} es opcional:
     $\sqrt{c} = 4 \Rightarrow 4^2 = 16 = c$.
  3. $\sqrt[3]{a + c} = d \Rightarrow d^3 = a + c$.

- Si n es impar $b^n = a \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a} = b$.

  Ejemplo:

  1. $d^3 = a + c \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{a+c} = d$.

- $a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}$ si $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

  Ejemplos:

  1. $\sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$.
  2. $\sqrt[2]{\pi^6} = \pi^{\frac{6}{2}} = \pi^3$.

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Propiedades de los exponentes. Si r & s son números racionales:

- $(a \times b)^r = a^r \times b^r$. Una potencia de un producto es el producto de las potencias de los factores:

  Ejemplos:

  1. $(3 \times a)^2 = 3^2 \times a^2 = 9 \times a^2$.
  2. $[(a+b) \times c]^2 = (a+b)^2 \times c^2$.
  3. $(3 \times 2)^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{2}{5}} \times 2^{\frac{2}{5}}$.

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. Para multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes.

  Ejemplos:

  1. $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$.
  2. $b \times b = b^1 \times b^1 = b^{1+1} = b^2$.
  3. $(3 \times a)^2 \times (3 \times a) = (3 \times a)^2 \times (3 \times a)^1 = (3 \times a)^{2+1} = (3 \times a)^3$.

- $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ si $a \neq 0$. Para dividir potencias de la misma base se restan los exponentes.
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$. Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes.

  Ejemplos:

  1. $(a^2)^2 = a^{2\times 2} = a^4$.
  2. $(b^3)^4 = b^{3\times 4} = b^{12}$.
  3. $(7^1)^2 = 7^{1\times 2} = 7^2 = 49$.
  4. $[(a+b)^2]^3 = (a+b)^{2\times 3} = (a+b)^6$.

Estas propiedades también son ciertas en el caso de exponentes irracionales pero eso lo veremos posteriormente.

Ejercicios 1.3.1 *Soluciones en la página 12*

Simplificar las expresiones numéricas siguientes

1. $\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{2}{5}$.
2. $\left(-\frac{3}{8}\right)\left(\frac{4}{-15}\right)$.
3. $\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{8}{15}\right)^{-1}$.
4. $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\right)$.
5. $\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)^{-1}$.
6. $(16)^{\frac{4}{5}}(8)^{-\frac{2}{5}}$.

1.3.3 Factorización

Otras igualdades importantes se denominan productos notables que también se pueden ver como una factorización. Por factorizar una expresión algebraica se entiende escribirla como un producto. Algunos ejemplos de factorización son:

- $ax \pm bx = (a \pm b)x$. Sacar factor común, observen que en realidad es la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición o a la sustracción.

  Ejemplos:

  1. $ax + x = ax + 1 \cdot x = (a+1)x$.
  2. $xb^2 + 6b^2 = (x+6)b^2$.
  3. $5ac + 2acx = (5+2x)ac$.
  4. $6x^2y + 3y = (2x^2+1)3y$.

- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Diferencia de cuadrados.

  Ejemplos:

  1. $x^2 - z^2 = (x+z)(x-z)$.
  2. $4a^2 - 9b^2 = (2a)^2 - (3b)^2 = (2a+3b)(2a-3b)$.
  3. $c^2 - 1 = (c+1)(c-1)$.
  4. $x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.

- $x^2 + (a+b)x + (ab) = (x+a)(x+b)$. Factorizar un trinomio.

  Ejemplos:

  1. $x^2 + 9x + 14 = x^2 + (2+7)x + (2)(7) = (x+2)(x+7)$.
  2. $x^2 - 5x - 6 = x^2 + (1-6)x + (1)(-6) = (x+1)(x-6)$.
  3. $x^2 - 11x + 24 = x^2 + (-3-8)x + (-3)(-8) = (x-3)(x-8)$.

- $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$. Trinomio cuadrado perfecto.

  Ejemplos:

  1. $a^2 + 2az + z^2 = (a+z)^2$.
  2. $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.
  3. $c^2d^2 + 2cdz + z^2 = (cd+z)^2$.
  4. $c^4 + 8c^2 + 16 = (c^2+4)^2$.

- $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$. Cubo perfecto.

  Ejemplos:

  1. $x^3 + 3x^2z + 3xz^2 + z^3 = (x + z)^3$.
  2. $a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = (a - 2)^3$.

- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

  Ejemplo:

  $$(a - b)^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$ si n es impar.

  Ejemplo:

  $$(a + b)^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Teorema del residuo. Si $P(x)$ es un polinomio de grado n & r es una raíz (es decir, $P(r) = 0$) entonces $P(x) = (x - r)Q(x)$ donde $Q(x)$ es el cociente de dividir $P(x)$ entre $(x - r)$, y es un polinomio de grado $n - 1$.

Ejemplo 1.3.1 *$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; si $x = 1 : P(1) = 1^3 - (6 \cdot 1^2) + (11 \cdot 1) - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$, luego $P(x)$ es divisible entre $x - 1$.*

▼ En efecto

$$\begin{array}{r|l} & \quad x^2 - 5x + 6 \\ \hline x - 1 & \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ & \underline{-x^3 + \ x^2} \\ & \ 0 \ - 5x^2 + 11x \\ & \qquad \underline{5x^2 - 5x} \\ & \qquad\ \ 0 \ + 6x - 6 \\ & \qquad\qquad \underline{-6x + 6} \\ & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Por lo que $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$.
Y el grado de $x^2 - 5x + 6$ (que es 2) es una unidad menor que el de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (que es 3).

□

Ejercicios 1.3.2 *Soluciones en la página 12*

1. ¿Cuáles son las soluciones de $x^2 = a^2$?
2. Calcule $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

3. ¿Cuáles son las soluciones de $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$?
4. ¿Puede dar una solución o raíz de $x^3 - 8 = 0$?
5. ¿Puede dar una solución o raíz de $x^3 - a^3 = 0$?
6. ¿Puede dar una raíz de $x^3 + 8 = 0$?
7. ¿Puede dar una raíz de $x^5 - 32 = 0$?
8. ¿Puede dar una raíz de $x^5 + 32 = 0$?
9. ¿Puede dar una raíz de $x^4 - 81 = 0$?

Ejercicios 1.3.1 *Propiedades algebraicas de los números reales, página 8*

1. $\dfrac{73}{30}$.
2. $\dfrac{1}{10}$.
3. $-\dfrac{3}{2}$.
4. $-\dfrac{19}{90}$.
5. $\dfrac{10}{21}$.
6. 4.

Ejercicios 1.3.2 *página 10*

1. $x = -a$ o bien $x = a$.
2. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.
3. $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$.
4. Si, $x = 2$.
5. Si, $x = a$.
6. $x = -2$ es raíz.
7. $x = 2$.
8. $x = -2$.
9. $x = 3$.

CAPÍTULO

1

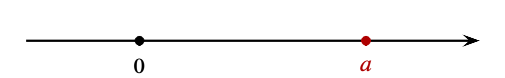
Los números reales

[1]

1.4 Orden de los números reales

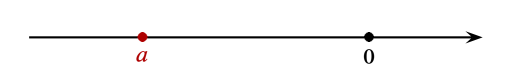
Un número a que pertenezca a los reales ($a \in \mathbb{R}$) es positivo si está a la derecha del cero; esto se denota así:

$$a > 0 \text{ o bien } 0 < a .$$



Un número a que pertenezca a los reales ($a \in \mathbb{R}$) es negativo si está a la izquierda del cero; esto se denota así:

$$a < 0 \text{ o bien } 0 > a .$$

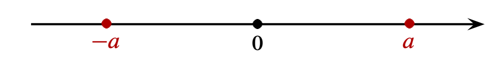


El símbolo $>$ se lee "mayor que". El símbolo $<$ se lee "menor que".

[1]canek.azc.uam.mx: 14/ 5/ 2008

$a > b$ o bien $b < a$	quiere decir que a está a la derecha de b o bien que b está a la izquierda de a; también significa que $a - b > 0$.
$a \geq b$	quiere decir que $a > b$ o bien que $a = b$. El símbolo $\geq$ se lee "mayor o igual que".
$a \leq b$	quiere decir que $a < b$ o bien que $a = b$. El símbolo $\leq$ se lee "menor o igual que".

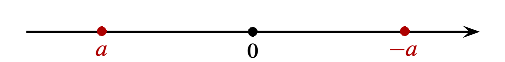
- Si dos números reales son positivos se cumple que su suma y su producto también son números positivos:
$$a > 0 \;\&\; b > 0 \;\Rightarrow\; a + b > 0 \quad \text{y también} \quad a \cdot b > 0.$$
- Ley de tricotomía. Se cumple una de tres:
$$a \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; a > 0 \quad \text{o bien} \quad a = 0 \quad \text{o bien} \quad a < 0.$$
- $a > 0 \;\Leftrightarrow\; -a < 0.$



Ejemplo:

$$a = 5 > 0 \;\&\; -a = -5 < 0.$$

- $a < 0 \;\Leftrightarrow\; -a > 0.$



Ejemplo:

$$a = -3 < 0 \;\&\; -a = 3 > 0.$$

Es decir, dos puntos simétricos representan números reales con distinto signo.

Cualquier expresión que contenga uno de los cuatro símbolos $>$, $<$, $\geq$ o bien $\leq$ se llama desigualdad.

Una desigualdad consta de dos miembros, lo que está escrito antes del símbolo $>$, $<$, $\geq$ o bien $\leq$ se llama primer miembro y lo que está escrito después de cualquiera de esos símbolos se llama segundo miembro.

Ejemplo 1.4.1 *Algunas desigualdades:*

1. $-5 \leq 6$.
2. $3 \geq 3$.
3. $\dfrac{3}{4}x + 1 > 7$.
4. $x^2 < x + 2$.
5. $\dfrac{3x-1}{7+x} > 8$.

Dos desigualdades en las que aparece en ambas el símbolo $>$ o bien en ambas el símbolo $<$ se dice que son del mismo sentido.

Ejemplo 1.4.2 *Desigualdades del mismo sentido:* $a > b$ & $d > c$.

Ejemplo 1.4.3 *Desigualdades del mismo sentido:* $c < d$ & $f < a$.

Si en una desigualdad aparece el signo $>$ y en otra el signo $<$ se dice que son de sentidos contrarios.

Ejemplo 1.4.4 *Desigualdades de sentidos contrarios:* $a > 7$ & $b < c$.

Algunas propiedades de orden son las siguientes:

- Ley de tricotomía, una de tres:

$$a \,\&\, b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; a > b \quad \text{o bien} \quad a = b \quad \text{o bien} \quad a < b.$$

- A los dos miembros de una desigualdad se les puede sumar una misma cantidad y se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que la dada:

$$a > b \,\&\, c \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; a + c > b + c.$$

  Ejemplo:

  Sabemos que $7 > 2$, entonces sumando 1 a cada miembro de la desigualdad se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que la original: $7+1 > 2+1$. En efecto, $8 > 3$.

- Si multiplicamos los dos miembros de una desigualdad por un número positivo, se preserva el sentido de la desigualdad:

$$a > b \,\&\, c > 0 \;\Rightarrow\; a \cdot c > b \cdot c.$$

  Ejemplo:

  De $5 > 3$ se tiene $5 \cdot 2 > 3 \cdot 2$. En efecto, $10 > 6$.

- Si multiplicamos los dos miembros de una desigualdad por un número negativo, cambia el sentido de la desigualdad:

$$a > b \,\&\, c < 0 \;\Rightarrow\; a \cdot c < b \cdot c.$$

  Ejemplo:

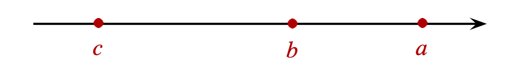
  De $6 < 8$ se tiene $(6)(-1) > (8)(-1)$. En efecto, $-6 > -8$.

- Sumando miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido:
$$a > b \;\&\; c > d \;\Rightarrow\; a + c > b + d.$$

Ejemplos:

1. $5 > 4 \;\&\; 10 > 9 \;\Rightarrow\; 5 + 10 > 4 + 9$.
   En efecto, $15 > 13$.
2. $5 > 4 \;\&\; -5 > -10 \;\Rightarrow\; 5 - 5 > 4 - 10$.
   En efecto, $0 > -6$.

- Transitividad: $a > b \;\&\; b > c \;\Rightarrow\; a > c$.



Ejemplo:

1. $6 > 4 \;\&\; 4 > 2 \;\Rightarrow\; 6 > 2$.

- El cuadrado de cualquier número distinto de cero es positivo:
$$a \neq 0 \;\Rightarrow\; a^2 > 0.$$

Ejemplos:

1. El 1 es positivo: $1 = 1^2 > 0$.
2. $a = 4 \;\Rightarrow\; (4)^2 > 0$. En efecto, $16 > 0$.
3. $a = -5 \;\Rightarrow\; (-5)^2 > 0$. En efecto, $25 > 0$.

- $a^2 + 1 > 0$ para $a \in \mathbb{R}$.
- Cualquier potencia de un número positivo es un número positivo:
$$b > 0 \;\Rightarrow\; b^n > 0.$$

Ejemplos:

1. $3^2 > 0$. En efecto, $9 > 0$.
2. $6^{-2} = \dfrac{1}{6^2} > 0$. En efecto, $\dfrac{1}{36} > 0$.

- Cualquier potencia par de un número negativo es un número positivo:
$$a < 0 \;\Rightarrow\; a^n > 0 \text{ si } n \text{ es par.}$$

Ejemplo:

$(-4)^2 > 0$. En efecto, $16 > 0$.

- Cualquier potencia impar de un número negativo es un número negativo:

$$a < 0 \Rightarrow a^n < 0 \text{ si } n \text{ es impar.}$$

Ejemplo:

$(-4)^3 < 0$. En efecto, $-64 < 0$.

- $0 < a < b \Rightarrow 0 < a^n < b^n$.

Ejemplo:

$0 < 3 < 5 \Rightarrow 0 < 3^2 < 5^2$. En efecto, $0 < 9 < 25$.

- $a < b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n > b^n > 0 & \text{si } n \text{ es par;} \\ a^n < b^n < 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

Ejemplos:

1. $-4 < -2 < 0 \Rightarrow (-4)^2 > (-2)^2 > 0$. En efecto, $16 > 4 > 0$.
2. $-4 < -2 < 0 \Rightarrow (-4)^3 < (-2)^3 < 0$. En efecto, $-64 < -8 < 0$.

- $0 < a < b \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo:

$0 < 4 < 8 \Rightarrow 0 < \sqrt{4} < \sqrt{8}$. En efecto, $0 < 2 < 2.8284$.

- $a < b < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} < 0$ si $n \in \mathbb{N}$ es impar.

Ejemplo:

$-64 < -8 < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{-64} < \sqrt[3]{-8} < 0$. En efecto, $-4 < -2 < 0$.

- $(-a)^{2n} = a^{2n}$ y $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos:

1. Como 6 es par ($6 = 2 \cdot 3$), entonces $(-2)^6 = 2^6 = 64$.
2. Como 3 es impar ($3 = 2 \cdot 1 + 1$), entonces $(-3)^3 = -3^3$.
   En efecto, $-27 = -27$.

- Si el producto de dos números es positivo y uno de ellos es positivo el otro también lo es:

$$a \cdot b > 0 \;\&\; a > 0 \Rightarrow b > 0.$$

Ejemplo:

$$(3)(8) > 0 \;\&\; 3 > 0 \;\Rightarrow\; 8 > 0.$$

- El recíproco de un positivo es positivo: $a > 0 \;\Rightarrow\; a^{-1} > 0$.
  El recíproco de un negativo es negativo: $a < 0 \;\Rightarrow\; a^{-1} < 0$.

  Ejemplos:

  1. $7 > 0 \;\Rightarrow\; 7^{-1} > 0$. En efecto, $\dfrac{1}{7} > 0$.
  2. $-5 < 0 \;\Rightarrow\; (-5)^{-1} < 0$. En efecto, $\dfrac{1}{-5} = -\dfrac{1}{5} < 0$.

- El cociente de dos números positivos es positivo: $a > 0 \;\&\; b > 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{a}{b} > 0$.

  Ejemplo:

  $$2 > 0 \;\&\; 9 > 0 \;\Rightarrow\; \frac{2}{9} > 0.$$

- $\dfrac{m}{n} \le \dfrac{p}{q} \;\Leftrightarrow\; mq \le np$.

Ejercicios 1.4.1 *Soluciones en la página 8*

Determinar la relación de orden que hay entre los racionales siguientes:

1. $\dfrac{11}{5}$ y $\dfrac{20}{9}$.
2. $\dfrac{2}{3}$ y $\dfrac{8}{13}$.
3. $\dfrac{441}{189}$ y $\dfrac{7}{3}$.
4. $-\dfrac{10}{3}$ y $-\dfrac{33}{10}$.
5. $-\dfrac{126}{315}$ y $-\dfrac{2}{5}$.
6. $-\dfrac{25}{46}$ y $-\dfrac{6}{11}$.
7. Si a, b son dos números reales tales que $a^2 + b^2 = 0$, ¿qué se puede inferir acerca de los números a, b?
8. Si a, b son números reales tales que $a \ge b \;\&\; a \le b$, ¿qué se puede inferir acerca de a, b?

Ejercicios 1.4.2 *Soluciones en la página 8*

1. Como $8 > 5$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:
   $$8 + c \quad ? \quad 5 + c, \text{ donde } c \in \mathbb{R}\,.$$
2. Como $8 > 5$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:
   $$8c \quad ? \quad 5c, \text{ donde } c > 0.$$

3. Como $8 > 5$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$8c \quad ? \quad 5c, \text{ donde } c < 0.$$

4. Como $8 > 5$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$8 + 8 \quad ? \quad 5 + 5.$$

5. Como $5 > 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$5^{14} \quad ? \quad 0^{14} (= 0).$$

6. Como $5 > 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$5^{13} \quad ? \quad 0.$$

7. Como $5 > 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$-5 \quad ? \quad 0.$$

8. Como $-5 < 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$(-5)^{14} \quad ? \quad 0.$$

9. Como $-5 < 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$(-5)^{13} \quad ? \quad 0.$$

10. Como $-8 < -5 < 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$(-8)^2 \quad ? \quad (-5)^2.$$

11. Como $-8 < -5 < 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$(-8)^3 \quad ? \quad (-5)^3.$$

12. ¿Cómo es el producto de dos números positivos?
13. ¿Cómo es el producto de un número positivo por un negativo?
14. ¿Cómo es el producto de dos números negativos?

Ejercicios 1.4.1 *Orden de los números reales, página 6*

1. $\dfrac{11}{5} < \dfrac{20}{9}$.
2. $\dfrac{2}{3} > \dfrac{8}{13}$.
3. $\dfrac{441}{189} = \dfrac{7}{3}$.
4. $-\dfrac{10}{3} < -\dfrac{33}{10}$.
5. $-\dfrac{126}{315} = -\dfrac{2}{5}$.
6. $-\dfrac{25}{46} > -\dfrac{6}{11}$.
7. $a = 0, b = 0$.
8. $a = b$.

Ejercicios 1.4.2 *página 6*

1. $8 > 5 \;\Leftrightarrow\; 8 + c > 5 + c$.
2. $8 > 5 \;\&\; c > 0 \;\Rightarrow\; 8c > 5c$.
3. $8 > 5 \;\&\; c < 0 \;\Rightarrow\; 8c < 5c$.
4. $8 + 8 > 5 + 5$.
5. $5^{14} > 0$.
6. $5^{13} > 0$.
7. $-5 < 0$.
8. $(-5)^{14} > 0$.
9. $(-5)^{13} < 0$.
10. $(-8)^2 > (-5)^2$.
11. $(-8)^3 < (-5)^3 < 0$.
12. Positivo.
13. Negativo.
14. Positivo.

CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

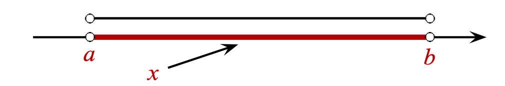
1.5 Intervalos

1.5.1 Tipos de intervalos

Supongamos que tenemos dos números reales a & b, tales que $a < b$.
Se definen cuatro tipos de intervalos:

1. Abierto

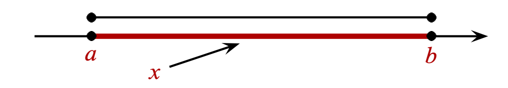
   - $(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \quad \& \quad x < b \}$.



   En esta representación del intervalo (a, b) las circunferencias expresan que "x" no toma ni el valor de "a" ni el valor de "b".

2. Cerrado

   - $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \quad \& \quad x \leq b \}$.



[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

El círculo en a indica que "x" puede tomar el valor de "a". Lo mismo ocurre para "b".

3. Semiabierto o semicerrado

- $[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \quad \& \quad x < b \}$.



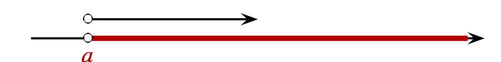
- $(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \quad \& \quad x \leq b \}$.



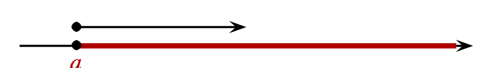
El centro de un intervalo es su punto medio: $\dfrac{a+b}{2}$.

4. Infinitos:

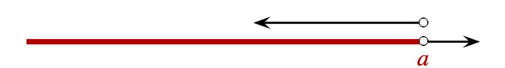
- $(a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \}$.



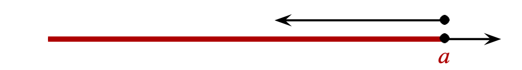
- $[a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \}$.



- $(-\infty, a) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}$.



- $(-\infty, a] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \}$.



Ejemplo 1.5.1 *Algunos intervalos son:*

▼

1. $(-2, 3) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \,\}$.



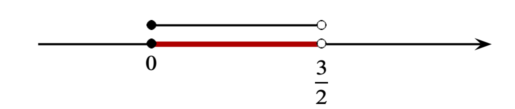
2. $[-3, 2] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 2 \,\}$.



3. $(1, 5] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \quad \& \quad x \le 5 \,\}$.



4. $\left[0, \frac{3}{2}\right) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0 \quad \& \quad x < \frac{3}{2} \right\}$.

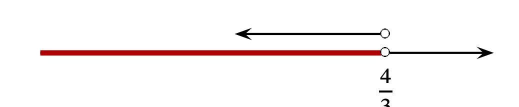


□

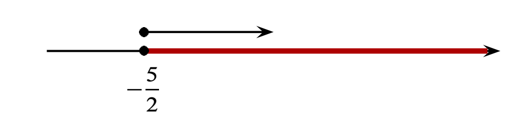
Ejemplo 1.5.2 *Algunos intervalos infinitos son:*

▼

1. $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{4}{3} \right\}$.



2. $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \ge -\frac{5}{2} \right\}$.



3. $(-\infty, 0] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \le 0 \,\}$.



4. $(0.1, +\infty) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0.1 \,\}$.



□

1.5.2 Operaciones con intervalos

Debido a que los intervalos son conjuntos (de números) podemos realizar con ellos las operaciones que se efectúan con cualquier par de conjuntos. Mencionaremos tres: unión $\cup$, intersección $\cap$ y diferencia $-$.

Si I_1 e I_2 son dos intervalos cualesquiera, entonces:

1. Unión de I_1 e I_2
$$I_1 \cup I_2 = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \in I_1 \text{ o bien } x \in I_2 \,\}.$$
2. Intersección de I_1 e I_2
$$I_1 \cap I_2 = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \in I_1 \;\&\; x \in I_2 \,\}.$$
3. Diferencia de I_1 e I_2
$$I_1 - I_2 = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \in I_1 \;\&\; x \notin I_2 \,\}.$$

Ejemplo 1.5.3 *Si se toman los intervalos* $I_1 = (-5, 4)$, $I_2 = [-3, 8]$, $I_3 = (-\infty, 2)$, $I_4 = [-1, +\infty)$ *e* $I_5 = (4, 7]$, *entonces:*

▼

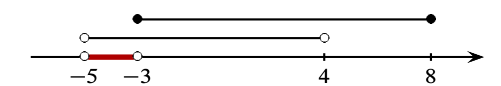
1. $I_1 \cup I_2 = (-5, 4) \cup [-3, 8] = (-5, 8]$.



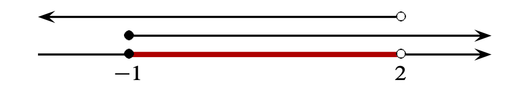
2. $I_1 \cap I_2 = (-5, 4) \cap [-3, 8] = [-3, 4)$.



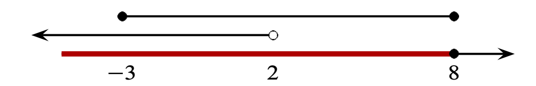
3. $I_1 - I_2 = (-5, 4) - [-3, 8] = (-5, -3)$.



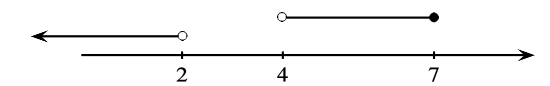
4. $I_3 \cap I_4 = (-\infty, 2) \cap [-1, +\infty) = [-1, 2)$.



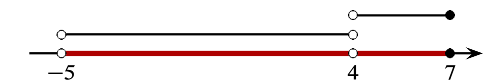
5. $I_2 \cup I_3 = [-3, 8] \cup (-\infty, 2) = (-\infty, 8]$.



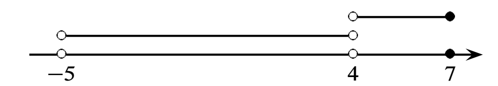
6. $I_3 \cap I_5 = (-\infty, 2) \cap (4, 7] = \varnothing =$ el conjunto vacío.



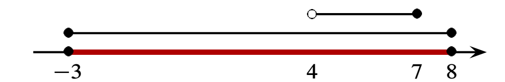
7. $I_1 \cup I_5 = (-5, 4) \cup (4, 7] = (-5, 7] - \{ 4 \}$.



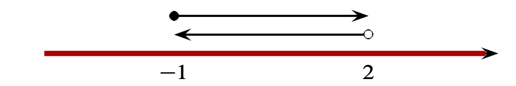
8. $I_1 \cap I_5 = (-5, 4) \cap (4, 7] = \varnothing$.



9. $I_5 \cup I_2 = (4, 7] \cup [-3, 8] = [-3, 8]$.



10. $I_3 \cup I_4 = (-\infty, 2) \cup [-1, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.



□

Comentario. En las operaciones con intervalos se debe tener presente lo siguiente:
Si I es un intervalo cualquiera, entonces:

1. $I \cup \varnothing = I$.
2. $I \cap \varnothing = \varnothing$.
3. $I \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$.
4. $I \cap \mathbb{R} = I$.

Si A y B son intervalos (conjuntos) cualesquiera, entonces:

1. $A \cup B = B$ si $A \subset B$ (es decir, si A es un subconjunto de B).
2. $A \cap B = A$ si $A \subset B$.

Ejercicios 1.5.1 *Soluciones en la página 8*

Escribir las siguientes desigualdades con notación de intervalo y representarlas geométricamente:

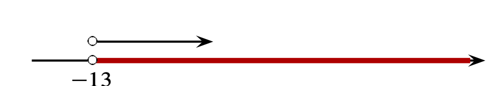
1. $-4 \leq x < 3$.
2. $x > -12$.
3. $x < 0$.
4. $\pi < x \leq 8$.
5. $x \geq -\sqrt{3}$.
6. $x \leq \dfrac{3}{4}$.
7. $-\dfrac{2}{3} < x < 1$.
8. $x < \sqrt{2}$.
9. $-\sqrt{5} \leq x$.
10. $-1 \leq x \leq 5$.
11. $x \leq 23$.
12. $0 \leq x$.

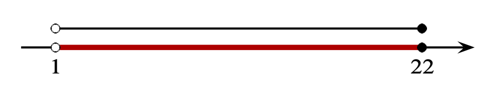
Escribir los siguiente intervalos como una desigualdad y representarlos geométricamente:

13. $[-9, +\infty)$.
14. $[-10, -1)$.
15. $\left(\dfrac{5}{7}, +\infty\right)$.
16. $(-2, 16]$.
17. $(-\infty, 32)$.
18. $\left(\dfrac{1}{3}, 15\right)$.
19. $\left(-\infty, \dfrac{15}{4}\right]$.
20. $\left[-\dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{2}\right]$.

Expresar como una desigualdad y con notación de intervalo los siguientes segmentos de la recta numérica:

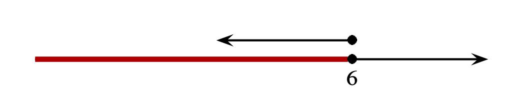
21.



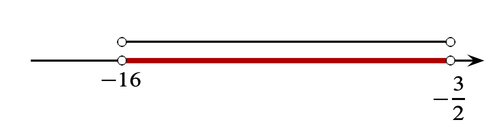


22.

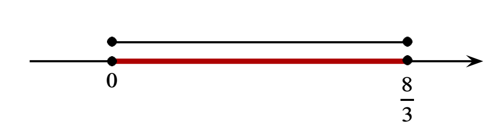
23.



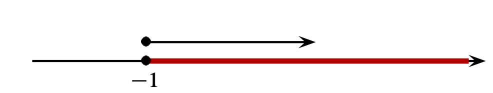
24.



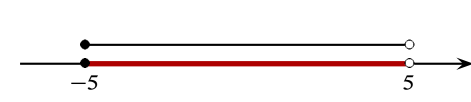
25.



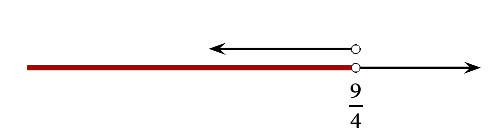
26.



27.



28.



Dados los intervalos $I_1 = (-7, 4]$, $I_2 = [-2, 6)$, $I_3 = (-\infty, 1]$, $I_4 = (0, +\infty)$, $I_5 = (-4, 2)$ e $I_6 = [2, 8]$, determinar:

29. $I_1 \cup I_2$.

30. $I_1 \cup I_6$.

31. $I_1 \cap I_2$.

32. $I_2 \cap I_6$.

33. $I_1 - I_2$.

34. $I_2 - I_5$.

35. $I_3 \cap I_4$.

36. $I_4 \cap I_5$.

37. $I_4 \cap I_6$.

38. $I_1 \cup I_5$.

39. $\mathbb{R} - I_3$.

40. $\mathbb{R} - I_4$.

41. $\mathbb{R} - I_2$.

42. $I_1 \cap I_6$.

43. $I_3 \cup I_4$.

44. $\mathbb{R} - I_1$.

45. $I_4 - I_6$.

46. $(I_5 \cap I_6) \cup I_4$.

47. $(I_1 \cap I_5) \cup I_6$.

48. $I_3 \cap (\mathbb{R} - I_5)$.

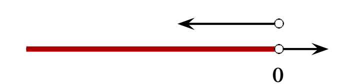
Ejercicios 1.5.1 *Intervalos, página 6*

1. $[-4, 3)$.



2. $(-12, +\infty)$.

3. $(-\infty, 0)$.

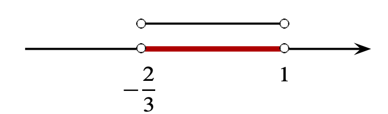


4. $(\pi, 8]$.

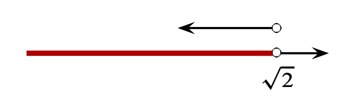
5. $\left[-\sqrt{3}, +\infty\right)$.

6. $\left(-\infty, \dfrac{3}{4}\right]$.

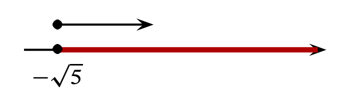
7. $\left(-\dfrac{2}{3}, 1\right)$.



8. $\left(-\infty, \sqrt{2}\right)$.



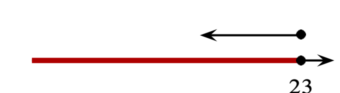
9. $\left[-\sqrt{5}, +\infty\right)$.



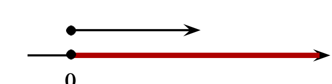
10. $[-1, 5]$.



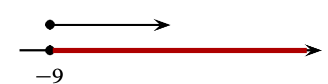
11. $(-\infty, 23]$.



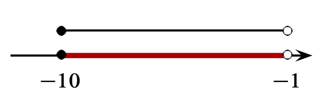
12. $[0, +\infty)$.



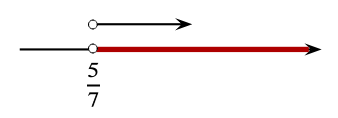
13. $\left\{\, x \mid -9 \le x \,\right\}$.



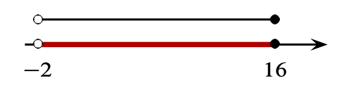
14. $\left\{\, x \mid -10 \le x < -1 \,\right\}$.



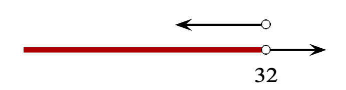
15. $\left\{\, x \;\middle|\; \dfrac{5}{7} < x \,\right\}$.



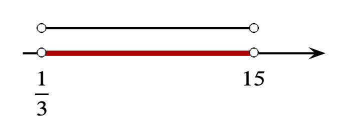
16. $\{\, x \mid -2 < x \leq 16 \,\}$.



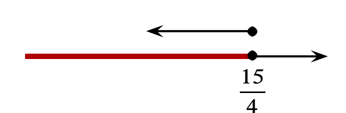
17. $(-\infty, 32) = \{\, x \mid x < 32 \,\}$.



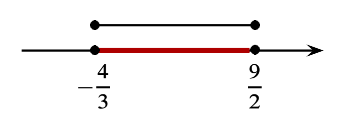
18. $\left\{ x \mid \frac{1}{3} < x < 15 \right\}$.



19. $\left\{ x \mid x \leq \frac{15}{4} \right\}$.



20. $\left\{ x \mid -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{9}{2} \right\}$.



21. $(-13, +\infty) = \{\, x \mid -13 < x \,\}$.

22. $(1, 22] = \{\, x \mid 1 < x \leq 22 \,\}$.

23. $(-\infty, 6] = \{\, x \mid x \leq 6 \,\}$.

24. $\left(-16, -\frac{3}{2}\right) = \left\{ x \mid -16 < x < -\frac{3}{2} \right\}$.

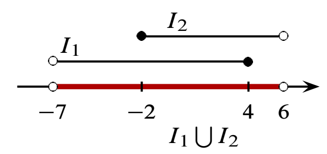
25. $\left[0, \frac{8}{3}\right] = \left\{ x \mid 0 \leq x \leq \frac{8}{3} \right\}$.

26. $[-1, +\infty) = \{\, x \mid -1 \leq x \,\}$.

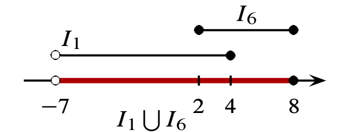
27. $[-5, 5) = \{\, x \mid -5 \leq x < 5 \,\}$.

28. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right) = \left\{ x \mid x < \frac{9}{4} \right\}$.

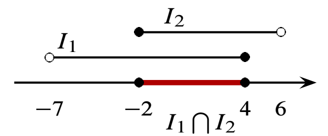
29. $(-7, 6)$.



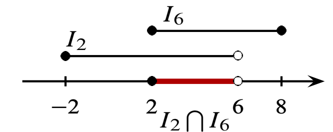
30. $(-7, 8]$.



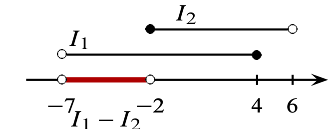
31. $[-2, 4]$.



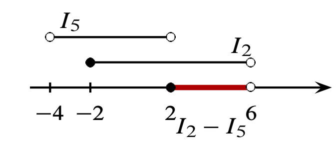
32. $[2, 6)$.



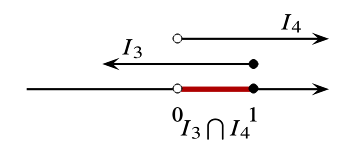
33. $(-7, -2)$.



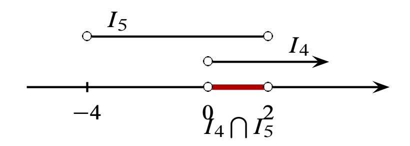
34. $[2, 6)$.



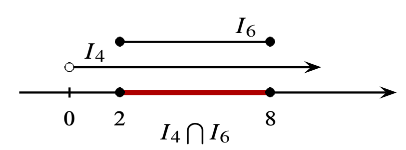
35. $(0, 1]$.



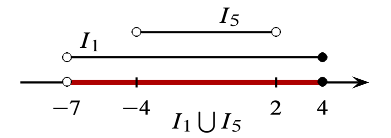
36. $(0, 2)$.



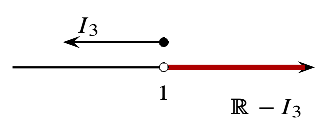
37. $[2, 8]$.



38. $(-7, 4]$.



39. $(1, +\infty)$.

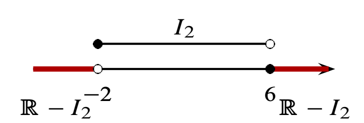


40. $(-\infty, 0)$.

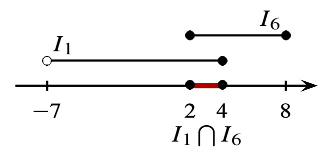
I_4

$\mathbb{R} - I_4$ 0

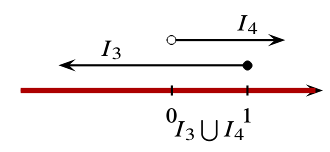
41. $(-\infty, -2) \cup [6, +\infty)$.



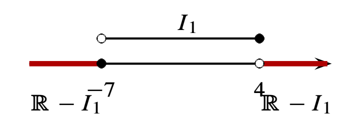
42. $[2, 4]$.



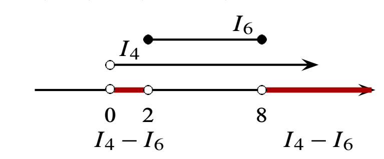
43. $\mathbb{R}$.



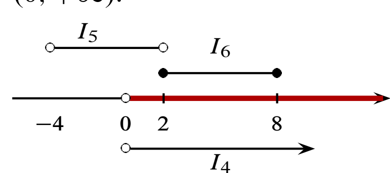
44. $(-\infty, -7] \cup (4, +\infty)$.



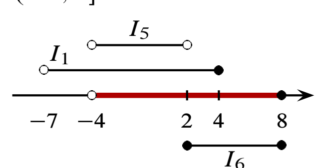
45. $(0, 2) \cup (8, +\infty)$.



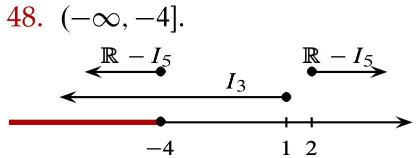
46. $(0, +\infty)$.



47. $(-4, 8]$.



48. $(-\infty, -4]$.



CAPÍTULO

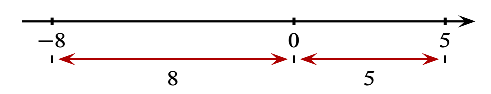
1

Los números reales

[1]

1.6 Valor absoluto

En el siguiente eje se muestran el número -8 y el 5. Se puede apreciar que la distancia de estos dos números al origen es 8 y 5 respectivamente.



- En el eje la distancia de un número a al origen, que se denota mediante $d(a, 0)$, se conoce como valor absoluto y se expresa de la siguiente manera

$$d(a, 0) = |\, a \,| .$$

Entonces, la distancia del número 5 al origen es

$$d(5, 0) = |\, 5 \,| = 5$$

y la distancia del número -8 al origen es:

$$d(-8, 0) = |-8\,| = 8.$$

Propiedades del valor absoluto:

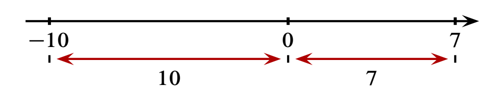
- $|\, a \,| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0; \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Ejemplos:

1. $|\,7\,| = 7$ ya que $7 \geq 0$.

2. $|\,-10\,| = -(-10) = 10$ ya que $-10 < 0$.



- $|\,a\,| = \pm a$.
  El signo $\pm$ se lee más o bien menos.

- $|\,a\,| \geq 0$.

- $|\,a\,| = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0$.

- $\sqrt{a^2} = |\,a\,|$. En general si n es par $\sqrt[n]{a^n} = |\,a\,|$.

- $|\,a\,| = |\,-a\,|$.

  Ejemplos:

  1. Si $a = 3 \;\Rightarrow\; |\,3\,| = |\,-3\,| \;\Rightarrow\; 3 = -(-3) \;\Rightarrow\; 3 = 3$.

  2. Si $a = -5 \;\Rightarrow\; |\,-5\,| = |\,-(-5)\,| \;\Rightarrow\; |\,-5\,| = |\,5\,| \;\Rightarrow\; -(-5) = 5 \;\Rightarrow\; 5 = 5$.

- $-|\,a\,| \leq a \leq |\,a\,|$.

  Ejemplos:

  1. Si $a = 2 \;\Rightarrow\; -|\,2\,| \leq 2 \leq |\,2\,| \;\Rightarrow\; -2 \leq 2 \leq 2$.

  2. Si $a = -6 \;\Rightarrow\; -|\,-6\,| \leq -6 \leq |\,-6\,| \;\Rightarrow\; -[-(-6)] \leq -6 \leq -(-6) \;\Rightarrow\; -6 \leq -6 \leq 6$.

- $|\,a \cdot b\,| = |\,a\,| \cdot |\,b\,|$.

  Ejemplos:

  1. Si $a = 2$ & $b = 4 \;\Rightarrow\; |\,2 \cdot 4\,| = |\,2\,| \cdot |\,4\,| \;\Rightarrow\; |\,8\,| = 2 \cdot 4 \;\Rightarrow\; 8 = 8$.

  2. Si $a = -4$ & $b = 3 \;\Rightarrow\; |\,-4 \cdot 3\,| = |\,-4\,| \cdot |\,3\,| \;\Rightarrow\; |\,-12\,| = -(-4) \cdot 3 \;\Rightarrow\; -(-12) = 4 \cdot 3 \;\Rightarrow\; 12 = 12$.

- $|\,a\,|^n = |\,a^n\,|$ para $n \in \mathbb{Z}$.

  Ejemplos:

  1. Si $a = 3$ & $n = 2 \;\Rightarrow\; |\,3\,|^2 = \left|\,3^2\,\right| \;\Rightarrow\; 3^2 = |\,9\,| \;\Rightarrow\; 9 = 9$.

  2. Si $a = -6$ & $n = 2 \;\Rightarrow\; |\,-6\,|^2 = \left|\,(-6)^2\,\right| \;\Rightarrow\; [-(-6)]^2 = |\,36\,| \;\Rightarrow\; 6^2 = 36 \;\Rightarrow\; 36 = 36$.

  3. Si $a = 4$ & $n = -1 \;\Rightarrow\; |\,4\,|^{-1} = \left|\,4^{-1}\,\right| \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{|\,4\,|} = \left|\dfrac{1}{4}\right| \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|\,a\,|}{|\,b\,|}$ con $b \neq 0$.

  Ejemplo:

  Si $a = -7$ & $b = 2 \Rightarrow \left|\dfrac{-7}{2}\right| = \dfrac{|-7|}{|\,2\,|} \Leftrightarrow \left|-\dfrac{7}{2}\right| = \dfrac{|-7|}{|\,2\,|} \Leftrightarrow -\left(-\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{-(-7)}{2} \Leftrightarrow \dfrac{7}{2} = \dfrac{7}{2}$.

- $|\,a + b\,| \leq |\,a\,| + |\,b\,|$.

  Ejemplos:

  1. Si $a = 6$ & $b = -2 \Rightarrow |\,6 + (-2)\,| \leq |\,6\,| + |-2| \Rightarrow |\,4\,| \leq 6 + [-(-2)] \Rightarrow 4 \leq 6 + 2 \Rightarrow 4 \leq 8$.
  2. Si $a = 6$ & $b = 2 \Rightarrow |\,6 + 2\,| \leq |\,6\,| + |\,2\,| \Rightarrow |\,8\,| \leq 6 + 2 \Rightarrow 8 \leq 8$.

- $|\,a - b\,| \geq |\,a\,| - |\,b\,|$.

  Ejemplos:

  1. Si $a = 6$ & $b = -2\,|\,6 - (-2)\,| \geq |\,6\,| - |-2| \Rightarrow |\,8\,| \geq 6 - [-(-2)] \Rightarrow 8 \geq 6 - 2 \Rightarrow 8 \geq 4$.
  2. Si $a = 6$ & $b = 2 \Rightarrow |\,6 - 2\,| \geq |\,6\,| - |\,2\,| \Rightarrow |\,4\,| \geq 6 - 2 \Rightarrow 4 \geq 4$.

- $|\,a\,| \leq c$ & $|\,b\,| \leq d \Rightarrow |\,a + b\,| \leq c + d$.

  Ejemplo:

  Si $a = 3, c = 5, b = -1$ y $d = 4 \Rightarrow |\,3\,| \leq 5$ & $|-1| = 1 \leq 4 \Rightarrow |\,3 + (-1)\,| \leq 5 + 4 \Rightarrow$
  $\Rightarrow |\,2\,| \leq 9 \Rightarrow 2 \leq 9$.

Ejemplo 1.6.1 *Por definición de valor absoluto:*

▼

1. $|\,5\,| = 5$ y $|-5| = -(-5) = 5$.
2. $\left|\dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{2}{3}$ y $\left|-\dfrac{2}{3}\right| = -\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$.
3. $|-459| = -(-459) = 459$ y $|\,459\,| = 459$.
4. $\left|-\dfrac{512}{125}\right| = -\left(-\dfrac{512}{125}\right) = \dfrac{512}{125}$ y $\left|\dfrac{512}{125}\right| = \dfrac{512}{125}$.

5. $\left| x^2 + 1 \right| = x^2 + 1$ ya que $x^2 + 1 > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

6. $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & \text{si } x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1; \\ 1 - x & \text{si } x < 1. \end{cases}$

7. $\left| 1 - x^2 \right| = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } 1 - x^2 \geq 0 \\ -(1 - x^2) & \text{si } 1 - x^2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x^2 \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x^2 > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |x| \leq 1; \\ x^2 - 1 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$

8. $|4 + 3x| = \begin{cases} 4 + 3x & \text{si } 4 + 3x \geq 0 \\ -(4 + 3x) & \text{si } 4 + 3x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x + 4 & \text{si } 3x \geq -4 \\ -3x - 4 & \text{si } 3x < -4 \end{cases} = \begin{cases} 3x + 4 & \text{si } x \geq \dfrac{-4}{3} = -\dfrac{4}{3}; \\ -3x - 4 & \text{si } x < \dfrac{-4}{3} = -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$

9. $\left| -\dfrac{2x}{5} \right| = \begin{cases} -\dfrac{2x}{5} & \text{si } -\dfrac{2x}{5} \geq 0 \\ -\left(-\dfrac{2x}{5} \right) & \text{si } -\dfrac{2x}{5} < 0 \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{2}{5}x & \text{si } x \leq 0; \\ \dfrac{2}{5}x & \text{si } x > 0. \end{cases}$

10. $\left| x^3 \right| = \begin{cases} x^3 & \text{si } x^3 \geq 0 \\ -x^3 & \text{si } x^3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0; \\ -x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

□

Ejemplo 1.6.2 *Por definición de valor absoluto:*

▼

1. $|x| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ o bien} \\ x = -5. \end{cases}$

2. $|x - 2| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 5 \text{ o bien} \\ x - 2 = -5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \text{ o bien} \\ x = -3. \end{cases}$

3. $|2x + 1| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 9 \text{ o bien} \\ 2x + 1 = -9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9 - 1}{2} = 4 \text{ o bien} \\ x = \dfrac{-9 - 1}{2} = -5. \end{cases}$

4. $\left| x^2 - 1 \right| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 3 \text{ o bien} \\ x^2 - 1 = -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \text{ o bien} \\ x^2 = -2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \text{ o bien} \\ \text{nunca.} \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x = -2 \text{ o bien} \\ x = 2. \end{cases}$

5. $\left| x^2 - 5 \right| = 4 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2 - 5 = 4 \text{ o bien} \\ x^2 - 5 = -4. \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2 = 9 \text{ o bien} \\ x^2 = 1. \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = \pm 3 \text{ o bien} \\ x = \pm 1. \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = -3 \text{ o bien} \\ x = 3 \text{ o bien} \\ x = -1 \text{ o bien} \\ x = 1. \end{cases}$

6. $\left| x^3 - x \right| = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ o bien} \\ x + 1 = 0 \text{ o bien} \\ x - 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ o bien} \\ x = -1 \text{ o bien} \\ x = 1. \end{cases}$$

7. $|x| = -2$ nunca, ya que $|x| \geq 0$ y también $-2 < 0$.

8. $|4x - 3| = -1$ nunca, ya que $|4x - 3| \geq 0$ y también $-1 < 0$.

□

Distancia entre dos puntos

- Definimos la distancia entre dos puntos a, b como:

$$d(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} |a - b|.$$

Propiedades de la distancia:

- $d(a, 0) = |a - 0| = |a|$.
- $d(a, a) = 0$.
- $d(a, b) \geq 0$.
- $d(a, b) = d(b, a)$.
- $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$, desigualdad del triángulo.

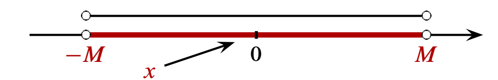
Consideramos un eje con los números $M > 0$ & x.

- Si el número x es igual a M o bien a $-M$, entonces la distancia de x al origen es M.

$$|x| = M \;\Leftrightarrow\; x = \pm M.$$

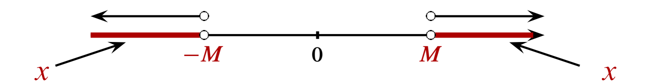
$x = -M$ $\quad 0 \quad M \quad |x|$

- El conjunto de números cuya distancia al origen es menor que M consta de aquellos puntos x que están a la derecha de $-M$ y a la izquierda de M.



$$d(x,0) < M \;\Leftrightarrow\; |\,x\,| < M \;\Leftrightarrow\; -M < x < M \;\Leftrightarrow\; x \in (-M, M).$$

- El conjunto de números x cuya distancia al origen es mayor que M consta de los que están a la izquierda de $-M$ o bien a la derecha de M.



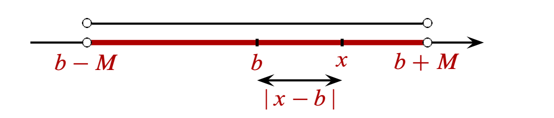
$$d(x,0) > M \;\Leftrightarrow\; |\,x\,| > M \;\Leftrightarrow\; x < -M \text{ o bien } x > M \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)\,.$$

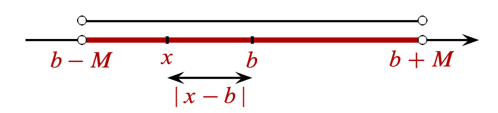
En resumen:

1. $d(x,0) = |\,x\,| \le M \;\Leftrightarrow\; -M \le x \le M \;\Leftrightarrow\; x \in [-M, M]$.
2. $d(x,0) = |\,x\,| \ge M \;\Leftrightarrow\; x \le -M$ o bien $x \ge M \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -M] \cup [M, \infty)$.

- Los puntos cuya distancia a b es menor que M son aquellos que están a la derecha de $b - M$ y a la izquierda de $b + M$

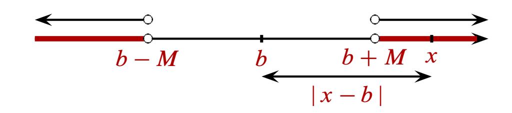
$$d(x,b) < M \Leftrightarrow |\,x-b\,| < M \Leftrightarrow -M < x{-}b < M \Leftrightarrow b{-}M < x < b{+}M \Leftrightarrow x \in (b-M, b+M)\,.$$

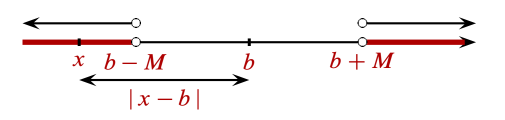




- Los puntos cuya distancia a b es mayor que M son aquellos que están a la izquierda de $b - M$ o a la derecha de $b + M$.

$$\begin{aligned} d(x,b) > M \;&\Leftrightarrow\; |\,x-b\,| > M \;\Leftrightarrow\; x-b < -M \text{ o bien } x-b > M \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; x < b-M \text{ o bien } x > b+M \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, b-M) \cup (b+M, +\infty)\,. \end{aligned}$$



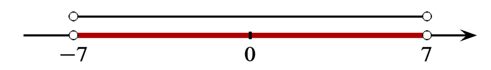


Ejemplo 1.6.3 *Utilizando el concepto de distancia, obtener los números $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen:*

1. $|\,x\,| < 7$.
2. $|\,x\,| \geq 3$.
3. $|\,x\,| \leq 4$.
4. $|\,x\,| > 5$.
5. $|\,x - 6\,| < 2$.
6. $|\,x - 4\,| \geq 1$.
7. $|\,x + 1\,| \leq 3$.
8. $|\,x + 2\,| > 4$.

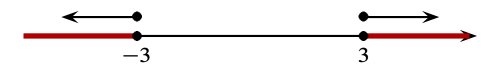


1. El conjunto de números x cuya distancia al origen es menor que 7 unidades consta de aquellos puntos x tales que están a la derecha de -7 y a la izquierda de 7.



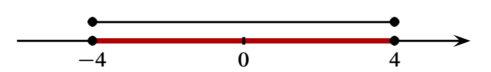
Entonces:
$$|\,x\,| < 7 \;\Leftrightarrow\; x \in (-7, 7)\,.$$

2. El conjunto de números x cuya distancia al origen es de al menos 3 unidades consta de aquellos puntos x tales que están a la izquierda de -3 o a la derecha de 3 además de 3 y de -3.



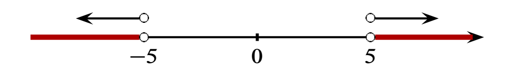
Entonces:
$$|\,x\,| \geq 3 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) = \mathbb{R} - (-3, 3)\,.$$

3. El conjunto de números x cuya distancia al origen es de a lo más 4 unidades consta de aquellos puntos x tales que están a la derecha de -4 y a la izquierda de 4, además de 4 y de -4.



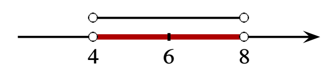
Entonces:
$$|\,x\,| \leq 4 \;\Leftrightarrow\; x \in [-4, 4]\,.$$

4. El conjunto de números x cuya distancia al origen es mayor que 5 unidades consta de aquellos puntos x tales que están a la izquierda de -5 o a la derecha de 5.



Entonces:
$$|\,x\,| > 5 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -5) \cup (5, +\infty) = \mathbb{R} - [-5, 5]\,.$$

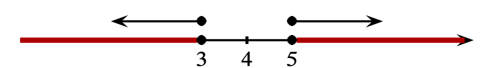
5. Ya que $|\,x-6\,| = d(x,6)$, entonces $|\,x-6\,| < 2 \Leftrightarrow d(x-6) < 2$. El conjunto de números x cuya distancia al número 6 es menor que 2 consta de aquellos puntos x tales que están a la derecha de 4 y a la izquierda de 8.



Entonces:

$$|\,x-6\,| < 2 \;\Leftrightarrow\; 4 < x < 8 \;\Leftrightarrow\; x \in (4,8)\,.$$

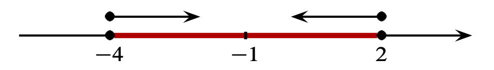
6. $|\,x-4\,| = d(x,4) \;\Rightarrow\; |\,x-4\,| \geq 1 \;\Leftrightarrow\; d(x,4) \geq 1$. El conjunto de números x cuya distancia al número 4 es al menos de 1 unidad consta de aquellos puntos x tales que están a la izquierda de 3 o a la derecha de 5 además de 3 y de 5.



Entonces:

$$|\,x-4\,| \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty,3] \cup [5,+\infty) = \mathbb{R} - (3,5)\,.$$

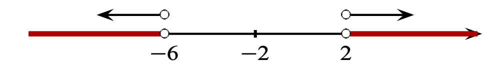
7. Ya que $|\,x+1\,| = |\,x-(-1)\,| = d(x,-1)$, entonces $|\,x+1\,| \leq 3 \Leftrightarrow d(x,-1) \leq 3$. El conjunto de números x cuya distancia a -1 es a lo más de 3 unidades consta de aquellos puntos x tales que están a la derecha de -4 y a la izquierda de 2, además de -4 y de 2.



Entonces:

$$d(x,-1) \leq 3 \;\Leftrightarrow\; |\,x+1\,| \leq 3 \;\Leftrightarrow\; x \in [-4,2]\,.$$

8. Ya que $|\,x+2\,| = |\,x-(-2)\,| = d(x,-2)$, entonces $|\,x+2\,| > 4 \Leftrightarrow d(x,-2) > 4$. El conjunto de números x cuya distancia al número -2 es mayor que 4 unidades consta de aquellos puntos x tales que están a la izquierda de -6 o bien a la derecha de 2.



Entonces:

$$d(x,-2) > 4 \;\Leftrightarrow\; |\,x+2\,| > 4 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty,-6) \cup (2,+\infty) = \mathbb{R} - [-6,2]\,.$$

□

Ejercicios 1.6.1 *Soluciones en la página* **??**

Resolver las siguientes ecuaciones:

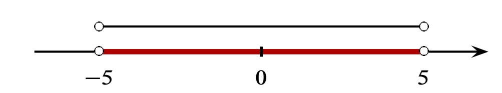
1. $|\, x \,| = \sqrt{2}$.
2. $|\, 2x \,| = 6$.
3. $\left| \dfrac{3x}{2} \right| = 3$.
4. $\left| -\dfrac{5x}{4} \right| = 1$.
5. $|\, x + 2 \,| = 4$.
6. $|\, 1 - x \,| = 1$.
7. $|\, 2x + 3 \,| = 5$.
8. $|\, 2 - 3x \,| = 8$.
9. $\left| x^2 - 9 \right| = 0$.
10. $\left| x^2 - x - 4 \right| = 2$.

Utilizando el concepto de distancia, obtener los números $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen:

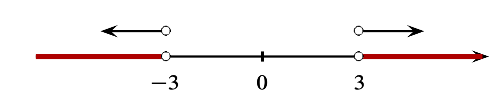
11. $|\, x \,| < 5$.
12. $|\, x \,| > 3$.
13. $|\, x \,| \leq 4$.
14. $|\, x \,| \geq 2$.
15. $|\, x \,| < -1$.
16. $|\, x - 3 \,| \leq 2$.
17. $|\, x - 1 \,| < 3$.
18. $|\, x + 2 \,| \geq 5$.
19. $|\, x + 1 \,| > 4$.
20. $|\, x - 4 \,| > 0$.

Ejercicios 1.6.1 *Valor absoluto, página* **??**

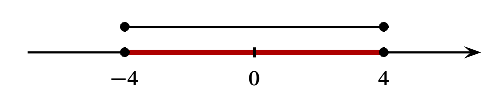
1. $x = -\sqrt{2}$ & $x = \sqrt{2}$.
2. $x = -3$ & $x = 3$.
3. $x = -2$ & $x = 2$.
4. $x = \dfrac{4}{5}$ & $x = -\dfrac{4}{5}$.
5. $x = -6$ & $x = 2$.
6. $x = 2$ & $x = 0$.
7. $x = -4$ & $x = 1$.
8. $x = \dfrac{10}{3}$ & $x = -2$.
9. $x = -3$ & $x = 3$.
10. $x = -1, x = 2, x = -2$ & $x = 3$.
11. $\{ x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 5 \} = (-5, 5)$.



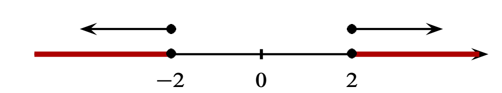
12. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - [-3, 3]$.



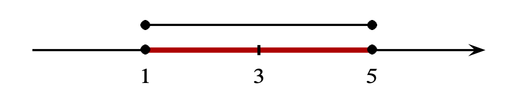
13. $\{ x \in \mathbb{R} \mid -4 \le x \le 4 \} = [-4, 4]$.



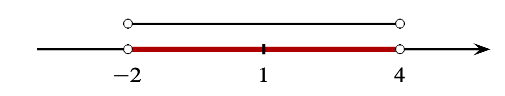
14. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty) = \mathbb{R} - (-2, 2)$.



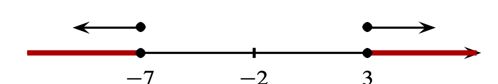
15. $\emptyset$.
16. $\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 5 \} = [1, 5]$.



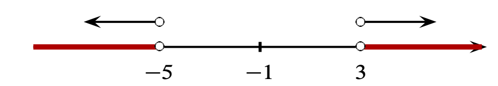
17. $(-2, 4)$.



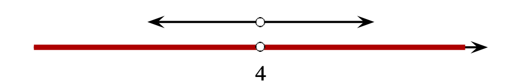
18. $(-\infty, -7] \cup [3, +\infty) = \mathbb{R} - (-7, 3)$.



19. $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - [-5, 3]$.



20. $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty) = \mathbb{R} - \{4\}$.



CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.7 Resolución de desigualdades

Resolver una desigualdad con una incógnita, digamos x, quiere decir hallar los números reales x para los cuales la desigualdad se cumple. Llamamos conjunto solución al conjunto de tales x.

Para resolver una desigualdad son útiles las propiedades siguientes:

- Para pasar un término de un miembro de una desigualdad al otro, se le cambia de signo, es decir, si está con signo $+$ se le pone en el otro miembro con signo $-$ y viceversa:

$$a + b \geq c \;\Leftrightarrow\; a \geq c - b.$$

- Se puede pasar un factor diferente de 0 de un miembro de una desigualdad al otro poniéndolo como divisor y viceversa, tomando en consideración lo siguiente:

  1. Si el factor es positivo el sentido de la desigualdad se preserva:

  $$a \cdot b \geq c \;\&\; b > 0 \;\Leftrightarrow\; a \geq \frac{c}{b} \;\&\; b > 0.$$

  2. Si el factor es negativo el sentido de la desigualdad se invierte:

  $$a \cdot b \geq c \;\&\; b < 0 \;\Leftrightarrow\; a \leq \frac{c}{b} \;\&\; b < 0.$$

En el siguiente ejemplo se observa que ambas desigualdades son verdaderas:

$$(-2)(5) < 3. \text{ En efecto } -10 < 3.$$

$$5 > \frac{3}{-2}. \text{ En efecto } 5 > -1.5.$$

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Al pasar el factor negativo -2 el sentido de la desigualdad cambió.

CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.7.1 Desigualdades tipo $ax + b \geq 0$ con $a \neq 0$ & $b \in \mathbb{R}$

Para resolver esa desigualdad:

$$ax + b \geq 0$$

se pasa b al segundo miembro

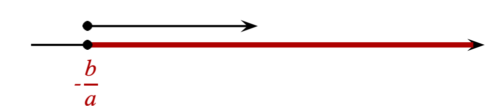
$$ax \geq 0 - b \;\Leftrightarrow\; ax \geq -b$$

y se pasa el factor a al segundo miembro, por lo que:

1. Si $a > 0$, entonces $x \geq -\dfrac{b}{a}$.

   En cuyo caso el conjunto solución es el intervalo:

$$CS = \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right).$$

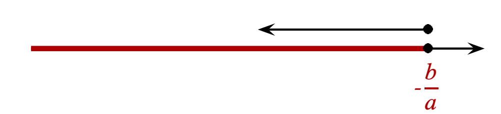


2. Si $a < 0$, entonces $x \leq -\dfrac{b}{a}$.

   En este caso el conjunto solución es el intervalo:

$$CS = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right].$$

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



Geométricamente resolver una desigualdad $ax + b \geq 0$ con $a \neq 0$ quiere decir hallar las x tales que la recta $y = ax + b$ corta a la recta $y = 0$ (el eje x) o bien está situada por encima de ella.

Ejemplo 1.7.1 *Resolver la desigualdad* $2x - 5 \geq 0$.

▼

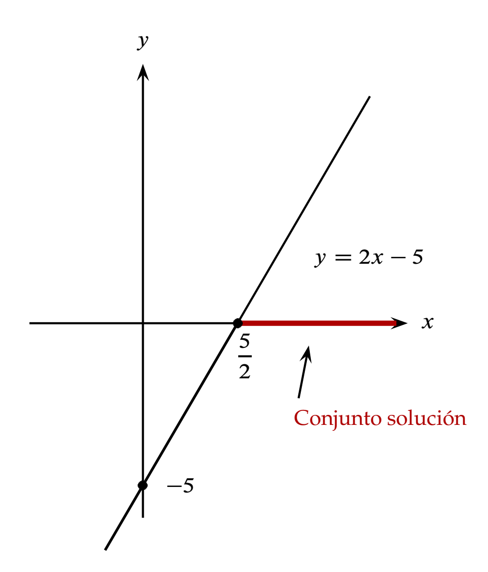
$$2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 0 + 5 \Leftrightarrow 2x \geq 5\,,$$

$$\text{como } 2 > 0, \text{ entonces } 2x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}.$$

El conjunto solución es el intervalo:

$$CS = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)\,.$$

Geométricamente:



De la gráfica anterior observamos lo siguiente:

1. Cuando $x > \frac{5}{2}$, la recta $y = 2x - 5$ está por arriba de la recta $y = 0$.
2. Cuando $x = \frac{5}{2}$, la recta $y = 2x - 5$ interseca a la recta $y = 0$, el eje x. □

Ejemplo 1.7.2 *Resolver la desigualdad* $\frac{3}{4}x + \frac{2}{5} < 0$.

▼

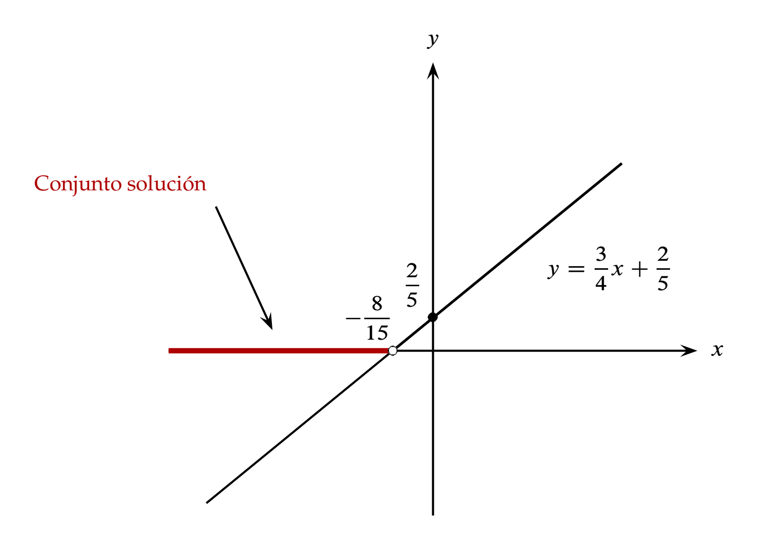
$$\frac{3}{4}x + \frac{2}{5} < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x < 0 - \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{4}x < -\frac{2}{5}\,,$$

$$\text{como } \frac{3}{4} > 0, \text{ entonces } \frac{3}{4}x < -\frac{2}{5} \Leftrightarrow x < -\frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow x < -\frac{8}{15}.$$

El conjunto solución es el intervalo

$$CS = \left(-\infty, -\frac{8}{15}\right) .$$

Geométricamente:



□

Ejemplo 1.7.3 *Resolver la desigualdad* $3 - 2x > 0$*.*

▼

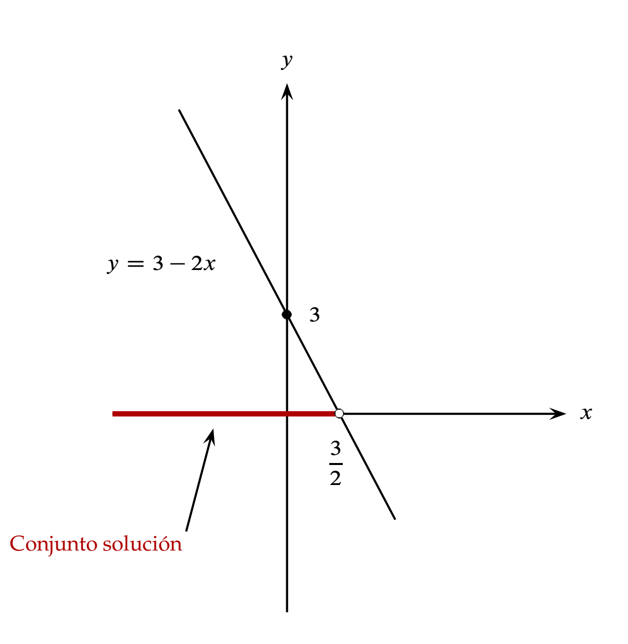
$$3 - 2x > 0 \;\Leftrightarrow\; -2x > 0 - 3 \;\Leftrightarrow\; -2x > -3\,,$$

$$\text{como } -2 < 0, \text{ entonces } -2x > -3 \;\Leftrightarrow\; x < \frac{-3}{-2} \;\Leftrightarrow\; x < \frac{3}{2},$$

el conjunto solución es el intervalo

$$CS = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) .$$

Geométricamente:



□

Ejemplo 1.7.4 *Resolver la desigualdad* $-\dfrac{5}{4}x - \dfrac{1}{2} \le 0$.

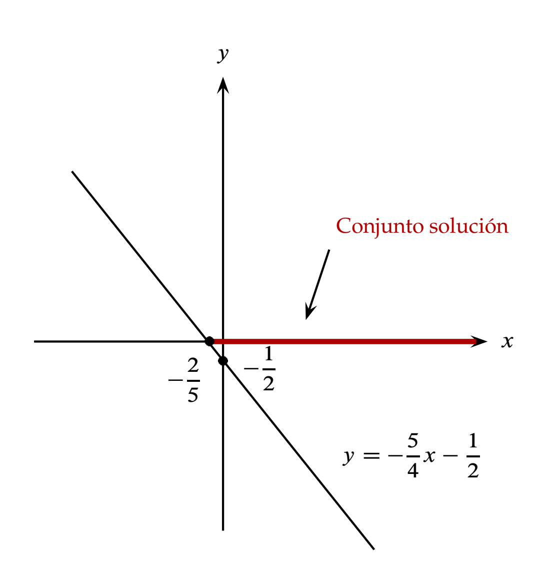
▼

$$-\frac{5}{4}x - \frac{1}{2} \le 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{5}{4}x \le 0 + \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; -\frac{5}{4}x \le \frac{1}{2}\,,$$
$$\text{como } -\frac{5}{4} < 0, \text{ entonces } -\frac{5}{4}x \le \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x \ge \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{5}\right) \;\Leftrightarrow\; x \ge -\frac{2}{5};$$

el conjunto solución es el intervalo:

$$CS = \left[-\frac{2}{5}, +\infty\right) .$$

Geométricamente:



□

CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.7.2 Desigualdades tipo $ax + b \geq cx + d$

Resolver una desigualdad como ésa significa, en útima instancia, hallar otra desigualdad equivalente, esto es, que tenga el mismo conjunto solución, pero donde x aparezca sola en uno de los miembros. Significa pues despejar la x. Resolver la desigualdad recuerda mucho resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.
Podemos trasponer términos y escribir en un mismo miembro todos los términos que tienen x, y en el otro los que no:

$$ax - cx \geq d - b.$$

Ahora reducir términos semejantes, es decir, poner x como factor común:

$$(a - c)x \geq d - b.$$

Ahora si $a - c \neq 0$ (si $a \neq c$), llegamos a $a_1x + b_1 \geq 0$, por lo que:

1. Si $a - c > 0$, entonces $x \geq \dfrac{d - b}{a - c}$.

   Y el conjunto solución será:

$$CS = \left[\frac{d - b}{a - c}, +\infty\right) .$$

2. Si $a - c < 0$, entonces $x \leq \dfrac{d - b}{a - c}$. En este caso el conjunto solución es

$$CS = \left(-\infty, \frac{d - b}{a - c}\right] .$$

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Si $a - c = 0$, la desigualdad equivalente a la propuesta es:

$$0 \cdot x \geq d - b \;\Rightarrow\; 0 \geq d - b.$$

La cual se cumple si efectivamente $0 \geq d - b$, en cuyo caso el conjunto solución es

$$CS = \mathbb{R}\,.$$

O bien nunca se cumple si $d - b > 0$, y en este caso el conjunto solución es $\emptyset$, el conjunto vacío; es decir,

$$CS = \emptyset\,.$$

Geométricamente resolver la desigualdad $ax + b \geq cx + d$ quiere decir hallar las x tales que la recta $y = ax + b$ corta a la recta $y = cx + d$ o bien está por encima de ella.

Ejemplo 1.7.1 *Resolver la desigualdad* $4x - 5 \geq 2x + 9$.

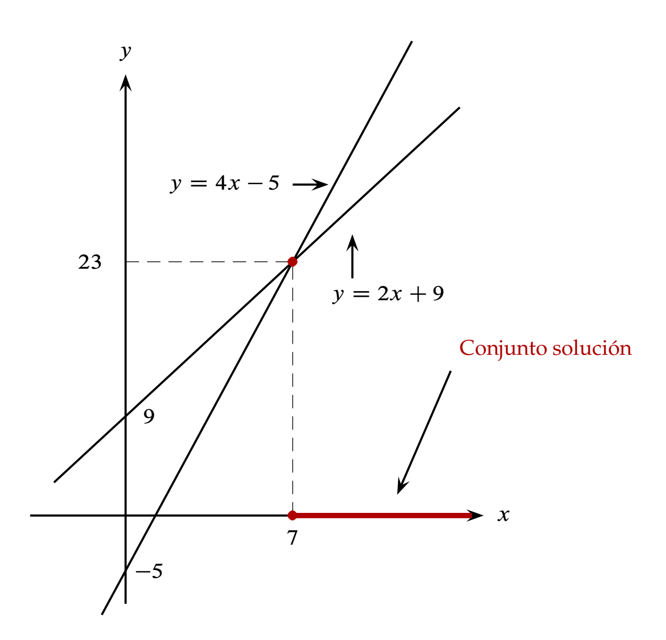
▼

$$4x - 5 \geq 2x + 9 \;\Leftrightarrow\; 4x - 2x \geq 9 + 5 \;\Leftrightarrow\; 2x \geq 14 \;\Leftrightarrow\; x \geq 7.$$

Esta última desigualdad se satisface cuando $x \in [7, +\infty)$.
Luego el conjunto solución de la desigualdad original es

$$CS = [7, +\infty)\ .$$

Geométricamente se tiene:



Podemos también resolver la desigualdad hallando la intersección de las rectas $y = 4x - 5$ & $y = 2x + 9$ y visualizando cuál de las dos está por encima de la otra.

□

Ejemplo 1.7.2 *Resolver la desigualdad* $\dfrac{5}{4}x - \dfrac{2}{3} > \dfrac{8}{3}x - \dfrac{3}{2}$.

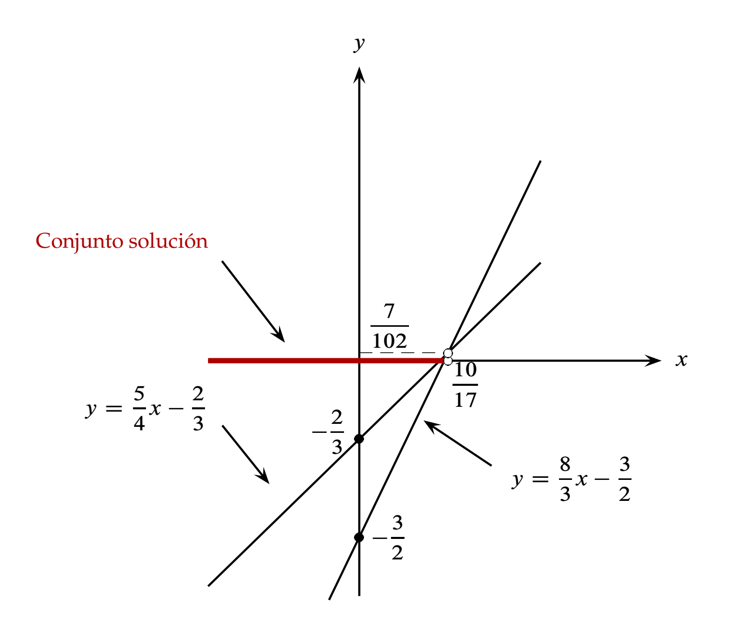
▼

$$\frac{5}{4}x-\frac{2}{3}>\frac{8}{3}x-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{4}x-\frac{8}{3}x>\frac{2}{3}-\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{17}{12}x>-\frac{5}{6} \Leftrightarrow x<\frac{10}{17}.$$

Esta última desigualdad se cumple cuando $x \in \left(-\infty, \frac{10}{17}\right)$, por lo cual el conjunto solución de la desigualdad original es

$$CS = \left(-\infty, \frac{10}{17}\right).$$

Geométricamente se tiene:



□

Ejemplo 1.7.3 *Resolver la desigualdad* $1-8x<5-8x$.

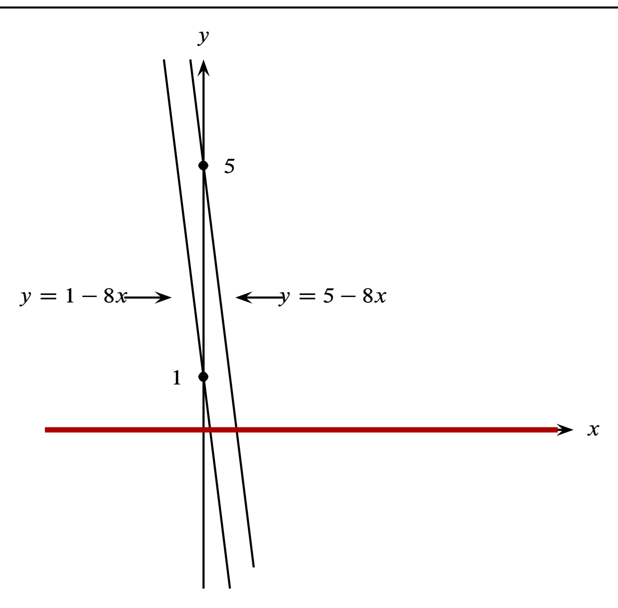
▼

$$1-8x<5-8x \Leftrightarrow -8x+8x<5-1 \Leftrightarrow 0<4.$$

Esta última desigualdad siempre se cumple, luego la desigualdad original siempre se cumple.
Por lo tanto el conjunto solución es

$$CS = \mathbb{R}.$$

Geométricamente:



Para cualquier valor de x el valor de $y = 5 - 8x$ es siempre mayor que el valor de $y = 1 - 8x$.

□

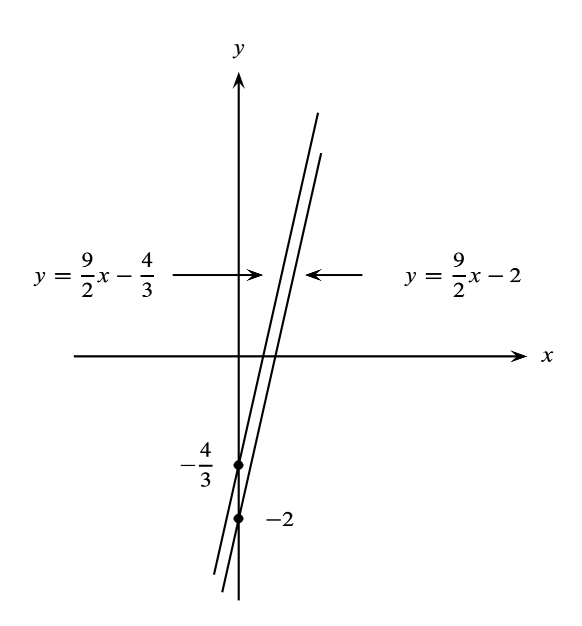
Ejemplo 1.7.4 *Resolver la desigualdad* $\frac{9}{2}x - \frac{4}{3} \le \frac{9}{2}x - 2$.

▼

$$\frac{9}{2}x - \frac{4}{3} \le \frac{9}{2}x - 2 \Leftrightarrow \frac{9}{2}x - \frac{9}{2}x \le -2 + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 0 \le -\frac{2}{3}.$$

$CS = \varnothing$, es el conjunto vacío.

Geométricamente:



Para ningún valor de x el valor de $y = \frac{9}{2}x - \frac{4}{3}$ es menor que el valor de $y = \frac{9}{2}x - 2$.

□

Ejercicios 1.7.2 *Soluciones en la página 6*

Resolver las siguientes desigualdades:

1. $1 - 2x > \frac{x}{2} - 3.$
2. $-5x - 4 \geq 3 - 6x.$
3. $\frac{-3}{4}x + \frac{5}{3} < \frac{2}{9}x - 1.$
4. $3 - 5x \leq 6 - 5x.$
5. $\frac{3}{2}x - 5 > 1 + \frac{3}{2}x.$
6. $2(x + 3) > 3(x - 1) + 6.$

Ejercicios 1.7.2 *Desigualdades del tipo: $ax+b \geq cx+d$, página 4*

1. $\left(-\infty, \dfrac{8}{5}\right)$.
2. $[7, +\infty)$.
3. $\left(\dfrac{96}{35}, +\infty\right)$.
4. $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
5. Ø, el conjunto vacío .
6. $(-\infty, 3)$.

CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.7.3 Desigualdades tipo $a_1x + b_1 \geq a_2x + b_2 \geq a_3x + b_3$

Esto quiere decir hallar los números reales x que cumplen simultáneamente las dos desigualdades:

$$a_1x + b_1 \geq a_2x + b_2 \quad \& \quad a_2x + b_2 \geq a_3x + b_3.$$

Para esto se halla el conjunto solución de cada una de las desigualdades (que son del tipo $ax + b \geq cx + d$), se intersecan los dos conjuntos solución obtenidos y esta intersección es el conjunto solución del sistema propuesto.
Geométricamente resolver el sistema de desigualdades

$$a_1x + b_1 \geq a_2x + b_2 \geq a_3x + b_3,$$

quiere decir hallar las x tales que la recta $y = a_2x + b_2$ se encuentra entre las rectas $y = a_1x + b_1$ & $y = a_3x + b_3$.

Ejemplo 1.7.1 *Resolver la desigualdad* $3x + 4 \leq x - 5 < \dfrac{2}{3}x + 1$.

▼ Esta desigualdad doble se cumple si y sólo si

$$3x + 4 \leq x - 5 \quad \& \quad x - 5 < \frac{2}{3}x + 1.$$

Resolvemos la primera desigualdad:

$$3x + 4 \leq x - 5 \Leftrightarrow 2x \leq -9 \Leftrightarrow x \leq -\frac{9}{2} \Leftrightarrow CS_1 = \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right].$$

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

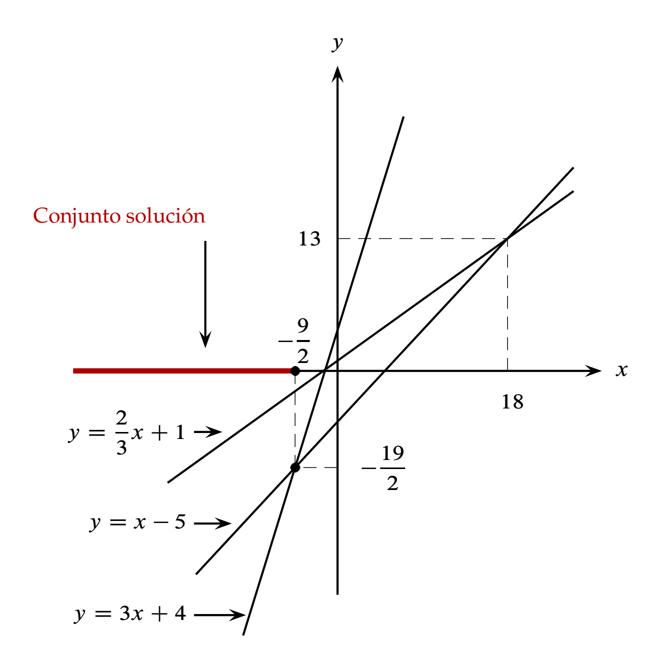
Resolvemos la segunda desigualdad:

$$x - 5 < \frac{2}{3}x + 1 \iff \frac{1}{3}x < 6 \iff x < 18 \iff CS_2 = (-\infty, 18)\,.$$

El conjunto solución CS de la desigualdad doble es

$$CS = CS_1 \bigcap CS_2 = \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right] \bigcap (-\infty, 18) = \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right].$$

Geométricamente:



También podemos resolver la desigualdad doble hallando las intersecciones de las rectas

$$y = 3x + 4, \quad y = x - 5 \ \&\ y = \frac{2}{3}x + 1.$$

y visualizando sus posiciones relativas en el plano cartesiano.

□

Ejemplo 1.7.2 *Resolver la desigualdad* $18 - 5x > 2x + 3 \geq 4 - 3x$.

▼ Esta doble desigualdad se cumple si y sólo si

$$18 - 5x > 2x + 3 \ \&\ 2x + 3 \geq 4 - 3x.$$

Resolvemos la primera desigualdad:

$$18 - 5x > 2x + 3 \iff -7x > -15 \iff x < \frac{15}{7} \iff CS_1 = \left(-\infty, \frac{15}{7}\right).$$

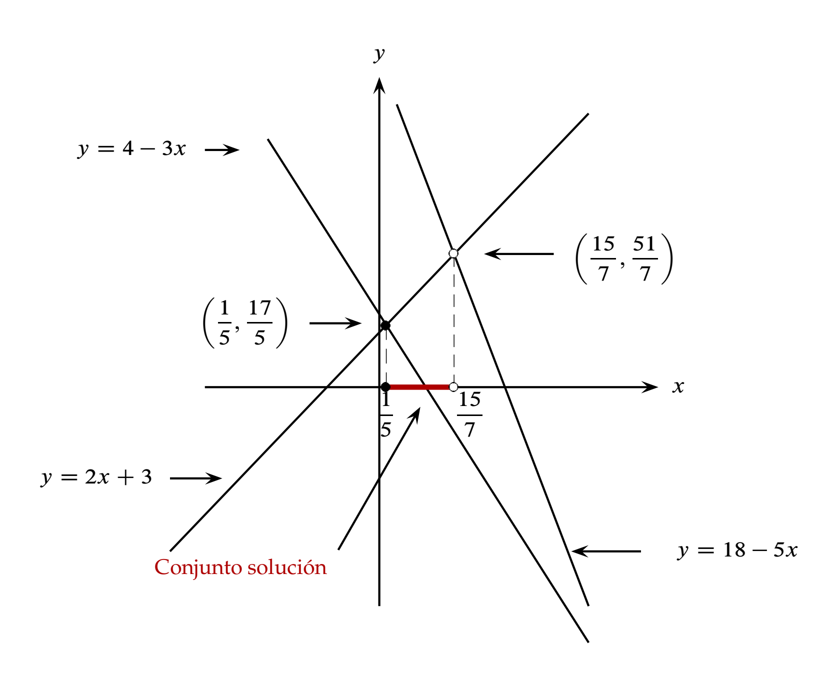
Resolvemos la segunda desigualdad:

$$2x + 3 \geq 4 - 3x \iff 5x \geq 1 \iff x \geq \frac{1}{5} \iff CS_2 = \left[\frac{1}{5}, +\infty\right).$$

El conjunto solución CS de la doble desigualdad es

$$CS = CS_1 \bigcap CS_2 = \left(-\infty, \frac{15}{7}\right) \bigcap \left[\frac{1}{5}, +\infty\right) = \left[\frac{1}{5}, \frac{15}{7}\right).$$

Geométricamente:



□

Ejemplo 1.7.3 *Resolver la desigualdad* $\frac{2}{3}x - 5 < 4 + \frac{2}{3}x < 2 - \frac{3}{4}x$.

▼ Esta doble desigualdad se cumple cuando

$$\frac{2}{3}x - 5 < 4 + \frac{2}{3}x \;\;\&\;\; 4 + \frac{2}{3}x < 2 - \frac{3}{4}x.$$

Resolvemos la primera desigualdad:

$$\frac{2}{3}x - 5 < 4 + \frac{2}{3}x \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x < 4 + 5 \;\Leftrightarrow\; 0 < 9.$$

Desigualdad que siempre se cumple (para cualquier valor de x siempre se llegará a $0 < 9$), entonces:

$$CS_1 = \mathbb{R}\,.$$

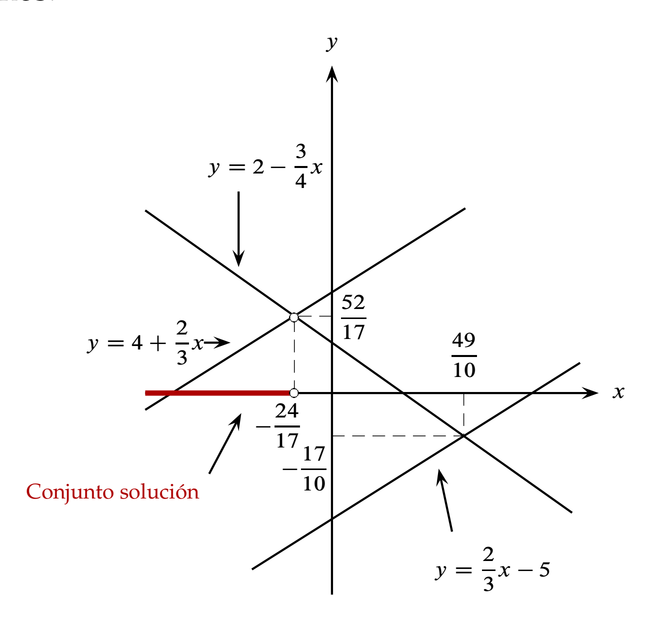
Resolvemos la segunda desigualdad:

$$4 + \frac{2}{3}x < 2 - \frac{3}{4}x \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x < 2 - 4 \;\Leftrightarrow\; \frac{17}{12}x < -2 \;\Leftrightarrow\; x < -\frac{24}{17} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; CS_2 = \left(-\infty, -\frac{24}{17}\right).$$

El conjunto solución CS de la doble desigualdad es

$$CS = CS_1 \bigcap CS_2 = \mathbb{R} \bigcap \left(-\infty, -\frac{24}{17}\right) = \left(-\infty, -\frac{24}{17}\right).$$

Geométricamente tenemos:



□

Ejemplo 1.7.4 *Resolver la desigualdad* $6 - \frac{5}{3}x > 8 - \frac{5}{3}x \geq 7 + \frac{9}{2}x.$

▼ Esta doble desigualdad se cumple cuando

$$6 - \frac{5}{3}x > 8 - \frac{5}{3}x \quad \& \quad 8 - \frac{5}{3}x \geq 7 + \frac{9}{2}x.$$

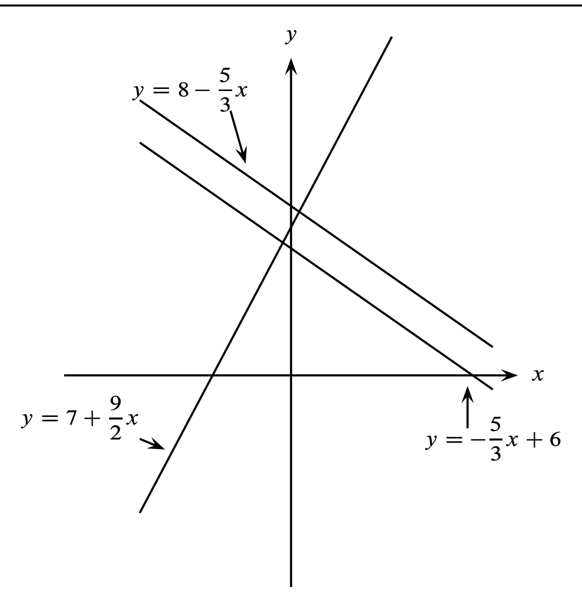
Resolvemos la primera desigualdad:

$$6 - \frac{5}{3}x > 8 - \frac{5}{3}x \Leftrightarrow -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}x > 8 - 6 \Leftrightarrow 0 > 2.$$

Desigualdad que nunca se cumple, entonces:

$$CS_1 = \varnothing.$$

Es innecesario calcular CS_2, pues como $CS_1 = \varnothing$ entonces, cualquiera que sea CS_2 resulta que $CS_2 \bigcap \varnothing = \varnothing$. Geométricamente:



□

Ejercicios 1.7.3 *Soluciones en la página 6*

Resolver las siguientes desigualdades:

1. $1 < 3x + 4 \leq 16.$
2. $-1 < 3x + 4 < 1.$
3. $1 < 3x + 4 < -1.$
4. $\dfrac{7}{2} > \dfrac{1-4x}{5} > \dfrac{3}{2}.$
5. $-5 \leq \dfrac{4-3x}{2} < 1.$
6. $6x + 5 \geq 4x + 1 > x - 2.$
7. $3 - 2x < 3x + 4 < 4 - x.$
8. $\dfrac{2}{3}x + 5 \leq 8 - \dfrac{3}{4}x \leq 7 + \dfrac{4}{5}x.$
9. $1 - 5x \leq 8 + 3x < 3x + 9.$
10. $-3x + 4 > 6 - 3x \geq 9x + 5.$
11. $3x - 4 < 9x + 2 < x - 10.$

Ejercicios 1.7.3 *Desigualdades del tipo: $a_1x + b_1 \geq a_2x + b_2 \geq a_3x + b_3$, página 5*

1. $(-1, 4]$.
2. $\left(-\frac{5}{3}, -1\right)$.
3. $\varnothing$.
4. $\left(-\frac{33}{8}, -\frac{13}{8}\right)$.
5. $\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right]$.
6. $(-1, +\infty)$.
7. $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$.
8. $\left[\frac{20}{31}, \frac{36}{17}\right]$.
9. $\left[-\frac{7}{8}, +\infty\right)$.
10. $\varnothing$.
11. $\varnothing$.

CAPÍTULO

1

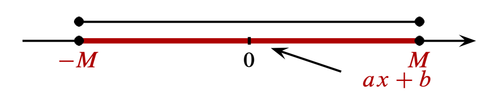
Los números reales

1[1]

1.7.4 Desigualdades tipo $|\,ax + b\,| \le M$ con $M > 0$

(Si $M < 0$, el conjunto solución es el vacío pues $|\,ax + b\,| \ge 0$, y no puede ser menor o igual que un número negativo. Si $M = 0$, la desigualdad se transforma en la ecuación $ax + b = 0$, cuya solución es $x = -\dfrac{b}{a}$ para $a \ne 0$.)

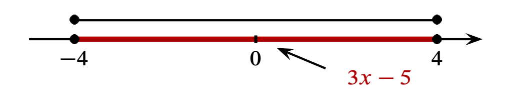
La desigualdad propuesta es equivalente a la doble desigualdad $-M \le ax + b \le M$,



y se cumple cuando: $ax + b \ge -M$ & $ax + b \le M$ (ambas del tipo anterior).

Ejemplo 1.7.1 *Resolver la desigualdad* $|\,3x - 5\,| \le 4$.

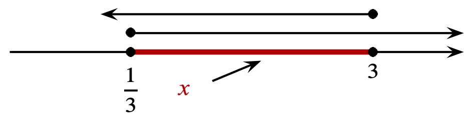
▼ Esta desigualdad se cumple cuando $-4 \le 3x - 5 \le 4$,



[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

doble desigualdad que se cumple si:

$$\begin{array}{llll} & 3x - 5 \ge -4 & \& \quad 3x - 5 \le 4 & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & 3x \ge -4 + 5 & \& \quad 3x \le 4 + 5 & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & x \ge \dfrac{1}{3} & \& \quad x \le \dfrac{9}{3} & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & x \in CS_1 = \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right) & \& \quad x \in CS_2 = (-\infty, 3]\,. & \end{array}$$



El conjunto solución es:

$$CS = CS_1 \bigcap CS_2 = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right) \bigcap (-\infty, 3] = \left[\frac{1}{3}, 3\right].$$

Observación: esta desigualdad se puede resolver de otra manera:

$$|\, 3x - 5\,| \le 4 \;\Rightarrow\; -4 \le 3x - 5 \le 4.$$

Notando que la incógnita x aparece solamente en el miembro intermedio de la doble desigualdad, procedemos a despejarla así:
Sumamos 5 a los tres miembros

$$-4 \le 3x - 5 \le 4 \;\Leftrightarrow\; -4 + 5 \le 3x - 5 + 5 \le 4 + 5 \;\Leftrightarrow\; 1 \le 3x \le 9;$$

multiplicamos por $\dfrac{1}{3}$ los tres miembros $\left(\text{con } \dfrac{1}{3} > 0\right)$

$$\frac{1}{3}(1) \le \frac{1}{3}(3x) \le \frac{1}{3}(9) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3} \le x \le \frac{9}{3} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3} \le x \le 3.$$

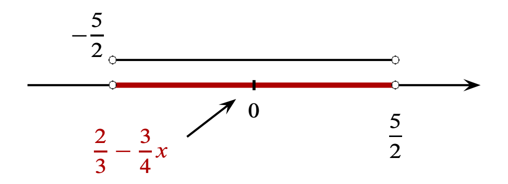
Por lo que el conjunto solución es:

$$CS = \left[\frac{1}{3}, 3\right].$$

□

Ejemplo 1.7.2 *Resolver la desigualdad* $\left|\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{4}x\right| < \dfrac{5}{2}$.

▼ Esta desigualdad se cumple cuando $-\dfrac{5}{2} < \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{4}x < \dfrac{5}{2}$,



doble desigualdad que resolvemos despejando la x.
Sumamos $\left(-\frac{2}{3}\right)$ a los tres miembros

$$-\frac{5}{2}-\frac{2}{3}<-\frac{3}{4}x<\frac{5}{2}-\frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{19}{6}<-\frac{3}{4}x<\frac{11}{6}.$$

Multiplicamos por $\left(-\frac{4}{3}\right)$ los tres miembros $\left(\text{observando que } -\frac{4}{3}<0\right)$

$$\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{19}{6}\right)>x>\left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{11}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{38}{9}>x>-\frac{22}{9} \Leftrightarrow -\frac{22}{9}<x<\frac{38}{9} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in CS=\left(-\frac{22}{9},\frac{38}{9}\right).$$

□

CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.7.5 Desigualdades tipo $|\,ax+b\,| \geq M$ con $M > 0$

(Observe que si $M \leq 0$, entonces el conjunto solución de la desigualdad propuesta es $\mathbb{R}$ pues como $|\,ax+b\,| \geq 0$ siempre, entonces $|\,ax+b\,| \geq 0 \geq M$ siempre.)
La desigualdad propuesta es equivalente a:

$$ax+b \geq M \text{ o bien a } ax+b \leq -M.$$

Por lo que hallamos el conjunto solución de cada una de estas desigualdades y su unión es el conjunto solución de la desigualdad propuesta.

Ejemplo 1.7.1 *Resolver la desigualdad* $\left|\dfrac{5}{3}x+\dfrac{3}{4}\right| > \dfrac{2}{5}$.

▼ Esta desigualdad se cumple cuando $\dfrac{5}{3}x+\dfrac{3}{4} < -\dfrac{2}{5}$ o bien $\dfrac{5}{3}x+\dfrac{3}{4} > \dfrac{2}{5}$.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Resolvemos la primera desigualdad:

$$\frac{5}{3}x + \frac{3}{4} < -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{3}x < -\frac{2}{5} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}x < -\frac{23}{20} \Leftrightarrow x < \frac{3}{5}\left(-\frac{23}{20}\right) \Leftrightarrow x < -\frac{69}{100} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow CS_1 = \left(-\infty, -\frac{69}{100}\right).$$

Resolvemos la segunda desigualdad:

$$\frac{5}{3}x + \frac{3}{4} > \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{3}x > \frac{2}{5} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}x > -\frac{7}{20} \Leftrightarrow x > \frac{3}{5}\left(-\frac{7}{20}\right) \Leftrightarrow x > -\frac{21}{100} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow CS_2 = \left(-\frac{21}{100}, +\infty\right).$$

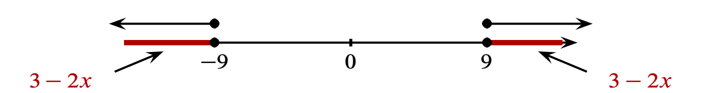
El conjunto solución CS de la desigualdad original es

$$CS = CS_1 \bigcup CS_2 = \left(-\infty, -\frac{69}{100}\right) \bigcup \left(-\frac{21}{100}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left[-\frac{69}{100}, -\frac{21}{100}\right].$$

□

Ejemplo 1.7.2 *Resolver la desigualdad* $|\,3 - 2x\,| \geq 9$.

▼ Esta desigualdad se cumple cuando $3 - 2x \leq -9$ o bien $3 - 2x \geq 9$.



Resolvemos la primera desigualdad:

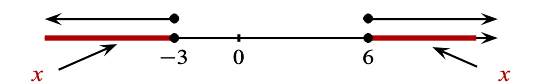
$$3 - 2x \leq -9 \Leftrightarrow -2x \leq -9 - 3 \Leftrightarrow -2x \leq -12 \Leftrightarrow x \geq \frac{-12}{-2} \Leftrightarrow x \geq 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow CS_1 = [6, +\infty).$$

Resolvemos la segunda desigualdad:

$$3 - 2x \geq 9 \Leftrightarrow -2x \geq 9 - 3 \Leftrightarrow -2x \geq 6 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{-2} \Leftrightarrow x \leq -3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow CS_2 = (-\infty, -3].$$

El conjunto solución de la desigualdad original es

$$CS = CS_1 \bigcup CS_2 = [6, +\infty) \bigcup (-\infty, -3] = (-\infty, -3] \bigcup [6, +\infty) = \mathbb{R} - (-3, 6)\,.$$



□

Ejercicios 1.7.5 *Soluciones en la página 4*

Resolver las siguientes desigualdades:

1. $|\,x - 13\,| \leq 5$.
2. $|\,2x + 5\,| < 3$.
3. $|\,x + 4\,| \geq 6$.
4. $|\,3x - 1\,| > 4$.
5. $\left|\dfrac{2x + 3}{4}\right| \leq 3$.
6. $\left|\dfrac{3}{2}x - \dfrac{4}{3}\right| > 1$.
7. $|\,2 - 5x\,| \geq \dfrac{5}{2}$.
8. $\left|4 - \dfrac{2}{3}x\right| < \dfrac{6}{5}$.
9. $\left|\dfrac{5}{2} - \dfrac{3x}{4}\right| > 0$.
10. $\left|\dfrac{2}{5} + \dfrac{4x}{3}\right| \leq 0$.
11. $\left|\dfrac{2}{5} + \dfrac{4x}{3}\right| \leq -1$.
12. $\left|\dfrac{2}{5} + \dfrac{4x}{3}\right| \geq 0$.
13. $\left|\dfrac{2}{5} + \dfrac{4x}{3}\right| \geq -1$.
14. $\left|\dfrac{2}{5} + \dfrac{4x}{3}\right| < 0$.

Ejercicios 1.7.5 *Desigualdades del tipo:* $|\,ax + b\,| \geq M$ *con* $M > 0$*, página 3*

1. $[8, 18]$.
2. $(-4, -1)$.
3. $(-\infty, -10] \cup [2, +\infty) = \mathbb{R} - (-10, 2)$.
4. $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left[-1, \frac{5}{3}\right]$.
5. $\left[-\frac{15}{2}, \frac{9}{2}\right]$.
6. $\left(-\infty, \frac{2}{9}\right) \bigcup \left(\frac{14}{9}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left[\frac{2}{9}, \frac{14}{9}\right]$.
7. $\left(-\infty, -\frac{1}{10}\right] \bigcup \left[\frac{9}{10}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(-\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right)$.
8. $\left(\frac{21}{5}, \frac{39}{5}\right)$.
9. $\mathbb{R} - \left\{\frac{10}{3}\right\}$.
10. $\left\{-\frac{3}{10}\right\}$.
11. $\emptyset$.
12. $\mathbb{R}$.
13. $\mathbb{R}$.
14. $\emptyset$.

CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.7.6 Desigualdades tipo $\dfrac{ax+b}{cx+d} \geq 0$

Desde luego $cx + d \neq 0$, pues en caso contrario la desigualdad no tendría sentido. Puede suceder entonces que

1. $cx + d > 0$, o bien que
2. $cx + d < 0$.

Para resolver la desigualdad propuesta, en ambos casos suprimimos denominadores, es decir, pasamos el divisor $(cx + d)$ al otro miembro:

1. $ax + b \geq 0 \cdot (cx + d) \Leftrightarrow ax + b \geq 0$, cuando $cx + d > 0$.
2. $ax + b \leq 0 \cdot (cx + d) \Leftrightarrow ax + b \leq 0$, cuando $cx + d < 0$.

Hallaremos así el conjunto solución de cada una de las desigualdades; intersecaremos cada uno de ellos con el conjunto solución de $cx+d > 0$ en el caso 1, y con el de $cx+d < 0$ en el caso 2. La unión de las dos intersecciones así obtenidas será el conjunto solución de la desigualdad propuesta.

Desde luego que puede parecer más sencillo considerar la solución de la desigualdad

$$\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$$

de la siguiente manera:

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

1. Si $cx + d > 0$, necesariamente $ax + b \geq 0$; luego resolvemos

$$ax + b \geq 0 \ \& \ cx + d > 0$$

e intersecamos ambos conjuntos solución, lo cual será parte del conjunto solución de la desigualdad propuesta.

2. Si $cx + d < 0$ ahora $ax + b \leq 0$, por lo cual resolvemos

$$ax + b \leq 0 \ \& \ cx + d < 0$$

e intersecamos ambos conjuntos solución.

La unión de ambas intersecciones es el conjunto solución buscado.

Ejemplo 1.7.1 *Resolver la desigualdad* $\dfrac{3x+4}{2x-5} \geq 0$.

▼ Por supuesto que $2x - 5 \neq 0$.
Puede suceder entonces que $2x - 5 > 0$ o bien que $2x - 5 < 0$.

1. Si $2x - 5 > 0$, entonces $\left(\text{para que } \dfrac{3x+4}{2x-5} \geq 0\right)$ necesariamente debe suceder que $3x + 4 \geq 0$.

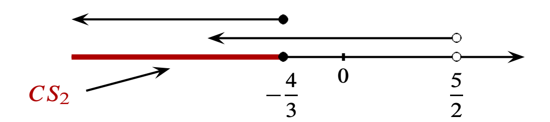
De esta forma:

$$\begin{aligned}
2x - 5 > 0 \ \& \ 3x + 4 \geq 0 &\Leftrightarrow 2x > 5 \ \& \ 3x \geq -4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \ \& \ x \geq -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \ \& \ x \in \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right) \cap \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) = \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow CS_1 = \left(\frac{5}{2}, +\infty\right).
\end{aligned}$$

2. Si $2x - 5 < 0$, entonces $\left(\text{para que } \dfrac{3x+4}{2x-5} \geq 0\right)$ necesariamente debe suceder que $3x + 4 \leq 0$.

Y ahora,

$$\begin{aligned}
2x - 5 < 0 \ \& \ 3x + 4 \leq 0 &\Leftrightarrow 2x < 5 \ \& \ 3x \leq -4 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x < \frac{5}{2} \ \& \ x \leq -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \ \& \ x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cap \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] = \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow CS_2 = \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right].
\end{aligned}$$



Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad $\dfrac{3x+4}{2x-5} \geq 0$ es

$$CS = CS_1 \bigcup CS_2 = \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \bigcup \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] =$$
$$= \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \bigcup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{2}\right].$$

□

Ejemplo 1.7.2 *Resolver la desigualdad* $\dfrac{5x-4}{3x+2} < 0$.

▼ Consideramos que $3x + 2 \neq 0$.
Puede ser entonces que $3x + 2 < 0$ o bien que $3x + 2 > 0$.

1. Si $3x + 2 < 0$, entonces $\left(\text{para que } \dfrac{5x-4}{3x+2} < 0\right)$ necesariamente debe suceder que $5x - 4 > 0$.

   Vemos así

$$\begin{aligned} 3x + 2 < 0 \;\&\; 5x - 4 > 0 &\Leftrightarrow 3x < -2 \;\&\; 5x > 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x < -\frac{2}{3} \;\&\; x > \frac{4}{5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \;\&\; x \in \left(\frac{4}{5}, +\infty\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cap \left(\frac{4}{5}, +\infty\right) = \varnothing \Rightarrow \\ &\Rightarrow CS_1 = \varnothing. \end{aligned}$$

2. Si $3x + 2 > 0$, entonces $\left(\text{para que } \dfrac{5x-4}{3x+2} < 0\right)$ necesariamente debe suceder que $5x - 4 < 0$.

   Tenemos

$$\begin{aligned} 3x + 2 > 0 \;\&\; 5x - 4 < 0 &\Leftrightarrow 3x > -2 \;\&\; 5x < 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x > -\frac{2}{3} \;\&\; x < \frac{4}{5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right) \;\&\; x \in \left(-\infty, \frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow CS_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de $\dfrac{5x-4}{3x+2} < 0$ es

$$CS = CS_1 \bigcup CS_2 = \varnothing \bigcup \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right).$$

□

Ejemplo 1.7.3 *Resolver la desigualdad* $\dfrac{-1}{4x+3} > 0$.

▼ Notamos que el numerador (-1) de la fracción $\dfrac{-1}{4x+3}$ siempre es negativo $(-1 < 0)$.
Entonces:

$$\frac{-1}{4x+3} > 0 \;\Leftrightarrow\; 4x+3 < 0 \;\Leftrightarrow\; 4x < -3 \;\Leftrightarrow\; x < -\frac{3}{4}.$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad es

$$CS = \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right).$$

□

CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.7.7 Desigualdades tipo $\dfrac{ax+b}{cx+d} \geq k$

Podemos suprimir el denominador $cx + d \neq 0$ pasándolo al segundo miembro, en cuyo caso tendríamos que resolver desigualdades ya conocidas o pasar k al primer miembro y efectuar la operación indicada:

$$\frac{ax+b}{cx+d} - k > 0,$$

con la cual obtendríamos una desigualdad equivalente de un tipo ya conocido.

Ejemplo 1.7.1 *Resolver la desigualdad* $\dfrac{2x+3}{4x-5} \leq 6$.

▼ Resolveremos esta desigualdad expresándola como una desigualdad de un tipo ya conocido.

$$\frac{2x+3}{4x-5} \leq 6 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{4x-5} - 6 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3-6(4x-5)}{4x-5} \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x+3-24x+30}{4x-5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-22x+33}{4x-5} \leq 0.$$

Considerando que $4x - 5 \neq 0$, puede suceder entonces que $4x - 5 < 0$ o bien que $4x - 5 > 0$.

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

1. Si $4x-5<0$, entonces necesariamente $-22x+33\geq 0$:

$$4x-5<0\ \&\ -22x+33\geq 0 \Leftrightarrow 4x<5\ \&\ -22x\geq -33 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x<\frac{5}{4}\ \&\ x\leq \frac{-33}{-22} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x<\frac{5}{4}\ \&\ x\leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x<\frac{5}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in CS_1=\left(-\infty,\frac{5}{4}\right).$$

2. Si $4x-5>0$, entonces necesariamente $-22x+33\leq 0$:

$$4x-5>0\ \&\ -22x+33\leq 0 \Leftrightarrow 4x>5\ \&\ -22x\leq -33 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x>\frac{5}{4}\ \&\ x\geq \frac{-33}{-22} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x>\frac{5}{4}\ \&\ x\geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x\geq\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in CS_2=\left[\frac{3}{2},+\infty\right).$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad original es

$$CS=CS_1\bigcup CS_2=\left(-\infty,\frac{5}{4}\right)\bigcup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)=\mathbb{R}-\left[\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right).$$

Observación. Esta desigualdad también se puede resolver aplicando el procedimiento que se utiliza al resolver una ecuación, es decir, trasladar el denominador $(4x-5)$ del primer miembro al segundo pero como factor, con lo cual obtenemos una desigualdad ya conocida.
¿Puede intentarlo? Sería un buen ejercicio.

□

Ejemplo 1.7.2 *Resolver la desigualdad* $\dfrac{2x+3}{4x-5}\geq -6$.

▼ Resolveremos esta desigualdad aplicando la observación hecha al final del ejemplo 1.7.1. Esto es, trasladando el denominador $(4x-5)$ del primer miembro al segundo como factor.
Para lograr lo anterior, es necesario multiplicar por el denominador $(4x-5)$ ambos miembros de la desigualdad; considerando, por supuesto, que $4x-5\neq 0$.
Ya que $4x-5\neq 0$, puede suceder entonces que $4x-5<0$ o bien que $4x-5>0$.

1. Si $4x-5<0$, entonces (la desigualdad se invierte):

$$\frac{2x+3}{4x-5}\geq -6 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{4x-5}(4x-5)\leq -6(4x-5) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x+3\leq -24x+30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x+24x\leq 30-3 \Leftrightarrow 26x\leq 27 \Leftrightarrow x\leq\frac{27}{26}.$$

Pero $4x-5<0 \Leftrightarrow 4x<5 \Leftrightarrow x<\dfrac{5}{4}$.

Se debe cumplir entonces que $x<\dfrac{5}{4}\ \&\ x\leq\dfrac{27}{26}$.

Desigualdades que se cumplen ambas cuando $x \leq \dfrac{27}{26}$:

Se tiene en este caso que

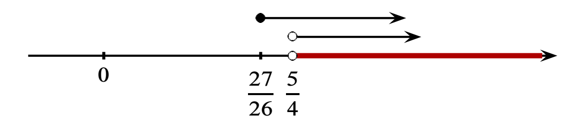
$$CS_1 = \left(-\infty, \frac{27}{26}\right].$$

2. Si $4x - 5 > 0$, entonces (la desigualdad no cambia de sentido):

$$\frac{2x+3}{4x-5} \geq -6 \ \Leftrightarrow\ \frac{2x+3}{4x-5}(4x-5) \geq -6(4x-5) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2x + 3 \geq -24x + 30 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2x + 24x \geq 30 - 3 \ \Leftrightarrow\ 26x \geq 27 \ \Leftrightarrow\ x \geq \frac{27}{26}.$$

Pero $4x - 5 > 0 \ \Leftrightarrow\ 4x > 5 \ \Leftrightarrow\ x > \dfrac{5}{4}$.

Se debe cumplir que $x > \dfrac{5}{4}$ & $x \geq \dfrac{27}{26}$.



Desigualdades que se cumplen ambas cuando $x > \dfrac{5}{4}$.

Se tiene en este caso que

$$CS_2 = \left(\frac{5}{4}, +\infty\right).$$

El conjunto solución CS de la desigualdad original $\dfrac{2x+3}{4x-5} \geq -6$ es la unión de CS_1 y CS_2:

$$CS = CS_1 \bigcup CS_2 = \left(-\infty, \frac{27}{26}\right] \bigcup \left(\frac{5}{4}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(\frac{27}{26}, \frac{5}{4}\right].$$

Un buen ejercicio sería resolver esta misma desigualdad aplicando el procedimiento utilizado en el ejemplo 1.7.1. ¿Puede hacerlo?

□

Ejercicios 1.7.7 *Soluciones en la página 5*

Resolver las siguientes desigualdades:

1. $\dfrac{5+3x}{4x+5} > 1.$

2. $\dfrac{2}{3-5x} \leq -\dfrac{3}{5}.$

3. $\dfrac{6x-5}{x-2} < 7.$

4. $\dfrac{-2}{x-4} < 7\,.$

5. $\dfrac{x}{x-1} > \dfrac{1}{4}.$

6. $\dfrac{2x+3}{x+8} < 5.$

7. $\dfrac{3-x}{4x+1} \geq 4.$

8. $\dfrac{2x-9}{x-1} \geq 8.$

9. $\dfrac{2+3x}{3-4x} \leq 2.$

10. $\dfrac{2}{x} - 5 < \dfrac{3}{x} + 2.$

Ejercicios 1.7.7 *Desigualdades del tipo:* $\dfrac{ax+b}{cx+d} \geq k$, *página 3*

1. $\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$.
2. $\left(\frac{3}{5}, \frac{19}{15}\right]$.
3. $(-\infty, 2) \bigcup (9, +\infty) = \mathbb{R} - [2, 9]$.
4. $\left(-\infty, \frac{26}{7}\right) \bigcup (4, +\infty) = \mathbb{R} - \left[\frac{26}{7}, 4\right]$.
5. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \bigcup (1, +\infty) = \mathbb{R} - \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.
6. $\left(-\infty, -\frac{37}{3}\right) \bigcup (-8, +\infty) = \mathbb{R} - \left[-\frac{37}{3}, -8\right]$.
7. $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{17}\right]$.
8. $\left[-\frac{1}{6}, 1\right)$.
9. $\left(-\infty, \frac{4}{11}\right] \bigcup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(\frac{4}{11}, \frac{3}{4}\right]$.
10. $\left(-\infty, -\frac{1}{7}\right) \bigcup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \left[-\frac{1}{7}, 0\right]$.

CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.7.8 Desigualdades tipo $ax^2 + bx + c \geq 0$ con $a \neq 0$

Se considera $a \neq 0$ ya que $a = 0$ nos daría una desigualdad del tipo $bx + c \geq 0$ estudiado.
Para resolver en general la desigualdad $ax^2 + bx + c \geq 0$, nos apoyaremos en las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, que están dadas por la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Aquí, de acuerdo con el signo del discriminante $b^2 - 4ac$, pueden ocurrir tres casos:

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces

   $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos raíces reales y distintas que son

   $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ \& \ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ donde } x_1 \neq x_2;$$
   $$x_1 > x_2 \text{ que se tiene cuando } a > 0 \quad \text{así como} \quad x_1 < x_2 \text{ cuando } a < 0.$$

   Por lo tanto:

   $$ax^2 + bx + c \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0 \;\Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow\; (x - x_1)(x - x_2) \geq 0 \text{ si } a > 0 \text{ o bien } (x - x_1)(x - x_2) \leq 0 \text{ si } a < 0.$$

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

- Consideremos $a > 0$.

$ax^2 + bx + c \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (x - x_1)(x - x_2) \geq 0$ se cumple si:

$x - x_1 \geq 0$ & $x - x_2 \geq 0$ o bien $x - x_1 \leq 0$ & $x - x_2 \leq 0$.

A su vez estas desigualdades se cumplen si:

$x \geq x_1$ & $x \geq x_2$ o bien $x \leq x_1$ & $x \leq x_2$.

O en términos de intervalos (recuerde que $x_1 > x_2$).

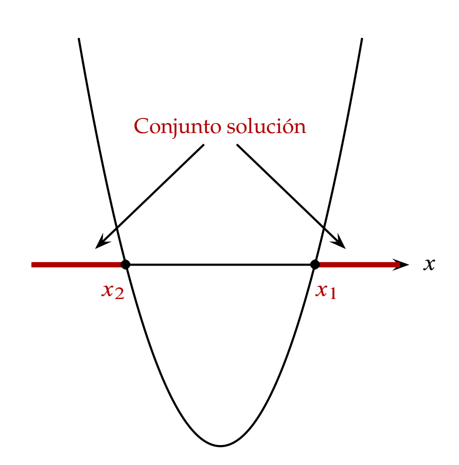
$x \in [x_1, +\infty)$ & $x \in [x_2, +\infty)$ o bien $x \in (-\infty, x_1]$ & $x \in (-\infty, x_2]$;

$x \in [x_1, +\infty)$ o bien $x \in (-\infty, x_2]$.

Por lo que el conjunto solución de $ax^2 + bc + c \geq 0$ (para el caso $a > 0$) es

$$CS = (-\infty, x_2] \bigcup [x_1, +\infty) = \mathbb{R} - (x_2, x_1) \ .$$

Tenemos



- Consideremos $a < 0$.

$ax^2 + bx + c \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (x - x_1)(x - x_2) \leq 0$ se cumple si:

$x - x_1 \geq 0 \;\&\; x - x_2 \leq 0$ o bien $x - x_1 \leq 0 \;\&\; x - x_2 \geq 0.$

A su vez estas desigualdades se cumplen si:

$x \geq x_1 \;\&\; x \leq x_2$ o bien $x \leq x_1 \;\&\; x \geq x_2.$

O en términos de intervalos (recuerde que $x_1 < x_2$).

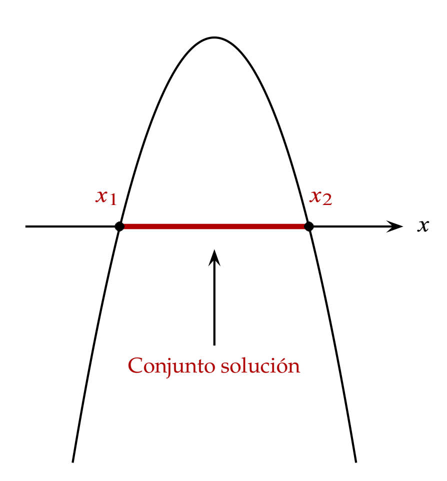
$x \in [x_1, +\infty) \;\&\; x \in (-\infty, x_2]$ o bien $x \in (-\infty, x_1] \;\&\; x \in [x_2, +\infty)$;

$x \in [x_1, +\infty) \bigcap (-\infty, x_2] = [x_1, x_2]$ o bien $x \in (-\infty, x_1] \bigcap [x_2, +\infty) = \varnothing.$

Luego, el conjunto solución de $(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$ que es el de $ax^2 + bx + c \geq 0$ (para el caso $a < 0$) es

$$CS = [x_1, x_2] \bigcup \varnothing = [x_1, x_2] \,.$$

Tenemos



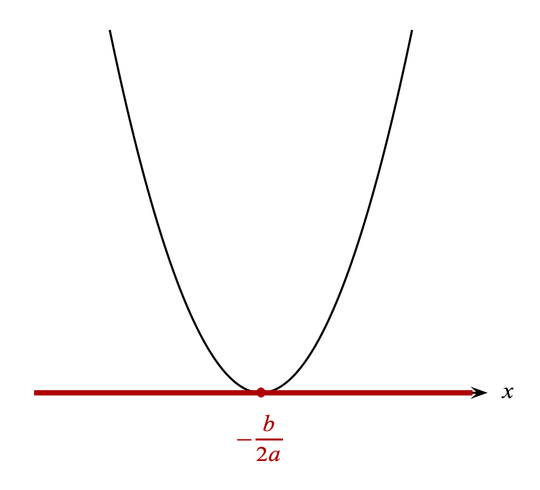
2. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces

$ax^2 + bx + c = 0$ tiene una única raíz real (doble): $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ y además

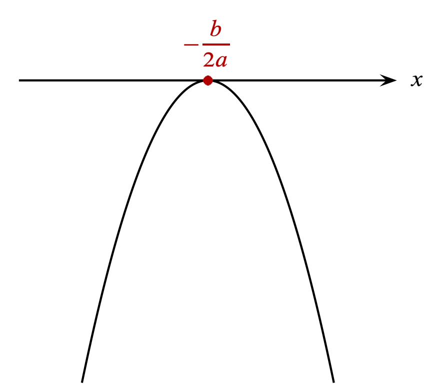
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 .$$

Como $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$:

- Si $a > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ y su conjunto solución es $\mathbb{R}$. Tenemos



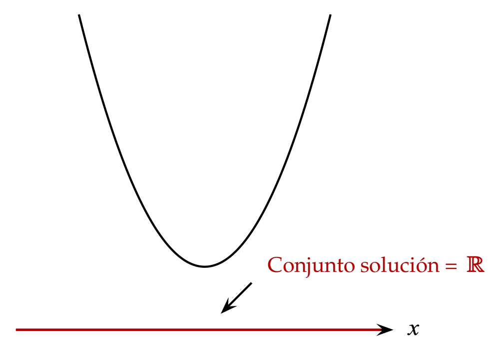
- Si $a < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, sólo se cumplirá $ax^2 + bx + c \geq 0$ cuando sea $ax^2 + bx + c = 0$, es decir, cuando $x = -\dfrac{b}{2a}$, por lo que el conjunto solución es $\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$, que consta de un solo punto.



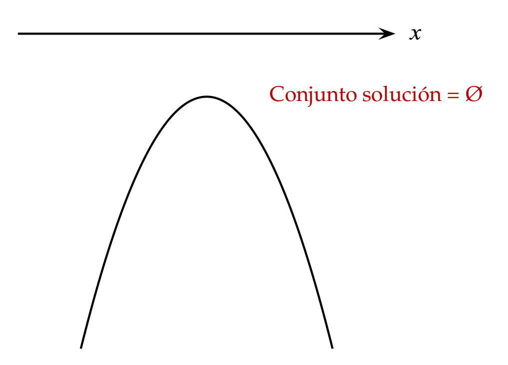
3. Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces

   $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene raíz real alguna. Es decir, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $ax^2 + bx + c \neq 0$ por lo que sucede uno de los casos siguientes:

   a. La cuadrática siempre es positiva, en cuyo caso el conjunto solución es $\mathbb{R}$ si, por ejemplo, el valor de $ax^2 + bx + c$ para $x = 0$ que es $c > 0$.



b. La cuadrática nunca es positiva, entonces el conjunto solución es $\emptyset$, si $c < 0$ (no existen soluciones).



Ejemplo 1.7.1 *Resolver la desigualdad* $2x^2 + x - 6 \geq 0$.

▼ Primero resolvemos la ecuación $2x^2 + x - 6 = 0$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4}.$$

Aquí aparecen dos raíces reales diferentes que son

$$x_1 = \frac{-1+7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \;\&\; x_2 = \frac{-1-7}{4} = \frac{-8}{4} = -2.$$

Entonces la factorización del trinomio cuadrático es

$$2x^2 + x - 6 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)[x - (-2)] = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+2).$$

Luego resolvemos la desigualdad:

$$2x^2 + x - 6 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+2) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x - \frac{3}{2}\right)(x+2) \geq 0, \text{(ya que } 2 > 0) \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\; x - \frac{3}{2} \leq 0 \;\&\; x + 2 \leq 0 && \text{o bien} \quad x - \frac{3}{2} \geq 0 \;\&\; x + 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; x \leq \frac{3}{2} \;\&\; x \leq -2 && \text{o bien} \quad x \geq \frac{3}{2} \;\&\; x \geq -2 \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \;\&\; x \in (-\infty, -2] && \text{o bien} \quad x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \;\&\; x \in [-2, +\infty) \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \bigcap (-\infty, -2] && \text{o bien} \quad x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \bigcap [-2, +\infty) \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -2] && \text{o bien} \quad x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \;\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; x \in (-\infty, -2] \bigcup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

Por lo tanto el conjunto solución de la desigualdad $2x^2 + x - 6 \geq 0$ es

$$CS = (-\infty, -2] \bigcup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(-2, \frac{3}{2}\right).$$

□

Ejemplo 1.7.2 *Resolver la desigualdad* $4x^2 - 4x + 1 > 0$.

▼ Primero resolvemos la ecuación $4x^2 - 4x + 1 = 0$:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(1)}}{2(4)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Aquí se tiene una única raíz real (doble) que es $x = \dfrac{1}{2}$.

Entonces la factorización del trinomio cuadrático es

$$4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Lo cual se puede ver directamente pues

$$4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

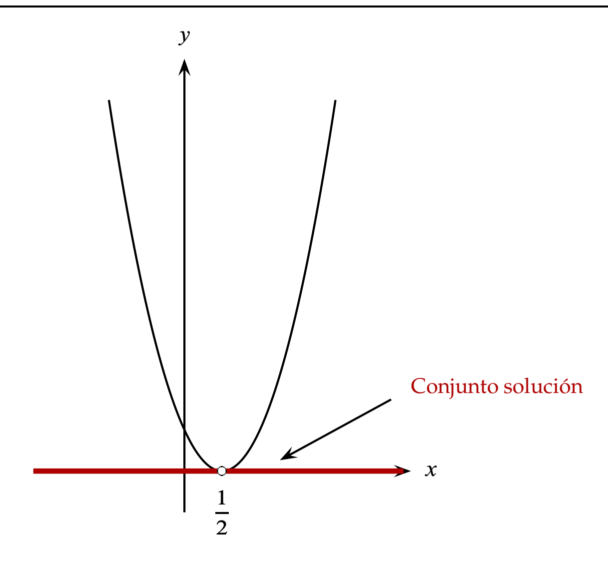
Luego resolvemos la desigualdad:

$$4x^2 - 4x + 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \text{ ya que } 4 > 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x - \frac{1}{2} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto el conjunto solución es

$$CS = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$



□

Ejemplo 1.7.3 *Resolver la desigualdad* $x^2 + 2x + 2 \le 0$.

▼ Resolvemos la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}.$$

Aquí no se tienen raíces reales, ya que $\sqrt{-4}$ no es un número real. Esto nos indica que para ningún número real x sucede la igualdad $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Tenemos entonces, como veremos posteriormente, que para cada número real x se cumple

$$x^2 + 2x + 2 < 0 \text{ o bien } x^2 + 2x + 2 > 0.$$

Como $x = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 0^2 + 2(0) + 2 = 2 \Rightarrow$

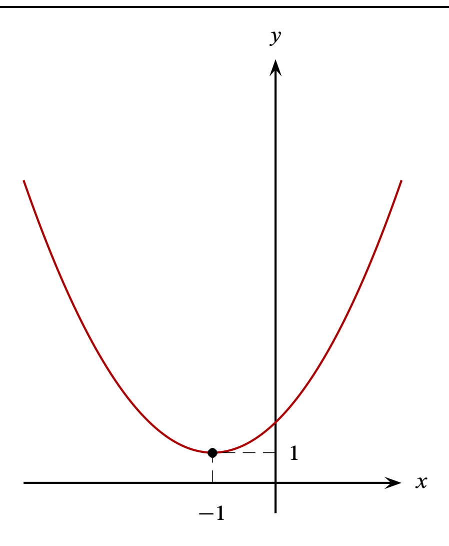
$$\Rightarrow \text{ siempre se cumple que } x^2 + 2x + 2 > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{ nunca se cumple que } x^2 + 2x + 2 \le 0.$$

El conjunto solución de $x^2 + 2x + 2 \le 0$ es:

$$CS = \emptyset.$$

También se puede ver directamente pues

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1 > 0 \text{ siempre.}$$



□

Ejemplo 1.7.4 *Resolver la desigualdad* $x^2 - 2x - 15 < 0$.

▼ Resolvemos la ecuación $x^2 - 2x - 15 = 0$:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}.$$

Aquí se tienen dos raíces reales diferentes, que son

$$x_1 = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ y } x_2 = \frac{2-8}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Entonces, la factorización del trinomio cuadrático es

$$x^2 - 2x - 15 = (x-5)[x-(-3)] = (x-5)(x+3).$$

La cual también podemos hacer directamente.
Resolvemos la desigualdad:

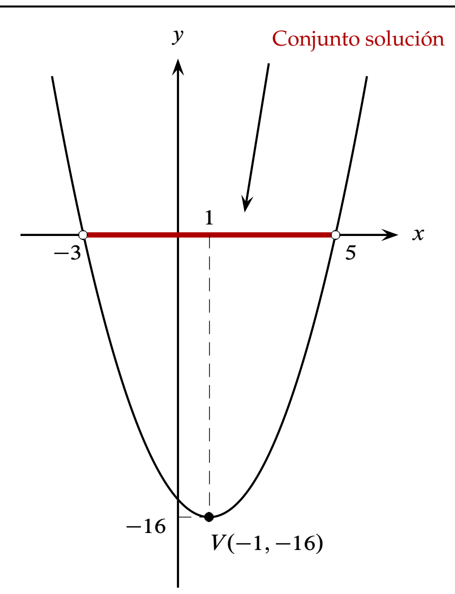
$$x^2 - 2x - 15 < 0 \;\Leftrightarrow\; (x-5)(x+3) < 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} \Leftrightarrow\; x - 5 < 0 \;\&\; x + 3 > 0 & \text{o bien} & x - 5 > 0 \;\&\; x + 3 < 0 \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; x < 5 \;\&\; x > -3 & \text{o bien} & x > 5 \;\&\; x < -3 \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; x \in (-\infty, 5) \;\&\; x \in (-3, +\infty) & \text{o bien} & x \in (5, +\infty) \;\&\; x \in (-\infty, -3) \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; x \in (-3, 5) & \text{o bien} & x \in (5, +\infty) \bigcap (-\infty, -3) = \varnothing \;\Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow\; x \in (-3, 5) \bigcup \varnothing \;\Rightarrow\; x \in (-3, 5)\,.$$

Por lo tanto, el conjunto solución es el intervalo

$$CS = (-3, 5)\ .$$



□

Solución geométrica

$y = ax^2 + bx + c$ es una parábola de eje paralelo al de las y, que dirige su concavidad hacia arriba si $a > 0$ o bien hacia abajo si $a < 0$.
El vértice de esta parábola se puede determinar escribiendo

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c.$$

Completando el binomio $\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$ de forma que sea un trinomio cuadrado perfecto y restando lo mismo que sumamos, para no alterar la igualdad, tenemos que:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} &y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2, \end{aligned}$$

que es la ecuación de una parábola con eje vertical y vértice en el punto de coordenadas:

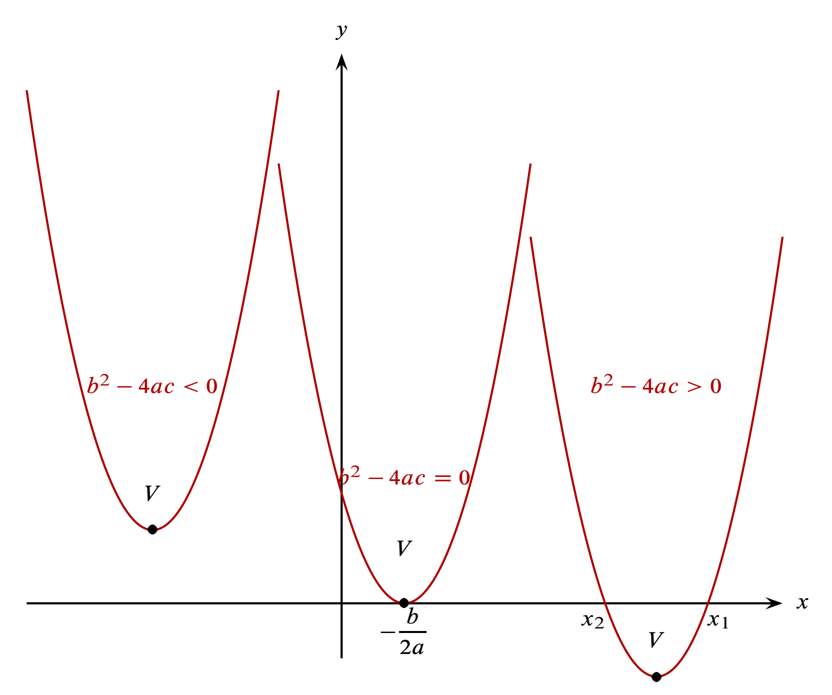
$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba y si $a < 0$, se abre hacia abajo.
Este vértice puede estar encima del eje de las x, en el eje x o debajo, dependiendo si

$$c - \frac{b^2}{4a} >, =, \text{ o bien } < 0,$$

por lo que las parábolas quedan de la siguiente forma:

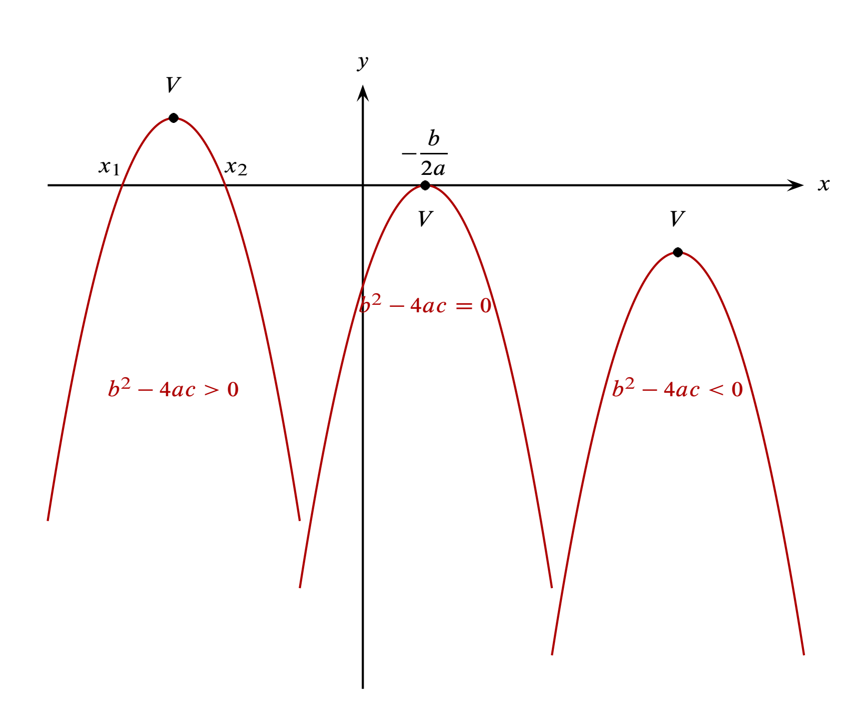
1. $a > 0$.



   Y el conjunto solución de $ax^2 + bx + c \geq 0$ por lo tanto es $\mathbb{R}$ en los dos primeros casos, es decir, si $b^2 - 4ac \leq 0$.

   El conjunto solución es $(-\infty, x_2] \bigcup [x_1, +\infty)$ si $b^2 - 4ac > 0$ donde $x_2 < x_1$ son las dos soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$.

2. $a < 0$.



En el primer caso si $b^2 - 4ac > 0$, el conjunto solución es $[x_1, x_2]$, donde nuevamente x_1 & x_2 son las dos raíces reales y distintas de $ax^2 + bx + c = 0$.

Si $b^2 - 4ac = 0$, el conjunto solución consta de un solo punto $\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.

Y si $b^2 - 4ac < 0$, el conjunto solución de $ax^2 + bx + c \geq 0$ es el conjunto $\emptyset$.

Ejemplo 1.7.5 *Resolver geométricamente la desigualdad* $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$.

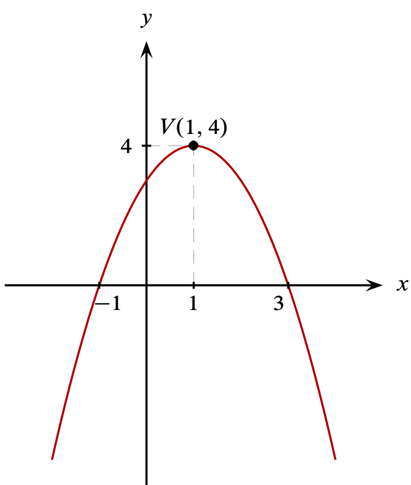
▼ Notamos que $y = -x^2 + 2x + 3$ es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde $a = -1$, $b = 2$ & $c = 3$. Aquí $a < 0$ ya que $a = -1$, por lo cual $y = -x^2 + 2x + 3$ es una parábola de eje vertical que se abre hacia abajo a partir de su vértice V.

$$y = -x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x) + 3 = -(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 3;$$
$$y = -(x^2 - 2x + 1) + 1 + 3 = -(x - 1)^2 + 4;$$
$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \;\&\; x = 1 \Rightarrow y = 4, \text{ por lo que } V(1, 4) \text{ es el vértice.}$$

Visualizamos la parábola, en el plano cartesiano, abriéndose hacia abajo desde el vértice $V(1, 4)$. Vemos la conveniencia de resolver la ecuación $-x^2 + 2x + 3 = 0$.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)(3)}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-2 + 4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \text{ y } x_2 = \frac{-2 - 4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Se tiene entonces una parábola donde $y \geq 0$, cuando $-1 \leq x \leq 3$; es decir $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$, cuando $-1 \leq x \leq 3$.



Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad original es

$$CS = [-1, 3] \,.$$

□

Desigualdades tipo $a_1x^2 + b_1x + c_1 \ge a_2x^2 + b_2x + c_2$ con $a_1 \ne a_2$

(Si $a_1 = a_2$, trasponiendo los términos al primer miembro y reduciéndolos, nos quedaría una desigualdad del tipo $bx + c \ge 0$, si $b_1 \ne b_2$. Si también $b_1 = b_2$, nos queda la desigualdad $c_1 \ge c_2$ que puede ser verdadera o no; en el primer caso el conjunto solución sería $\mathbb{R}$ y en el segundo $\emptyset$.)
Transponiendo los términos, nuestra desigualdad la podemos escribir de la forma

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 - (a_2x^2 + b_2x + c_2) \ge 0.$$

Esto es

$$(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2) \ge 0.$$

Que es del tipo $ax^2 + bx + c \ge 0$ anterior.

Ejemplo 1.7.6 *Resolver la desigualdad* $3x^2 - 4x + 5 \le 9x - 3x^2 + 10$.

▼

$$3x^2 - 4x + 5 \le 9x - 3x^2 + 10 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 4x + 5 - 9x + 3x^2 - 10 \le 0 \;\Leftrightarrow\; 6x^2 - 13x - 5 \le 0.$$

Resolvemos la ecuación $6x^2 - 13x - 5 = 0$.

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(6)(-5)}}{2(6)} = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 120}}{12} =$$
$$= \frac{13 \pm \sqrt{289}}{12} = \frac{13 \pm 17}{12} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{13 + 17}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2} \text{ y } x_2 = \frac{13 - 17}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

La factorización del trinomio cuadrático es

$$6x^2 - 13x - 5 = 6\left(x - \frac{5}{2}\right)\left[x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = 6\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right).$$

Resolvemos la desigualdad

$$6x^2 - 13x - 5 \le 0 \;\Leftrightarrow\; 6\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \le 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \le 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x - \frac{5}{2} \le 0 \;\&\; x + \frac{1}{3} \ge 0 \quad \text{o bien} \quad x - \frac{5}{2} \ge 0 \;\&\; x + \frac{1}{3} \le 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \le \frac{5}{2} \;\&\; x \ge -\frac{1}{3} \quad \text{o bien} \quad x \ge \frac{5}{2} \;\&\; x \le -\frac{1}{3} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right] \;\&\; x \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right) \quad \text{o bien} \quad x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right) \;\&\; x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right] \bigcap \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right) \quad \text{o bien} \quad x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \bigcap \left[\frac{5}{2}, +\infty\right) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right] \quad \text{o bien} \quad x \in \emptyset \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right] \bigcup \varnothing \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right].$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad original es

$$CS = \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right].$$

□

Ejemplo 1.7.7 *Resolver la desigualdad* $2x^2 - 3x + 4 > x^2 - 5x + 2$.

▼

$$2x^2 - 3x + 4 > x^2 - 5x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4 - x^2 + 5x - 2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 > 0.$$

Esta desigualdad, como consecuencia de lo que vimos en el ejemplo 1.7.3 página 7 (que $x^2+2x+2 \leq 0$ nunca se cumple), siempre se cumple. Por lo tanto el conjunto solución de la desigualdad original es

$$CS = \mathbb{R}.$$

□

Geométricamente resolver la desigualdad:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 \geq a_2x^2 + b_2x + c_2, \text{ con } a_1 \neq a_2$$

quiere decir hallar las x tales que la parábola $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ no está abajo de la parábola $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$.

Ejemplo 1.7.8 *Geométricamente, resolver la desigualdad:*

$$2 - 2x - 4x^2 \geq 2x^2 + 9x + 5.$$

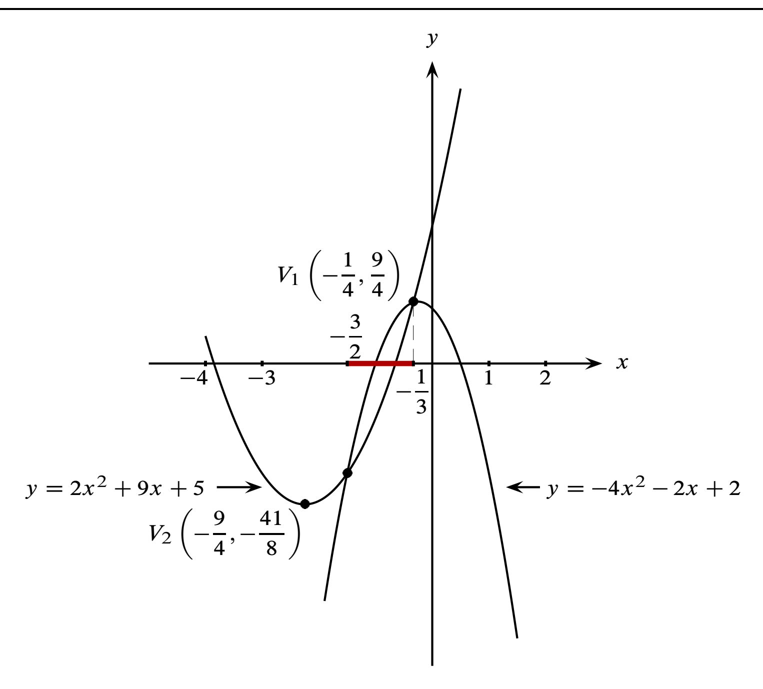
▼ Completando un trinomio cuadrado perfecto en cada caso, determinamos el vértice de cada parábola.

$$-4x^2 - 2x + 2 = -4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) + 2 + \frac{1}{4} = -4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{4};$$
$$2x^2 + 9x + 5 = 2\left(x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{81}{16}\right) + 5 - \frac{81}{8} = 2\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{41}{8}.$$

La parábola $y = -4x^2 - 2x + 2$ se abre hacia abajo (por ser $a = -4 < 0$) a partir de su vértice $V_1\left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$ y la parábola $y = 2x^2 + 9x + 5$ se abre hacia arriba (por ser $a = 2 > 0$) a partir de su vértice $V_2\left(-\frac{9}{4}, -\frac{41}{8}\right)$.

Las parábolas se intersecan cuando $2x^2+9x+5 = -4x^2-2x+2$. Esto sucede cuando $6x^2+11x+3 = 0$, es decir, cuando

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 72}}{12} = \frac{-11 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-11 \pm 7}{12} = \begin{cases} -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$



Conjunto solución:

$$CS = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right] ,$$

donde $-\frac{3}{2}$ y $-\frac{1}{3}$ son las abscisas de los puntos de intersección de las dos parábolas: $y = 2-2x-4x^2$; $y = 2x^2 + 9x + 5$ y en el intervalo $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right]$ la primera no está abajo de la segunda.

□

Ejercicios 1.7.8 *Soluciones en la página 15*

Resolver las siguientes desigualdades:

1. $x^2 - 5x + 4 > 0$.
2. $x^2 - 4x - 12 < 0$.
3. $9x^2 - 4 \geq 0$.
4. $1 - x^2 \leq 0$.
5. $2x^2 + 5x + 2 > 0$.
6. $2x^2 + 5x - 3 < 0$.
7. $3x^2 - x - 2 \geq 0$.
8. $3x^2 + 7x - 6 \leq 0$.
9. $2x^2 + 9x + 5 \leq 2 - 2x - 4x^2$.
10. $-3x^2 + 3x - 2 > 4x - 9x^2 - 1$.
11. $4x^2 - 2x + 1 \geq 10x^2 + 3x - 5$.
12. $2x^2 + 3x - 4 < x^2 + x - 6$.
13. $2x^2 - 3x < x^2 \leq 2x^2 - 4$.
14. $2x^2 + 7x - 5 \leq 2x - 2$.
15. $\dfrac{3x^2 - 27}{5 - 3x} \geq 0$.
16. $x^2 + 3x - 6 \geq 2$.
17. $3x - 3x^2 - 2 \geq 4x - 9x^2 - 1$.

Ejercicios 1.7.8 *Desigualdades del tipo: $ax^2 + bx + c \geq 0$ con $a \neq 0$, página 14*

1. $(-\infty, 1) \bigcup (4, +\infty) = \mathbb{R} - [1, 4]$.
2. $(-2, 6)$.
3. $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
4. $(-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty) = \mathbb{R} - (-1, 1)$.
5. $(-\infty, -2) \bigcup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$.
6. $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$.
7. $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \bigcup [1, +\infty) = \mathbb{R} - \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$.
8. $\left[-3, \frac{2}{3}\right]$.
9. $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right] \bigcup \varnothing = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right]$.
10. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.
11. $\left[-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right]$.
12. $\varnothing$.
13. $[2, 3)$.
14. $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$.
15. $(-\infty, -3] \bigcup \left(\frac{5}{3}, 3\right]$.
16. $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{41}+3}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{41}-3}{2}, +\infty\right)$.
17. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

CAPÍTULO

1

Conjuntos

1

1.8.1 Conjuntos

- Un conjunto es una colección de objetos de cualquier tipo y a dichos objetos se les denomina elementos del conjunto.

En nuestro caso todos los elementos considerados, si no se especifica otra cosa, serán números reales.

Generalmente a un conjunto se le representa mediante una letra mayúscula $(A, B, C, D, \ldots)$ y a sus elementos mediante letras minúsculas $(a, b, c, x, t, \ldots)$.

- Si se quiere decir que x es un elemento del conjunto A, escribimos $x \in A$ y si se quiere decir que c no es un elemento de A, escribimos $c \notin A$.

Un conjunto puede ser expresado de las siguientes maneras:

1. Escribiendo sus elementos entre un par de llaves:

$$A = \{-1, 0, 1\}.$$

En este caso definimos al conjunto por extensión.

2. Describiendo propiedades o características que definan de manera única a los elementos:

$$A = \{\text{todos los } x \text{ tales que } x^3 = x\}.$$

En este caso definimos al conjunto por comprensión.

1. canek.azc.uam.mx: 10/ 9/ 2012

3. Como en 2. pero simbólicamente
$$A = \{\, x \mid x^3 = x \,\}.$$

Lo anterior lo leemos: A es el conjunto de los elementos x tales que $x^3 = x$.

Un conjunto no se modifica si se cambia el orden de sus elementos o bien si se repite alguno de éstos.

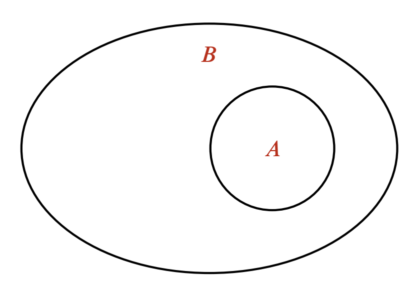
$$A = \{-1, 0, 1\} = \{1, -1, 0\} = \{0, 1, -1\};$$
$$A = \{-1, 0, 1\} = \{-1, 0, 1, 0, 1\} = \{-1, -1, 0, 1\}.$$

- Un conjunto que no tiene elementos es nombrado conjunto vacío y se le denota con el símbolo $\emptyset$.

Por ejemplo el conjunto de todas las monedas de 4 pesos mexicanos es un conjunto vacío, ya que dichas monedas no existen.

Otro ejemplo: el conjunto de los x reales tales que $x^2 = -7$ es un conjunto vacío.

- Si A y B son dos conjuntos, y sucede que todo elemento de A es también elemento de B, se dice que A es un subconjunto de B o bien que A está contenido en B y se escribe $A \subset B$.



- Cuando A no es subconjunto de B se escribe $A \not\subset B$.

- El conjunto A es un subconjunto propio de B si $A \subset B$ y además $B \not\subset A$.

Por ejemplo, si V es el conjunto de las vocales, C es el conjunto de las consonantes y A es todo el abecedario, entonces V y C son subconjuntos propios de A ya que $V \subset A$ & $A \not\subset V$, así como $C \subset A$ & $A \not\subset C$.

- Se tiene que el conjunto vacío $\emptyset$ es un subconjunto propio de cualquier no vacío A, es decir $\emptyset \subset A$.

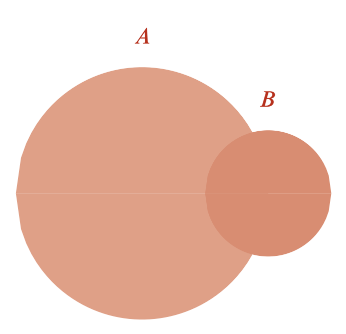
- Dos conjuntos A y B son iguales cuando tienen los mismos elementos y se escribe $A = B$.

  En este caso sucede que $A \subset B$ y a la vez $B \subset A$.

1.8.2 Operaciones con conjuntos

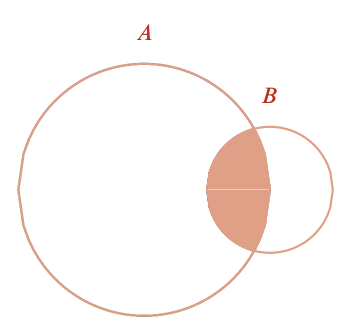
- La <u>unión</u> de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos. Esto es

$$A \cup B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ o bien } x \in B \right\}.$$



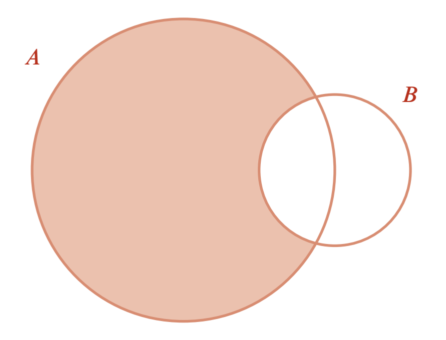
- La <u>intersección</u> de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, se define como el conjunto de aquellos elementos que pertenecen a ambos conjuntos a la vez. Esto es

$$A \cap B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \;\&\; x \in B \right\}.$$



- La <u>diferencia</u> de dos conjuntos, A menos B, denotada por $A - B$, se define como el conjunto de todos los elementos que están en A y que no están en B. Esto es

$$A - B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \;\&\; x \notin B \right\}.$$



Ejemplo: dados los conjuntos

$$A = \{a, e, i, o, u\}, \quad B = \{a, b, c, d, e\} \quad \& \quad C = \{t, u, v, x\},$$

se tiene entonces que

1. $A \cup B = \{a, e, i, o, u, b, c, d\}$.
2. $A \cup C = \{a, e, i, o, u, t, v, x\}$.
3. $B \cup C = \{a, b, c, d, e, t, u, v, x\}$.
4. $A \cap B = \{a, e\}$.
5. $A \cap C = \{u\}$.
6. $B \cap C = \emptyset$.
7. $A - B = \{i, o, u\}$.
8. $A - C = \{a, e, i, o\}$.
9. $C - A = \{t, v, x\}$.
10. $(A - B) \cap (A - C) = \{i, o\}$.

- Dos conjuntos son disjuntos o ajenos cuando su intersección es el conjunto vacío.

  Ejemplo: los conjuntos B y C del ejemplo anterior son disjuntos ya que no tienen elementos en común ($B \cap C = \emptyset$).

- Si A es un conjunto cualquiera y $\emptyset$ es el conjunto vacío, entonces

$$A \cup \emptyset = A \quad \& \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

- Si A y B son conjuntos tales que $A \subset B$, entonces

$$A \cup B = B \quad \& \quad A \cap B = A.$$

Ejercicios 1.8.1 *Soluciones en la página 6*

Expresar por extensión los conjuntos siguientes:

1. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 = 0 \right\}$.
2. $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 = 4 \right\}$.
3. $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1 = 0 \right\}$.
4. $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 1 = 0 \right\}$.
5. $E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 = 4x \right\}$.
6. $F = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 15 = 0 \right\}$.
7. $G = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 7x^2 + 10x = 0 \right\}$.
8. $H = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = x \right\}$.
9. $I = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq x \right\}$.

10. $J = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + 1 = 0 \right\}$.

11. Considerando el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, indicar si es falsa (F) o verdadera (V) cada una de las siguientes afirmaciones. Argumentar cada respuesta.

    a. $2 \in A$.
    b. $\{1, 2\} \subset A$.
    c. $\{3, 1, 2\} = A$.
    d. $\{1, 2, 3, 2, 3\} \not\subset A$.
    e. $\{2\} \subset A$.
    f. $\varnothing \subset A$.

12. Considerando los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, obtener los conjuntos siguientes:

    a. $A \cup B$.
    b. $A \cup C$.
    c. $A \cap B$.
    d. $A \cap C$.
    e. $B - A$.
    f. $C - A$.
    g. $B \cup C$.
    h. $D - C$.
    i. $D - B$.
    j. $B \cap C$.
    k. $D \cup A$.
    l. $D \cap A$.
    m. $B \cup D$.
    n. $C \cap D$.
    o. $(A \cup C) - (A \cap C)$.

Ejercicios 1.8.1 *Conjuntos, página 4*

1. $A = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$.
2. $B = \left\{ -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right\}$.
3. $C = \{ 1 \}$.
4. $D = \{ -1, 1 \}$.
5. $E = \{ 0, -2, 2 \}$.
6. $F = \{ -5, 3 \}$.
7. $G = \{ 0, 2, 5 \}$.
8. $H = \mathbb{R}$.
9. $I = \varnothing$ (el conjunto vacío).
10. $J = \varnothing$ (el conjunto vacío).

11. a. V.
    b. V.
    c. V.
    d. F.
    e. V.
    f. V.

12. a. $A \cup B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 \}$.
    b. $A \cup C = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 \}$.
    c. $A \cap B = \{ 2, 4 \}$.
    d. $A \cap C = \{ 1, 3, 5 \}$.
    e. $B - A = \{ 0, 6, 8 \}$.
    f. $C - A = \{ 7, 9 \}$.
    g. $B \cup C = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \} = D$.
    h. $D - C = \{ 0, 2, 4, 6, 8 \} = B$.
    i. $D - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \} = C$.
    j. $B \cap C = \varnothing$.
    k. $D \cup A = D$.
    l. $D \cap A = A$.
    m. $B \cup D = D$.
    n. $C \cap D = C$.
    o. $(A \cup C) - (A \cap C) = \{ 2, 4, 7, 9 \}$.

CAPÍTULO

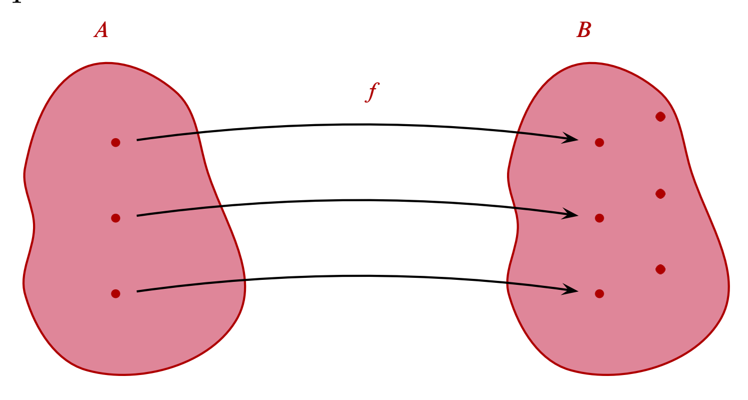
2

Funciones

[1]

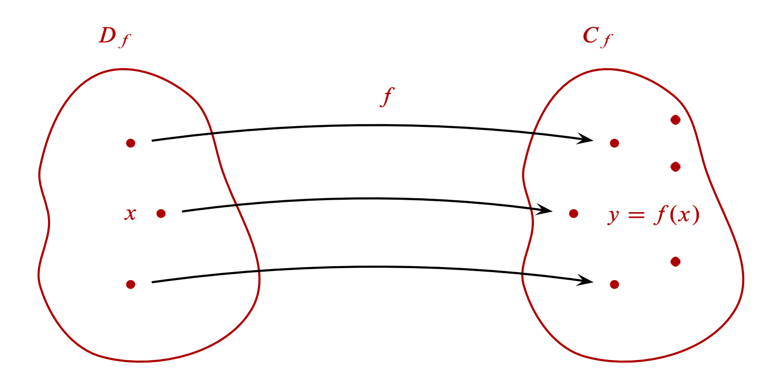
2.1 Conceptos básicos

Una función f de un conjunto A a un conjunto B (denotada por $f : A \longrightarrow B$ o bien $A \stackrel{f}{\longrightarrow} B$) es una regla de correspondencia que a cada elemento de A le asocia un único elemento de B.

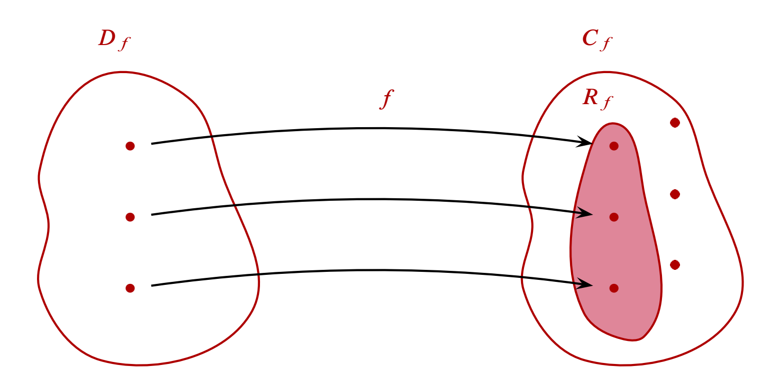


Al conjunto A se le denomina dominio de la función y al conjunto B contradominio de la función.
Así pues, una función consta de dos conjuntos, llamados dominio y contradominio, y de una regla de correspondencia que permite asociarle a cada elemento del dominio un único elemento del contradominio.
Si denotamos con f a la regla de correspondencia, entonces con D_f denotaremos al dominio A y con C_f al contradominio B de la función.
Si x es cualquier elemento del dominio ($x \in D_f$) & y es el elemento del contradominio ($y \in C_f$) asociado a x, entonces decimos que y es la imagen de x bajo la acción de f y escribimos $y = f(x)$, que se lee y es igual a f de x.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



Al conjunto de todas las imágenes se le denomina rango de la función y se le denota por R_f.



Es decir, $R_f = \left\{ y \in C_f \;\middle|\; y = f(x), \text{ donde } x \in D_f \right\}$.

CAPÍTULO

2

Funciones

[1]

2.2 Función real de una variable real

Cuando $C_f \subset \mathbb{R}$ se dice que f es una función real y cuando $D_f \subset \mathbb{R}$ se dice que f es una función de una variable real.
Para una función f real de una variable real, definida mediante una regla de correspondencia o una fórmula $y = f(x)$, sin más especificaciones, sobreentenderemos que D_f es el subconjunto de números reales para los cuales la fórmula $y = f(x)$ tiene sentido, esto es, cuando las imágenes $f(x)$ son reales. Es decir:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Generalmente se denomina variable independiente a una letra (por ejemplo x) que representa a cualquiera de los elementos del dominio y se denomina variable dependiente a otra letra (por ejemplo y) que representa a cualquiera de los elementos del rango (esto es, a cualquiera de las imágenes).

Ejemplo 2.2.1

▼ Si f es la función que a cada número real x le asocia su cuadrado (x^2), entonces la imagen de x bajo la acción de f es x^2 y escribimos $f(x) = x^2$. Otra manera de expresar esta función es mediante la fórmula $y = x^2$, donde la letra y representa a la imagen $f(x)$.

□

Ejemplo 2.2.2

▼ Si g es la función que a cada número real $t \geq 0$ le asocia su raíz cuadrada no negativa ($\sqrt{t}$), entonces la imagen de t bajo la acción de g es $\sqrt{t}$ y escribimos $g(t) = \sqrt{t}$. Podemos expresar esta función mediante $u = \sqrt{t}$, por ejemplo, donde la letra u representa a la imagen $g(t)$.

□

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Nota: cuando se trata de determinar el dominio de una función definida mediante una fórmula $y = f(x)$, es conveniente tener presente dos situaciones:

1. Para que un cociente sea real es necesario que numerador y denominador sean reales y el denominador no sea cero.
2. Una raíz de índice par es real cuando el radicando es un real que no es negativo.

Ejemplo 2.2.3 *Determinar el dominio de la función* $f(x) = \sqrt{x-1}$.

▼ Aquí es importante notar que $\sqrt{x-1}$ corresponderá a un número real siempre y cuando el radicando $(x-1)$ no sea negativo. Luego

$$D_f = \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R} \,\right\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \geq 0 \,\};$$
$$D_f = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \,\} = [1, +\infty)\,.$$

□

Ejemplo 2.2.4 *Obtener el dominio de la función* $g(t) = \dfrac{t^2+1}{t-2}$.

▼ Observamos que el cociente $\dfrac{t^2+1}{t-2}$ corresponde a un número real cuando al denominador $(t-2)$ no se anula. Entonces

$$D_g = \{\, t \in \mathbb{R} \mid g(t) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{t^2+1}{t-2} \in \mathbb{R} \,\right\} = \{\, t \in \mathbb{R} \mid t - 2 \neq 0 \,\};$$
$$D_g = \{\, t \in \mathbb{R} \mid t \neq 2 \,\} = \mathbb{R} - \{\, 2 \,\} = (-\infty, 2) \bigcup (2, +\infty)\,.$$

□

Ejemplo 2.2.5 *Determinar el dominio de la función* $h(u) = \dfrac{\sqrt[3]{u+5}}{u^2-1}$.

▼ Aquí $\dfrac{\sqrt[3]{u+5}}{u^2-1}$ tiene que ser un número real, por lo que $h(u)$ será real siempre que el denominador (u^2-1) no sea cero. En este caso no es necesario establecer condición para el radicando $u+5$ ya que la raíz tiene un índice impar.
Por lo tanto

$$\begin{aligned} D_h &= \{\, u \in \mathbb{R} \mid h(u) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, u \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{\sqrt[3]{u+5}}{u^2-1} \in \mathbb{R} \,\right\} = \\ &= \{\, u \in \mathbb{R} \mid u^2 - 1 \neq 0 \,\} = \{\, u \in \mathbb{R} \mid u^2 \neq 1 \,\} = \\ &= \mathbb{R} - \{\, u \in \mathbb{R} \mid u^2 = 1 \,\} = \mathbb{R} - \{\, u \in \mathbb{R} \mid |\, u \,| = 1 \,\} = \\ &= \mathbb{R} - \{\, u \in \mathbb{R} \mid u = \pm 1 \,\} = \mathbb{R} - \{\, -1, 1 \,\}\,. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2.6 *Obtener el dominio de la función* $\phi(y) = \dfrac{\sqrt{y+5}}{y^2-1}$.

▼ Observamos dos restricciones para que $\phi(y)$ sea real: el radicando $(y+5)$ no debe ser negativo y el denominador (y^2-1) no debe ser cero. Luego

$$\begin{aligned}
D_\phi &= \{\, y \in \mathbb{R} \mid \phi(y) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, y \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{\sqrt{y+5}}{y^2-1} \in \mathbb{R} \,\right\} = \\
&= \{\, y \in \mathbb{R} \mid y+5 \geq 0 \;\&\; y^2-1 \neq 0 \,\} = \{\, y \in \mathbb{R} \mid y \geq -5 \;\&\; y^2 \neq 1 \,\} = \\
&= \{\, y \in \mathbb{R} \mid y \geq -5 \;\&\; |\, y \,| \neq 1 \,\} = \{\, y \in \mathbb{R} \mid y \geq -5 \;\&\; y \neq \pm 1 \,\} = \\
&= [-5, +\infty) - \{\, -1, 1 \,\} = [-5, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)\,.
\end{aligned}$$



□

Ejemplo 2.2.7 *Obtener el dominio de la función* $g(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt{4-t^2}}$.

▼ Con $\sqrt[3]{t}$ no hay restricción alguna, pero con el radicando $(4-t^2)$ si la hay. Debemos pedir que $4-t^2$ sea positivo. Es decir,

$$\begin{aligned}
D_g &= \{\, t \in \mathbb{R} \mid g(t) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt{4-t^2}} \in \mathbb{R} \,\right\} = \\
&= \{\, t \in \mathbb{R} \mid 4-t^2 > 0 \,\} = \{\, t \in \mathbb{R} \mid t^2 < 4 \,\} = \\
&= \left\{\, t \in \mathbb{R} \mid \sqrt{t^2} < \sqrt{4} \,\right\} = \{\, t \in \mathbb{R} \mid |\, t \,| < 2 \,\} = \{\, t \in \mathbb{R} \mid -2 < t < 2 \,\}; \\
D_g &= (-2, 2)\,.
\end{aligned}$$

□

Ejercicios 2.2.1 *Soluciones en la página 4*

Determinar el dominio de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \sqrt{5+x}$.
2. $g(x) = \dfrac{x}{4x^2-9}$.
3. $h(t) = \sqrt{8-3t}$.
4. $j(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-2x-8}$.
5. $\alpha(y) = \dfrac{2y+5}{y^2+1}$.
6. $\beta(x) = \dfrac{\sqrt{10-3x}}{x^2+x-6}$.
7. $\gamma(u) = \sqrt[3]{u^2-u+6}$.
8. $\phi(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{9-2x}}$.
9. $F(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^3-x}$.
10. $G(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{5-x}$.

Ejercicios 2.2.1 *Función real de una variable real, página 3*

1. $[-5, +\infty)$.
2. $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$.
3. $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$.
4. $\mathbb{R} - \{ -2, 4 \}$.
5. $\mathbb{R}$.
6. $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right] - \{ -3, 2 \}$.
7. $\mathbb{R}$.
8. $\left(-\infty, \frac{9}{2}\right)$.
9. $[-3, 3] - \{ -1, 0, 1 \}$.
10. $[-4, 5]$.

CAPÍTULO

2

Funciones

[1]

2.3 Álgebra de funciones

Para las funciones reales, el álgebra de los números reales induce un álgebra entre las funciones:
Nota: $\stackrel{\text{def}}{=}$ quiere decir que “así se define", que “es igual por definición a".

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x)+g(x);\\
(f-g)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x)-g(x);\\
(f\times g)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x)\times g(x);\\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{g(x)}.
\end{aligned}
$$

El dominio de todas estas funciones es

$$D_f \bigcap D_g$$

con excepción del cociente, en el que a $D_f \bigcap D_g$ hay que quitarle las raíces o ceros de g, esto es, los $x \in D_g$ tales que $g(x) = 0$.

Ejemplo 2.3.1 *Dadas las funciones*

$$f(u) = \sqrt{25-u^2}, \quad g(t) = \sqrt{t+1} \quad \& \quad h(w) = w^2 - 4$$

obtener:

1. $(f+g)(3)$, $(gh)(3)$, $(f-h)(3)$ & $\left(\dfrac{g}{f}\right)(3)$.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

2. $(f-g)(x)$, $(fh)(x)$, $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x)$, $(g+f)(x)$ & $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$.

3. *Los dominios de las funciones:* f, g & h.

4. *Los dominios de las funciones:* $f-g$, fh, $\dfrac{f}{h}$, $g+f$ & $\dfrac{g}{f}$.

▼

1. Ya que

$$\begin{aligned} f(3) &= \sqrt{25-(3)^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4;\\ g(3) &= \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2;\\ h(3) &= 3^2-4 = 9-4 = 5, \text{ entonces} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f+g)(3) &= f(3)+g(3) = 4+2 = 6;\\ (gh)(3) &= g(3)\cdot h(3) = 2\cdot 5 = 10;\\ (f-h)(3) &= f(3)-h(3) = 4-5 = -1;\\ \left(\frac{g}{f}\right)(3) &= \frac{g(3)}{f(3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Ya que $f(x)=\sqrt{25-x^2}$, $g(x)=\sqrt{x+1}$ y $h(x)=x^2-4$, entonces

$$\begin{aligned} (f-g)(x) &= f(x)-g(x) = \sqrt{25-x^2}-\sqrt{x+1};\\ (fh)(x) &= f(x)h(x) = \sqrt{25-x^2}\,(x^2-4);\\ \left(\frac{f}{h}\right)(x) &= \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2-4};\\ (g+f)(x) &= g(x)+f(x) = \sqrt{x+1}+\sqrt{25-x^2};\\ \left(\frac{g}{f}\right)(x) &= \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{25-x^2}}. \end{aligned}$$

3. El dominio de la función f es

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ u\in\mathbb{R} \mid f(u)\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ u\in\mathbb{R} \mid \sqrt{25-u^2}\in\mathbb{R} \right\} =\\ &= \left\{ u\in\mathbb{R} \mid 25-u^2\geq 0 \right\} = \left\{ u\in\mathbb{R} \mid u^2\leq 25 \right\} =\\ &= \left\{ u\in\mathbb{R} \mid \sqrt{u^2}\leq\sqrt{25} \right\} = \left\{ u\in\mathbb{R} \mid |u|\leq 5 \right\} =\\ &= \left\{ u\in\mathbb{R} \mid -5\leq u\leq 5 \right\} = [-5,5]. \end{aligned}$$

El dominio de la función g es

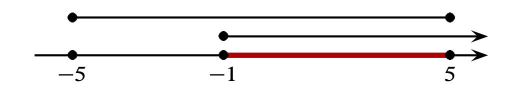
$$\begin{aligned} D_g &= \left\{ t\in\mathbb{R} \mid g(t)\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ t\in\mathbb{R} \mid \sqrt{t+1}\in\mathbb{R} \right\} =\\ &= \left\{ t\in\mathbb{R} \mid t+1\geq 0 \right\} = \left\{ t\in\mathbb{R} \mid t\geq -1 \right\} = [-1,+\infty). \end{aligned}$$

El dominio de la función h es

$$D_h = \left\{ w\in\mathbb{R} \mid h(w)\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ w\in\mathbb{R} \mid w^2-4\in\mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}.$$

4. El dominio de la función $f - g$ es

$$D_{f-g} = D_f \bigcap D_g = [-5, 5] \bigcap [-1, +\infty) = [-1, 5]\,.$$



El dominio de la función fh es

$$D_{fh} = D_f \bigcap D_h = [-5, 5] \bigcap \mathbb{R} = [-5, 5]\,.$$

El dominio de la función $\dfrac{f}{h}$ es

$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{h}} &= (D_f \cap D_h) - \left\{\, w \in \mathbb{R} \;\middle|\; h(w) = 0 \,\right\} = \\ &= ([-5, 5] \cap \mathbb{R}\,) - \left\{\, w \in \mathbb{R} \;\middle|\; w^2 - 4 = 0 \,\right\} = [-5, 5] - \left\{\, w \in \mathbb{R} \;\middle|\; w^2 = 4 \,\right\} = \\ &= [-5, 5] - \{\, -2, 2 \,\} = [-5, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 5]\,. \end{aligned}$$

El dominio de la función $g + f$ es

$$D_{g+f} = D_g \bigcap D_f = [-1, +\infty) \bigcap [-5, 5] = [-1, 5]\,.$$

Este resultado es claro, pues $D_{g+f} = D_g \cap D_f = D_f \cap D_g = D_{f-g}$.

El dominio de la función $\dfrac{g}{f}$ es

$$\begin{aligned} D_{\frac{g}{f}} &= (D_g \cap D_f) - \left\{\, u \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(u) = 0 \,\right\} = [-1, 5] - \left\{\, u \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sqrt{25 - u^2} = 0 \,\right\} = \\ &= [-1, 5] - \left\{\, u \in \mathbb{R} \;\middle|\; 25 - u^2 = 0 \,\right\} = [-1, 5] - \left\{\, u \in \mathbb{R} \;\middle|\; u^2 = 25 \,\right\} = \\ &= [-1, 5] - \{\, -5, 5 \,\} = [-1, 5)\,. \end{aligned}$$

□

Ejercicios 2.3.1 *Soluciones en la página 5*

Dadas las funciones $f(t) = t^2 - 9$, $\quad g(y) = \sqrt{2y + 15} \quad \& \quad h(z) = \sqrt{10 - 3z}$ obtener:

1. $(f + g)(5)$.
2. $(gf)(-3)$.
3. $\left(\dfrac{h}{f}\right)(2)$.
4. $(g - f)\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
5. $(gh)(4)$.
6. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-8)$.
7. $(g + h)(x)$.
8. $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$.

9. $(fh)(x)$.

10. $(h - f)(x)$.

11. $\left(\dfrac{h - g}{f}\right)(x)$.

12. $\left(\dfrac{fg}{h}\right)(x)$.

13. Los dominios de las funciones f, g & h.

14. El dominio de la función: $g + h$.

15. El dominio de la función: $\dfrac{g}{f}$.

16. El dominio de la función: fh.

17. El dominio de la función: $h - f$.

18. El dominio de la función: $\dfrac{h}{g}$.

19. El dominio de la función: $\dfrac{fg}{h}$.

20. El dominio de la función: $\dfrac{g + h}{gh}$.

Ejercicios 2.3.1 *Álgebra de funciones, página 3*

1. 21 .
2. 0 .
3. $-\dfrac{2}{5}$.
4. $\dfrac{51}{4}$.
5. No definido .
6. No definido .
7. $\sqrt{2x+15}+\sqrt{10-3x}$.
8. $\dfrac{\sqrt{2x+15}}{x^2-9}$.
9. $(x^2-9)\sqrt{10-3x}$.
10. $\sqrt{10-3x}-(x^2-9)$.
11. $\dfrac{\sqrt{10-3x}-\sqrt{2x+15}}{x^2-9}$.
12. $\dfrac{(x^2-9)\sqrt{2x+15}}{\sqrt{10-3x}}$.
13. $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \left[-\dfrac{15}{2}, +\infty\right)$, $D_h = \left(-\infty, \dfrac{10}{3}\right]$.
14. $\left[-\dfrac{15}{2}, \dfrac{10}{3}\right]$.
15. $\left[-\dfrac{15}{2}, +\infty\right) - \{-3, 3\}$.
16. $\left(-\infty, \dfrac{10}{3}\right]$.
17. $\left(-\infty, \dfrac{10}{3}\right]$.
18. $\left(-\dfrac{15}{2}, \dfrac{10}{3}\right]$.
19. $\left[-\dfrac{15}{2}, \dfrac{10}{3}\right)$.
20. $\left(-\dfrac{15}{2}, \dfrac{10}{3}\right)$.

CAPÍTULO

2

Funciones

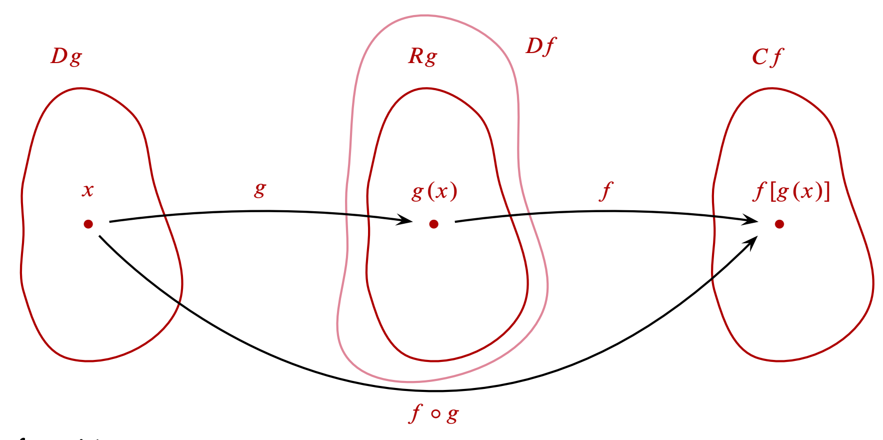
[1]

2.4 Composición de funciones

Definiremos otra nueva función, la composición de g seguida de f, denotada por $f \circ g$. El dominio de $f \circ g$ es un subconjunto del dominio de g y se expresa como $D_{f \circ g}$. El contradominio de $f \circ g$ es el contradominio de f. A cualquier elemento $x \in D_{f \circ g}$ la función $f \circ g$ le hace corresponder $f[g(x)]$. Así:

$$(f \circ g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f[g(x)].$$

La función $f \circ g$ se denomina también como g compuesta con f.



El dominio de esta función es

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (f \circ g)(x) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f[g(x)] \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R} \;\&\; f[g(x)] \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \in D_g \;\&\; g(x) \in D_f \right\} = \\ &= \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\}. \end{aligned}$$

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Ejemplo 2.4.1 *Dadas las funciones*

$$f(u) = \sqrt{25-u}, \quad g(t) = t^2 + 9 \quad \& \quad h(y) = \sqrt{y-5}\,.$$

1. *Obtener los dominios de f, g & h.*
2. *Obtener $(h \circ g)(x)$ y el dominio de $h \circ g$.*
3. *Obtener $(g \circ h)(x)$ y el dominio de $g \circ h$.*
4. *Obtener $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.*
5. *Obtener $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.*
6. *Obtener $(h \circ f)(x)$ y el dominio de $h \circ f$.*
7. *Obtener $(f \circ h)(x)$ y el dominio de $f \circ h$.*

▼

1. $$\begin{aligned} D_f &= \left\{ u \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(u) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ u \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{25-u} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ u \in \mathbb{R} \,\middle|\, 25-u \geq 0 \right\} = \left\{ u \in \mathbb{R} \,\middle|\, u \leq 25 \right\} = (-\infty, 25]\,; \\ D_g &= \left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, g(t) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, (t^2+9) \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}\,; \\ D_h &= \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, h(y) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{y-5} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y-5 \geq 0 \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \geq 5 \right\} = [5, +\infty)\,. \end{aligned}$$

2. $$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h(x^2+9) = \sqrt{(x^2+9)-5} = \sqrt{x^2+4}.$$

   Vemos que $g(x) \in D_h \;\Rightarrow\; g(x) \in [5, +\infty) \;\Rightarrow\; x^2 + 9 \geq 5$.

   $$\begin{aligned} D_{h \circ g} &= \left\{ x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_h \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2+9 \geq 5 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 \geq -4 \right\} = \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} &(g \circ h)(x) = g[h(x)] = g(\sqrt{x-5}) = (\sqrt{x-5})^2 + 9 = x - 5 + 9 = x + 4; \\ &D_{g \circ h} = \left\{ x \in D_h \,\middle|\, h(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \geq 5 \,\middle|\, \sqrt{x-5} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ x \geq 5 \,\middle|\, x \geq 5 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq 5 \right\} = [5, +\infty)\,. \end{aligned}$$

   Como se puede apreciar la composición de funciones no es conmutativa. Esto es, en general

   $$(g \circ h)(x) \neq (h \circ g)(x).$$

4. $$\begin{aligned} &(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{25-x}) = (\sqrt{25-x})^2 + 9 = 25 - x + 9 = 34 - x; \\ &D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \leq 25 \,\middle|\, \sqrt{25-x} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ x \leq 25 \,\middle|\, 25-x \geq 0 \right\} = \left\{ x \leq 25 \,\middle|\, 25 \geq x \right\} = \\ &= \left\{ x \leq 25 \,\middle|\, x \leq 25 \right\} = (-\infty, 25]\,. \end{aligned}$$

5. $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2 + 9) = \sqrt{25 - (x^2 + 9)} = \sqrt{25 - x^2 - 9} = \sqrt{16 - x^2}\,;$

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \left\{\, x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + 9 \le 25 \,\right\} = \\ &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 \le 16 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{x^2} \le \sqrt{16} \,\right\} = \\ &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |\,x\,| \le 4 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -4 \le x \le 4 \,\right\} = [-4, 4]\,. \end{aligned}$$

6. $(h \circ f)(x) = h[f(x)] = h(\sqrt{25 - x}) = \sqrt{\sqrt{25 - x} - 5}\,;$

$$\begin{aligned} D_{h \circ f} &= \left\{\, x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_h \,\right\} = \left\{\, x \le 25 \,\middle|\, \sqrt{25 - x} \in [5, +\infty) \,\right\} = \\ &= \left\{\, x \le 25 \,\middle|\, \sqrt{25 - x} \ge 5 \,\right\} = \left\{\, x \le 25 \,\middle|\, 25 - x \ge 25 \,\right\} = \\ &= \left\{\, x \le 25 \,\middle|\, -x \ge 0 \,\right\} = \left\{\, x \le 25 \,\middle|\, x \le 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \le 0 \,\right\} = \\ &= (-\infty, 0]\,. \end{aligned}$$

7. $(f \circ h)(x) = f[h(x)] = f(\sqrt{x - 5}) = \sqrt{25 - \sqrt{x - 5}}\,;$

$$\begin{aligned} D_{f \circ h} &= \left\{\, x \in D_h \,\middle|\, h(x) \in D_f \,\right\} = \left\{\, x \ge 5 \,\middle|\, \sqrt{x - 5} \le 25 \,\right\} = \\ &= \left\{\, x \ge 5 \,\middle|\, x - 5 \le 625 \,\right\} = \left\{\, x \ge 5 \,\middle|\, x \le 630 \,\right\} = [5, 630]\,. \end{aligned}$$

□

Ejercicios 2.4.1 *Soluciones en la página 5*

1. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{7 - x}$ & $g(x) = |\,5 - 8x\,|$, obtener el dominio de f, $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.

2. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{9 - 2x}$, $g(x) = |\,3x - 4\,|$ & $h(x) = x^2 - 5$, obtener $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x)$ y $(f \circ g)(x)$, así como los dominios de las funciones $\dfrac{f}{h}$ & $f \circ g$.

3. Sean las funciones $f(x) = \sqrt{x + 3}$ & $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5}$. Calcular, obtener o determinar, según proceda:

   a. Dominios de f, g, $f + g$ & fg.

   b. $f[g(-3)]$, $g[f(6)]$ y el dominio de $g[f(x)]$.

4. Si $f(x) = x^3 + 2$ & $g(x) = \dfrac{2}{x - 1}$:

   a. Encuentre los dominios de f y de g.

b. Dé las reglas de correspondencia así como los dominios de las siguientes funciones: $\frac{g}{f}$; $g \circ f$ & $f \circ g$.

5. Si $f(x) = \sqrt{4 - x}$ & $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, obtener, reduciendo a su mínima expresión: $(f \cdot g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$.

   En cada caso proporcionar el dominio de la función.

6. Sean: $f(x) = \sqrt{x + 1}$ & $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

   a. Obtenga los dominios de f y de g.

   b. Obtenga reglas de correspondencia y dominios de las funciones $f + g$, f/g, $f \circ g$, $g \circ f$.

7. Si $f(x) = \sqrt{|\,3 - 4x\,| - 4}$, $g(x) = \sqrt{3 - 2x}$ & $h(x) = \dfrac{4}{x^2 - 4}$; encontrar:

   a. El dominio de f.

   b. Los dominios de g y de h.

   c. $(h \circ g)(x)$ y el dominio de $h \circ g$.

8. Dadas las funciones $f(t) = \sqrt{t + 3}$, $g(z) = z^2 - 1$ & $h(w) = \sqrt{5 - w}$, obtener:

$$\left(\frac{f + h}{g}\right)(x),\ (g \circ h)(x)\ \&\ (f \circ g)(x)\,,$$

   así como los dominios de las respectivas funciones.

9. Sean $f(v) = v^2 - 2v - 3$ & $g(u) = \sqrt{3 - u}$, determine:

   a. Los dominios de f & g.

   b. $(f \circ g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$, indicando el dominio de cada una de las funciones.

10. Sean $f(x) = \sqrt{x - 1}$ & $g(x) = |\,3x + 2\,|$, determine:

    a. Los dominios de f & g.

    b. $(f \circ g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$ indicando el dominio de cada función.

11. Dadas las funciones $f(t) = \sqrt{t - 11}$ & $g(u) = |\,2u - 1\,|$, obtenga: $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ y los dominios de las funciones $f \circ g$ & $g \circ f$.

12. Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$, encuentre dos funciones g para las cuales $(f \circ g)\,(x) = x^2 - 4x + 5$.

Ejercicios 2.4.1 *Composición de funciones, página 3*

1. $D_f : (-\infty, 7]$;
   $(f \circ g)(x) = \sqrt{7 - |\,5 - 8x\,|}$;
   $D_{f\circ g} = \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right]$.

2. $\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{\sqrt{9-2x}}{x^2-5}$;
   $D_{\frac{f}{h}} = \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] - \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$;
   $(f \circ g)(x) = \sqrt{9 - 2\,|\,3x - 4\,|}$;
   $D_{(f\circ g)} = \left[-\frac{1}{6}, \frac{17}{6}\right]$.

3. $D_f = (-3, +\infty]$;
   $D_g = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$;
   $D_{f+g} = \left[-3, -\sqrt{5}\right) \bigcup \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) \bigcup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$;
   $D_{fg} = \left[-3 - \sqrt{5}\right) \bigcup \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) \bigcup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$;
   $f[g(-3)] = \frac{\sqrt{13}}{2}$;
   $g[f(6)] = \frac{1}{4}$;
   $D_{g\circ f} = [-3, 2) \bigcup (2, +\infty)$.

4. $D_f = \mathbb{R}$ y $D_g = \mathbb{R} - \{\,1\,\}$;
   $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{2}{(x-1)(x^3+2)}$;
   $D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} - \left\{1, \sqrt[3]{-2}\right\}$;
   $(g \circ f)(x) = \frac{2}{x^3+1}$;
   $D_{g\circ f} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq -1 \,\right\} = \mathbb{R} - \{\,-1\,\}$;
   $(f \circ g)(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x + 6}{(x-1)^3}$;
   $D_{f\circ g} = \mathbb{R} - \{\,1\,\}$.

5. $D_f = (-\infty, 4]$;
   $D_g = \mathbb{R} - \{\,-1, +1\,\}$;
   $(f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2-1}$;
   $D_{f\cdot g} = (-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, 4]$;
   $(g \circ f)(x) = \frac{1}{3-x}$;
   $D_{g\circ f} = (-\infty, 4] - \{\,3\,\}$.

6. $D_f = [-1, +\infty)\,;\; D_g = \mathbb{R}\,;$
   $(f + g)(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2+1}$; $D_{f+g} = [-1, +\infty)$;
   $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = (x^2+1)\sqrt{x+1}$; $D_{\frac{f}{g}} = [-1, +\infty)$;
   $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}}$; $\quad D_{f\circ g} = \mathbb{R}\,;$
   $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x+2}$; $D_{g\circ f} = [-1, +\infty)$.

7. $D_f = \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \bigcup \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$;
   $D_g = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$; $\quad D_h = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$;
   $(h \circ g)(x) = -\frac{4}{2x+1}$;
   $D_{h\circ g} = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

8. $\left(\frac{f+h}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}}{x^2-1}$;
   $D_{\frac{f+h}{g}} = [-3, 5] - \{\pm 1\}$;
   $(g \circ h)(x) = 4 - x\,;\quad D_{g\circ h} = (-\infty, 5]$;
   $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2+2}\,;\quad D_{f\circ g} = \mathbb{R}$.

9. $D_f = \mathbb{R}\,;\quad D_g = (-\infty, 3]$;
   $(f \circ g)(x) = -x - 2\sqrt{3-x}\,;\quad D_{f\circ g} = (-\infty, 3]$;
   $(g \circ f)(x) = \sqrt{3 - x^2 + 2x + 3} = \sqrt{-x^2 + 2x + 6}$;
   $D_{g\circ f} = [1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}]$.

10. $D_f = [1, +\infty)$; $D_g = \mathbb{R}$;
$(f \circ g)(x) = \sqrt{|\,3x + 2\,| - 1}$;
$D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left(-1, -\dfrac{1}{3}\right)$;
$(g \circ f)(x) = |3\sqrt{x - 1} + 2|$; $D_{g \circ f} = [1, +\infty)$.

11. $(f \circ g)(x) = \sqrt{|\,2x - 1\,| - 11}$; $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - (-5, 6)$;
$(g \circ f)(x) = \left|2\sqrt{x - 11} - 1\right|$; $D_{g \circ f} = [11, +\infty)$.

12. $g_1(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 2; \\ -x + 1 & \text{si } x < 2. \end{cases}$

$g_2(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \geq 2; \\ x - 3 & \text{si } x < 2\,. \end{cases}$

CAPÍTULO

2

Funciones

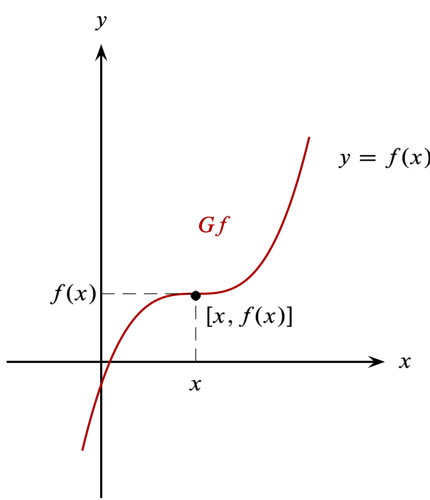
[1]

2.5 Gráfica de una función real de variable real

Definimos la gráfica G_f de una función f real de una variable real como:

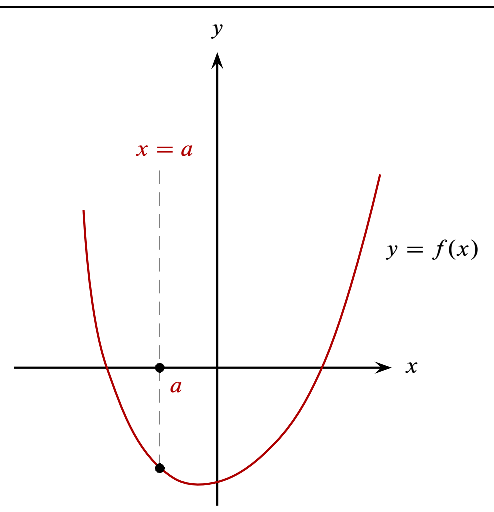
$$G_f \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in D_f \;\&\; y = f(x) \right\} .$$

La expresión anterior se lee:
"La gráfica G_f de una función real de una variable real es igual al conjunto de los puntos que pertenecen a $\mathbb{R}^2$ (ubicados en el plano cartesiano) tales que x pertenece al dominio de f & y es igual a $f(x)$".

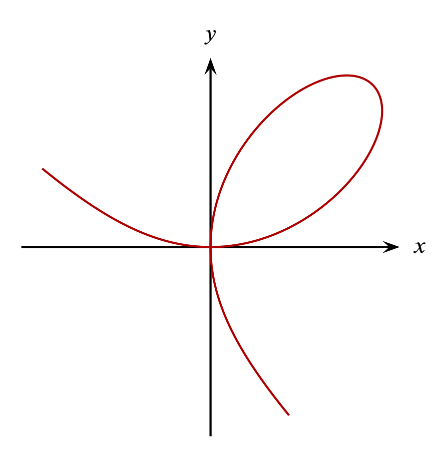


Una condición necesaria y suficiente para que una curva plana sea la gráfica de una función es que cualquier recta vertical corte a la curva en a lo más un punto.

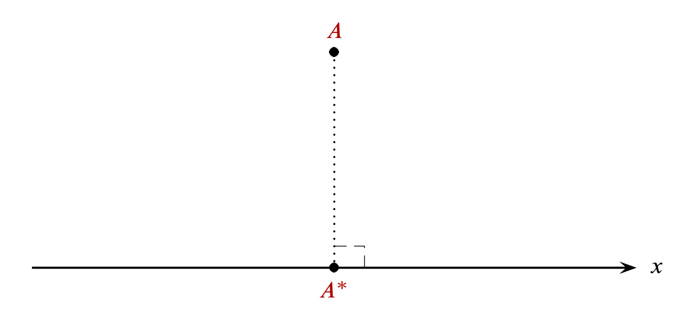
[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



Esto es, la recta vertical $x = a$ debe cortar a la curva en un punto si $a \in D_f$. En caso contrario, si a $\notin D_f$, entonces la recta vertical $x = a$ no corta a la curva.
Así una curva de esta forma:

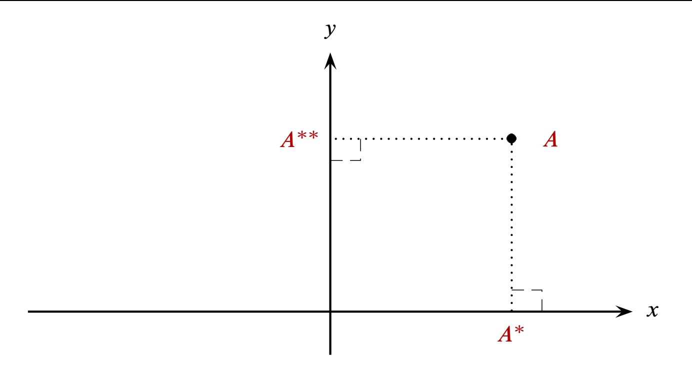


No puede ser la gráfica de función alguna, pues hay ciertas rectas verticales que la cortan en más de un punto.
Recordemos que la proyección ortogonal de un punto sobre un eje es el punto donde la perpendicular al eje que pasa por el punto corta al eje.

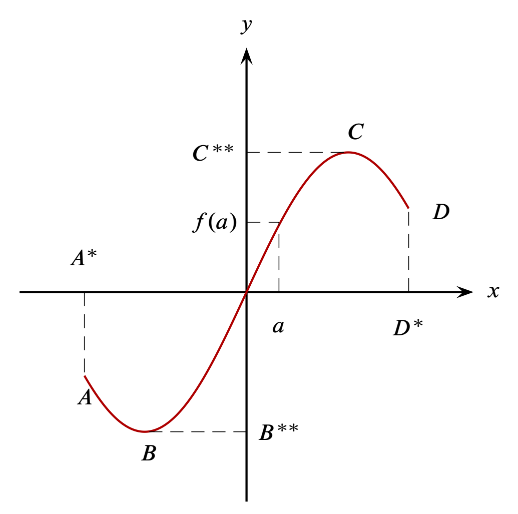


A^* es la proyección ortogonal de A sobre el eje x.

En la siguiente figura se muestra que A^* es la proyección ortogonal del punto A sobre el eje x y que A^{**} es la proyección ortogonal del mismo punto sobre el eje y.



Dada la gráfica de una función f, la proyección ortogonal de todos sus puntos sobre el eje x es el dominio D_f de la función y su proyección ortogonal sobre el eje y es su rango R_f.
Además dado un número $a \in D_f$, la ordenada del punto donde la recta $x = a$ corta a la gráfica de la función f es el número $f(a)$.



$$D_f = \overline{A^*D^*}, \qquad R_f = \overline{B^{**}C^{**}}$$

De manera que, dada la gráfica de una función, conocemos a ésta completamente, pues podemos determinar su dominio y su rango, y dado $a \in D_f$ podemos hallar $f(a)$.

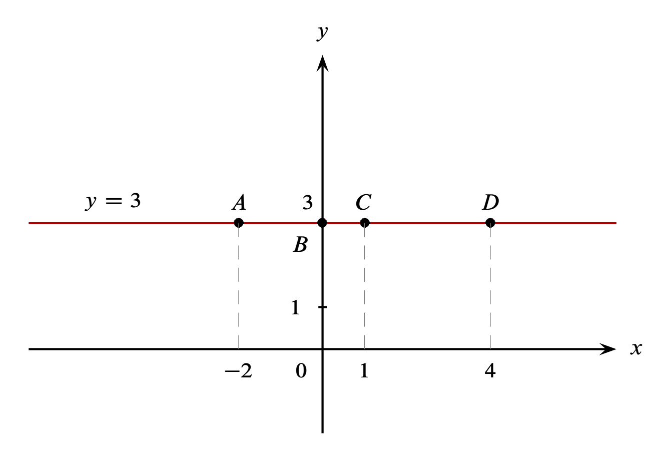
Ahora bien, dada una función $y = f(x)$, es frecuente intentar tener una noción de su gráfica generando un conjunto de puntos de ella, lo cual se logra dando valores arbitrarios a $x \in D_f$ y obteniendo las imágenes $y = f(x)$ correspondientes. Se genera así una tabla de valores donde cada $x \in D_f$ es la abscisa y la imagen $y = f(x)$ es la ordenada de un mismo punto $P(x, y)$. Esto es,

x	y	$P(x, y)$
a	$f(a)$	$A[a, f(a)]$
x_1	$f(x_1)$	$B[x_1, f(x_1)]$
x_2	$f(x_2)$	$C[x_2, f(x_2)]$
b	$f(b)$	$D[b, f(b)]$

Ejemplo 2.5.1 *Trazar la gráfica de la función* $f(x) = 3$.

▼ Aquí f es la función que a cada número real x le asocia siempre el mismo número que es $y = 3$. Ahora bien, sabemos que la ecuación $y = 3$ representa la línea recta horizontal que corta al eje y en el número 3.
Por lo tanto la gráfica de la función $f(x) = 3$ es la recta horizontal $y = 3$.
Algunos puntos de la gráfica de $f(x) = 3$ son:

x	$f(x)$	$P(x, y)$
-2	3	$A(-2, 3)$
0	3	$B(0, 3)$
1	3	$C(1, 3)$
4	3	$D(4, 3)$



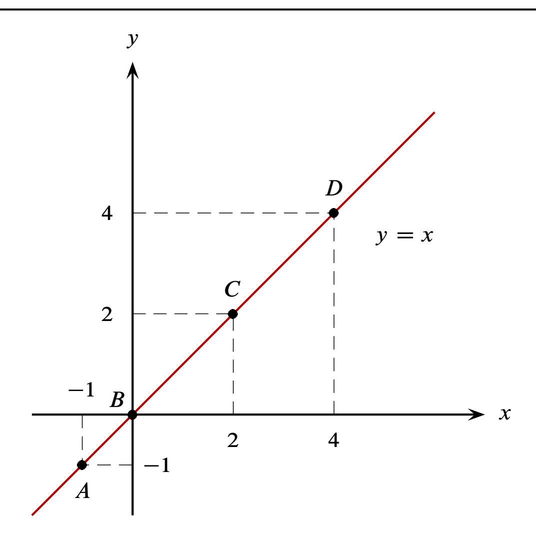
Nótese que el dominio de esta función es $D_f = \mathbb{R}$ y su rango es $R_f = \{3\}$.

□

Ejemplo 2.5.2 *Bosquejar la gráfica de la función $g(x) = x$.*

▼ Aquí g es la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asocia su imagen $y = x$. Además sabemos que la ecuación $y = x$ representa a la línea recta que biseca a los cuadrantes primero y tercero del plano cartesiano.
Por lo tanto la gráfica de la función $g(x) = x$ es la recta $y = x$.
Algunos puntos de la gráfica de $g(x) = x$ son:

x	$f(x)$	$P(x, y)$
-1	-1	$A(-1, -1)$
0	0	$B(0, 0)$
2	2	$C(2, 2)$
4	4	$D(4, 4)$



Observamos que el dominio de esta función es $D_g = \mathbb{R}$ y su rango es $R_g = \mathbb{R}$.

□

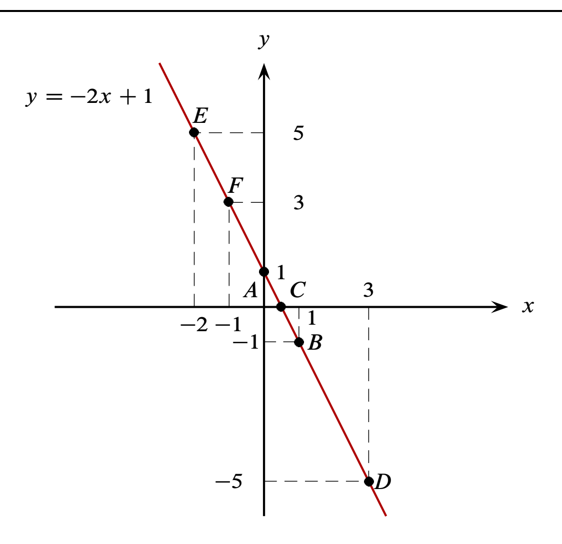
Ejemplo 2.5.3 *Trazar la gráfica de la función $h(x) = 1 - 2x$.*

▼ Aquí h es la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asocia la imagen $y = 1 - 2x$. Además sabemos que la ecuación $y = -2x + 1$ representa a la recta $(y = mx + b)$ que tiene pendiente $m = -2$ y ordenada en el origen $b = 1$.
Dos puntos de esta recta son

$$x = 0 \Rightarrow y = -2(0) + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow A(0, 1) ;$$
$$x = 1 \Rightarrow y = -2(1) + 1 = -2 + 1 = -1 \Rightarrow B(1, -1) .$$

Por lo tanto, la gráfica de la función $h(x) = 1 - 2x$ es la recta $y = -2x + 1$ que pasa por los puntos $A(0, 1)$ y $B(1, -1)$.
Algunos puntos de la gráfica de $h(x) = 1 - 2x$ son:

x	$f(x)$	$P(x, y)$
-2	5	$E(-2, 5)$
-1	3	$F(-1, 3)$
0	1	$A(0, 1)$
$1/2$	0	$C(1/2, 0)$
1	-1	$B(1, -1)$
3	-5	$D(3, -5)$



Obsérvese que el dominio de esta función es $D_h = \mathbb{R}$ y su rango es $R_h = \mathbb{R}$.

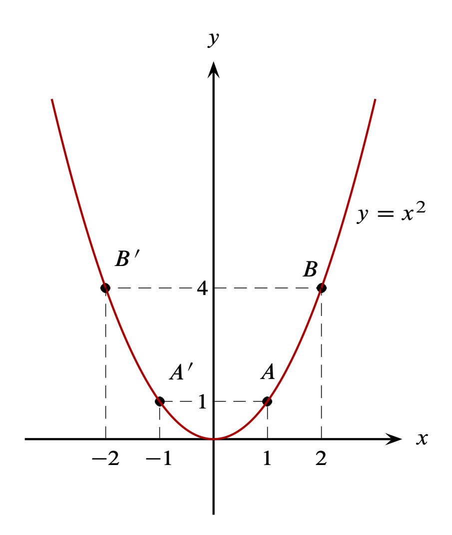
□

Ejemplo 2.5.4 *Bosquejar la gráfica de la función* $f(x) = x^2$.

▼ Aquí f es la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asocia su imagen $y = x^2$.
Cuatro puntos de la gráfica son

$$x = \pm 1 \Rightarrow y = (\pm 1)^2 = 1 \Rightarrow A'(-1, 1) \text{ y } A(1, 1);$$
$$x = \pm 2 \Rightarrow y = (\pm 2)^2 = 4 \Rightarrow B'(-2, 4) \text{ y } B(2, 4).$$

Por lo tanto la gráfica de la función $f(x) = x^2$ es la parábola $y = x^2$ que tiene su vértice en $V(0, 0)$ y que pasa por los puntos $B'(-2, 4)$, $A'(-1, 1)$, $A(1, 1)$ y $B(2, 4)$.



El dominio de esta función es $D_f = \mathbb{R}$ y su rango es $R_f = [0, +\infty)$.

□

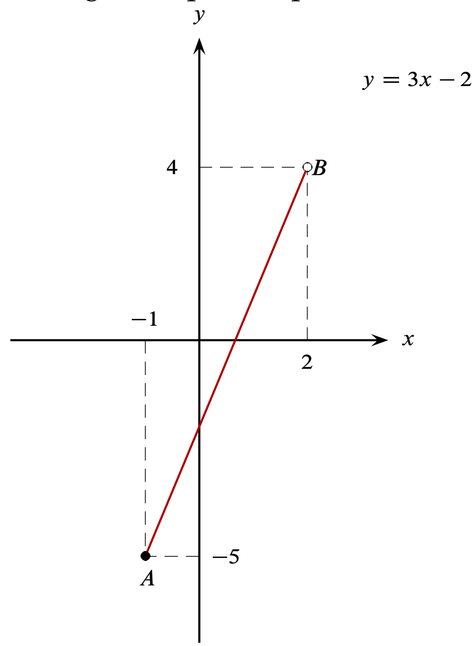
Ejemplo 2.5.5 *Bosquejar la gráfica de* $g(x) = 3x - 2$ *con* $-1 \leq x < 2$.

▼ Sabemos que la ecuación $y = 3x - 2$ representa a la recta $(y = mx + b)$ que tiene pendiente $m = 3$ y ordenada en el origen $b = -2$.

Como el dominio de g es el intervalo $-1 \leq x < 2$, la gráfica de g es el segmento de tal recta $y = 3x-2$ que tiene por extremos a los puntos siguientes

$$x = -1 \;\Rightarrow\; y = 3(-1) - 2 = -3 - 2 = -5 \;\Rightarrow\; A(-1, -5)\,;$$
$$x = 2 \;\Rightarrow\; y = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4 \;\Rightarrow\; B(2, 4)\,.$$

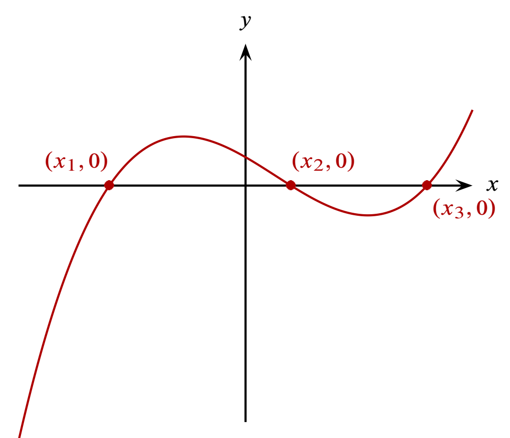
Notemos que el punto A sí pertenece a la gráfica pero el punto B no está en la gráfica de g.



También que el rango es el intervalo $R_g = [-5, 4)$.

□

Puntos muy importantes de la gráfica de una función son aquellos donde ella interseca el eje de las abscisas.
Recordemos que se denomina <u>raíz</u> de la función $y = f(x)$ a todo número $x = r$ tal que $f(r) = 0$.
Por ejemplo



En esta figura los números x_1, x_2 & x_3 son raíces de la función $y = f(x)$ ya que

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0.$$

Ejemplo 2.5.6 *(ver las gráficas anteriores)*

▼

1. La función $f(x) = 3$ no tiene raíces, ya que la recta $y = 3$ nunca interseca al eje x.
2. La función $g(x) = x$ tiene sólo una raíz que es $x = 0$, ya que $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. La función $h(x) = 1 - 2x$ tiene una sola raíz que es $x = \dfrac{1}{2}$, ya que:
$$h(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$
4. La función $f(x) = x^2$ tiene una única raíz en $x = 0$, ya que:
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$
5. La función $g(x) = 3x - 2$ con $-1 \le x < 2$ tiene una raíz, ya que
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

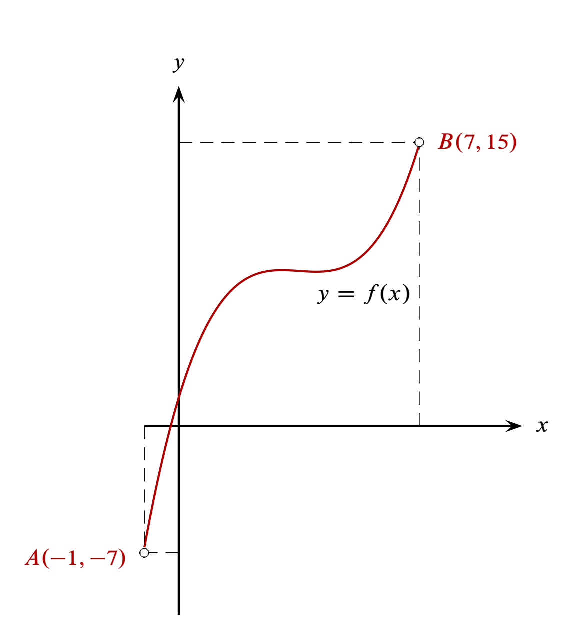
□

Ejercicios 2.5.1 *Soluciones en la página 10*

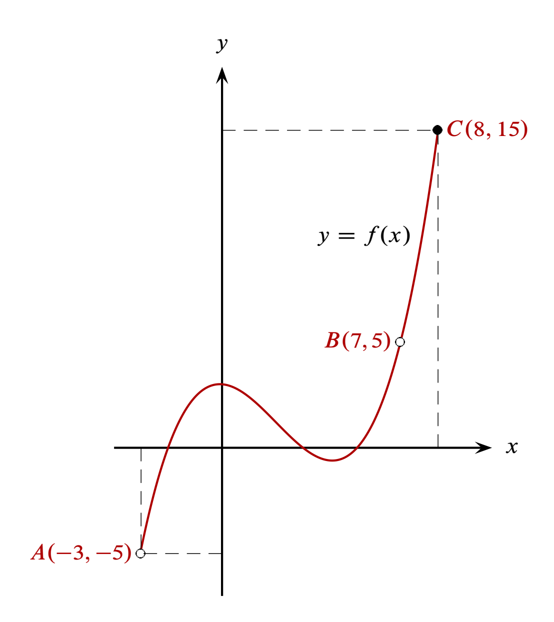
1. La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ representa a una circunferencia de radio 1 y centro en el origen. ¿Puede considerarse a esta curva como la gráfica de una función? Justifique su respuesta.
2. La ecuación $y^2 = x$ representa a una parábola en el plano xy. ¿Puede ser considerada esta parábola como la gráfica de una función $y = f(x)$? Justifique su respuesta.

Las curvas siguientes son gráficas de funciones y los puntos A y B no pertenecen a dicha gráfica. Determinar dominio, rango y el número de raíces de cada función.

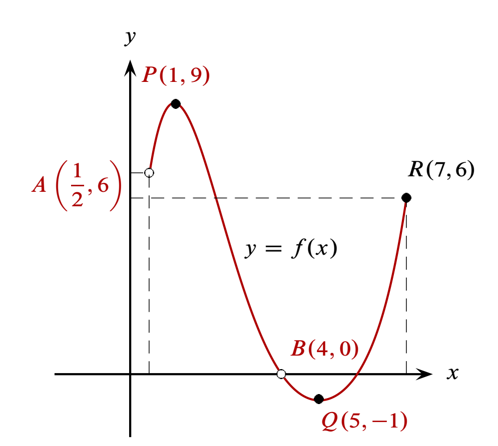
3.



4.



5.



Mediante una tabla de valores, obtener un bosquejo de la gráfica de las funciones siguientes. Determinar además (en cada caso) dominio, rango y raíces de la función.

6. $f(x) = 3x + 1$.

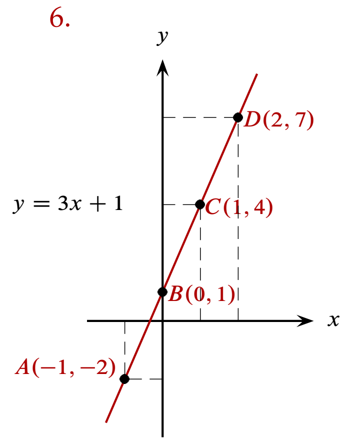
7. $g(x) = x^2 - 1$.

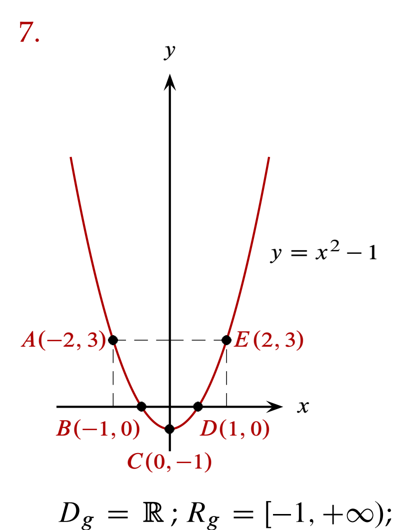
8. $h(x) = -2 \quad \text{con} \quad -\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{8}{3}$.

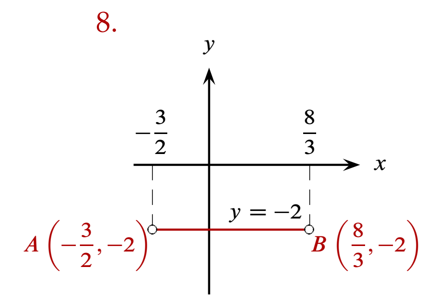
9. $f(x) = 3 - 2x \quad \text{con} \quad -1 \leq x < 4$.

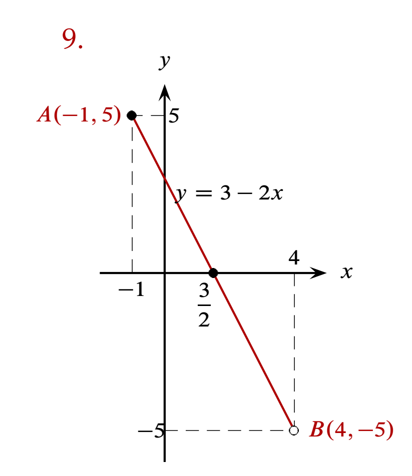
10. $g(x) = 4 - x^2 \quad \text{con} \quad -2 < x \leq \dfrac{5}{2}$.

Ejercicios 2.5.1 *Gráfica de una función real de variable real, página 8*

1. No es la gráfica de una función .
2. No es la gráfica de una función .
3. $D_f = (-1, 7)$;
   $R_f = (-7, 15)$;
   $f(x)$ tiene 1 raíz .
4. $D_f = (-3, 8] - \{ 7 \}$;
   $R_f = (-5, 15] - \{ 5 \}$;
   tiene 3 raíces .
5. $D_f = \left(\dfrac{1}{2}, 4\right) \cup (4, 7]$;
   $R_f = [-1, 9]$;
   tiene 2 raíces .
6. 

   $D_f = \mathbb{R}$; $R_f = \mathbb{R}$; 1 raíz: $x = -\dfrac{1}{3}$.
7. 

   $D_g = \mathbb{R}$; $R_g = [-1, +\infty)$;
   2 raíces: $x = -1$ & $x = 1$.
8. 

   $D_h = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{8}{3}\right)$; $R_h = \{ -2 \}$; no tiene raíces.
9. 

   $D_f = [-1, 4)$; $R_f = (-5, 5]$;
   tiene 1 raíz: $x = \dfrac{3}{2}$.
10. y
   $B(0, 4)$
   $y = 4 - x^2$
   $\frac{5}{2}$
   $A(-2, 0)$
   x
   2
   $-\frac{9}{4}$
   $C\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

   $D_g = \left(-2, \dfrac{5}{2}\right]$; $R_g = \left[-\dfrac{9}{4}, 4\right]$;
   tiene 1 raíz: $x = 2$.

CAPÍTULO

2

Funciones

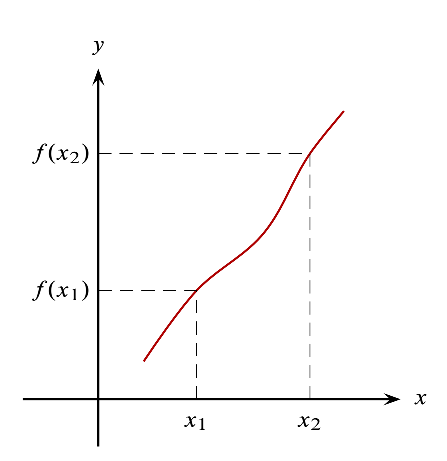
[1]

2.6 Tipos de funciones

Definimos ahora algunos tipos de funciones que tienen comportamientos muy particulares y que son importantes en el estudio del cálculo.

2.6.1 Funciones monótonas

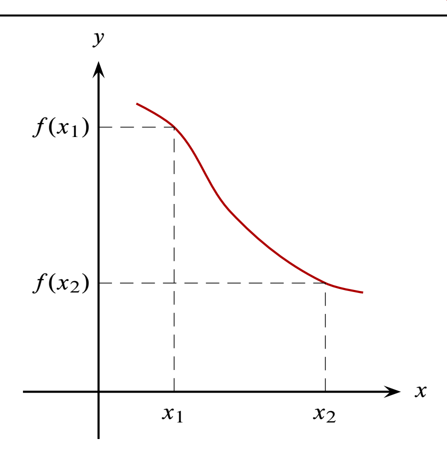
- Una función es <u>monótona creciente</u> si $x_1 < x_2 (\in D_f) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.



Al ir de izquierda a derecha, la gráfica de una función creciente va de abajo hacia arriba.

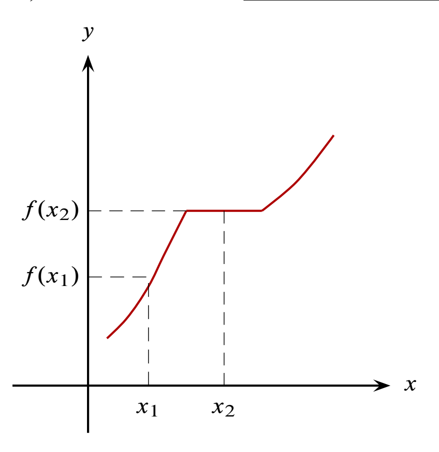
- Una función es <u>monótona decreciente</u> si $x_1 < x_2 (\in D_f) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



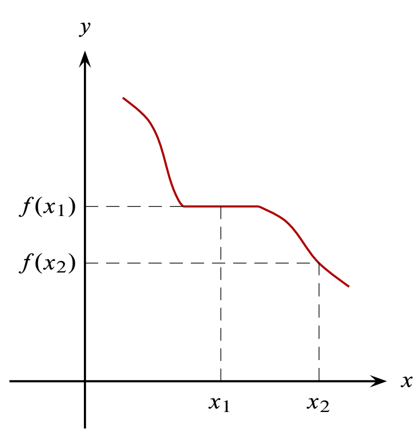
Al ir de izquierda a derecha, la gráfica de una función decreciente va de arriba hacia abajo.

- Si $x_1 < x_2 (\in D_f) \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$, la función es monótona no decreciente.



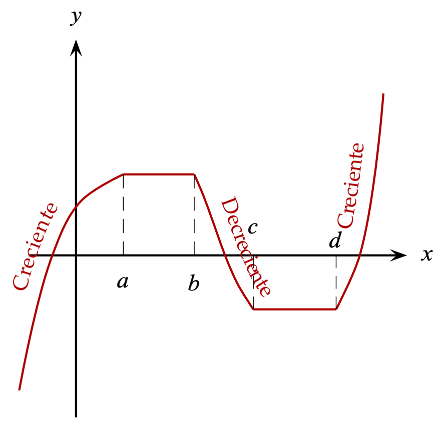
Al ir de izquierda a derecha, la gráfica de una función no decreciente no baja (donde es constante).

- Si $x_1 < x_2 (\in D_f) \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$, la función es monótona no creciente.



Al ir de izquierda a derecha, la gráfica de una función no creciente no sube (donde es constante).

- Una función es monótona por partes si se puede partir su dominio de manera que en cada una de las partes la función sea monótona.



Vemos que la función anterior es:

1. Creciente en $(-\infty, a)$.
2. No decreciente en $(-\infty, b)$.
3. Constante en (a, b).
4. No creciente (a, c).
5. Decreciente en (b, c).
6. No creciente en (b, d).
7. Constante en (c, d).
8. No decreciente en $(c, +\infty)$.
9. Creciente en $(d, +\infty)$.

2.6.2 Funciones pares e impares

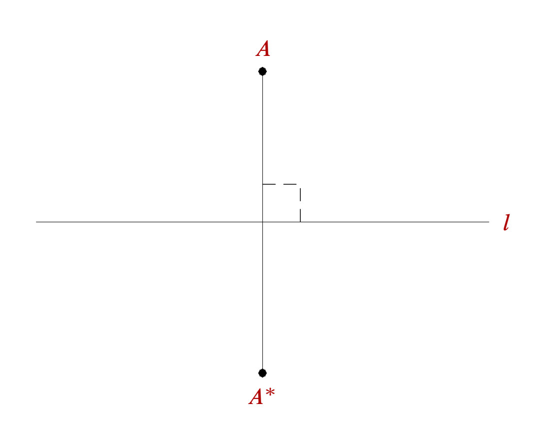
El dominio de una función f es simétrico con respecto al origen, cuando satisface:

$$x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f .$$

Si suponemos que f cumple esta condición, entonces:

- f es par si $f(-x) = f(x)$.

  Recordemos que dos puntos son simétricos respecto a una recta si éta es la mediatriz del segmento que ellos determinan.



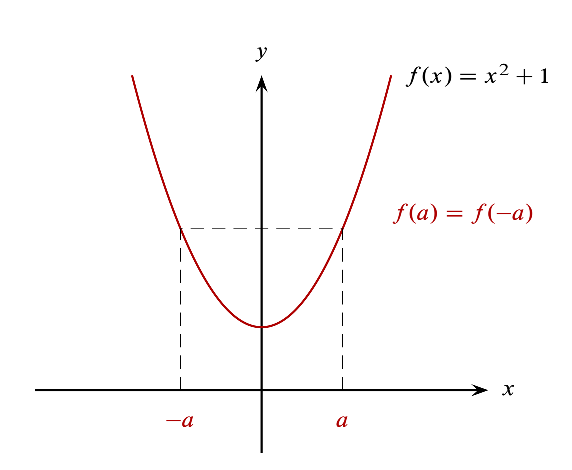
Los puntos A y A^* son simétricos con respecto al eje l. La recta l es la mediatriz del segmento $\overline{AA^*}$.

Que un conjunto de puntos sea simétrico con respecto a un punto (llamado centro de simetría) quiere decir que está constituido por parejas de puntos simétricos con respecto a tal centro de simetría.

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y, es decir, está constituida por parejas de puntos simétricos con respecto al eje y pues si una función es par y un punto $(a, b) \in G_f$, entonces otro punto de la gráfica de f es $(-a, b)$.

Ejemplo 2.6.1 $f(x) = x^2 + 1$ *es par ya que* $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$.

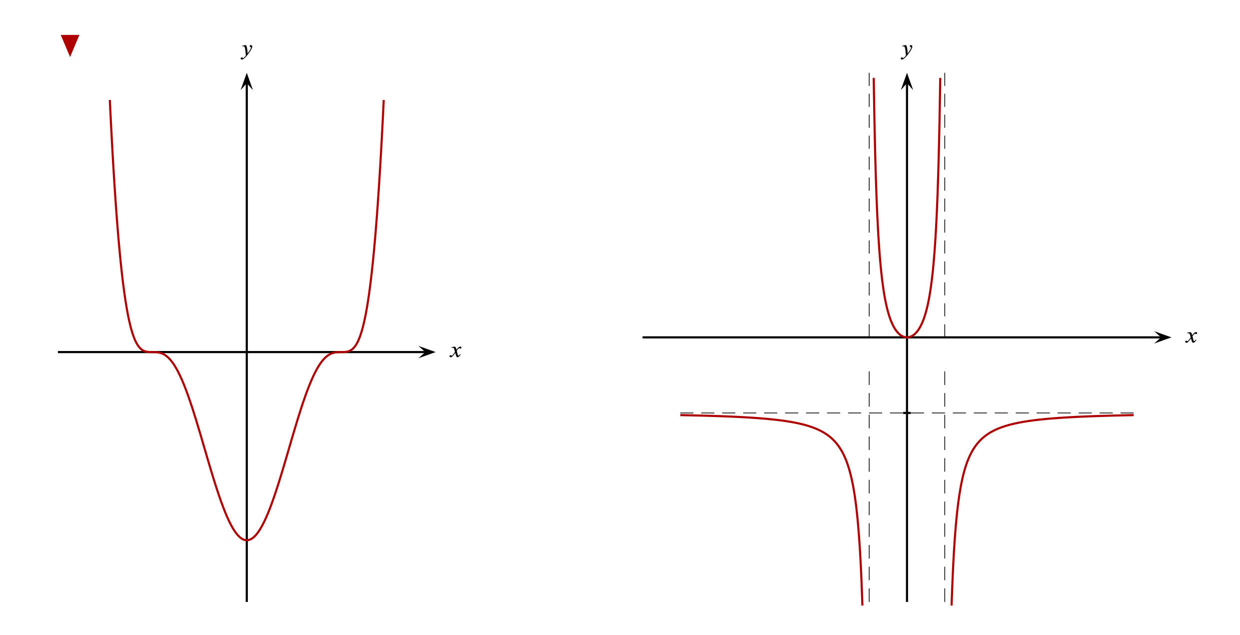
▼



Si $x = 2$, entonces $f(2) = f(-2) = 5$. □

Ejemplo 2.6.2 *Las siguientes funciones son pares:*

▼



□

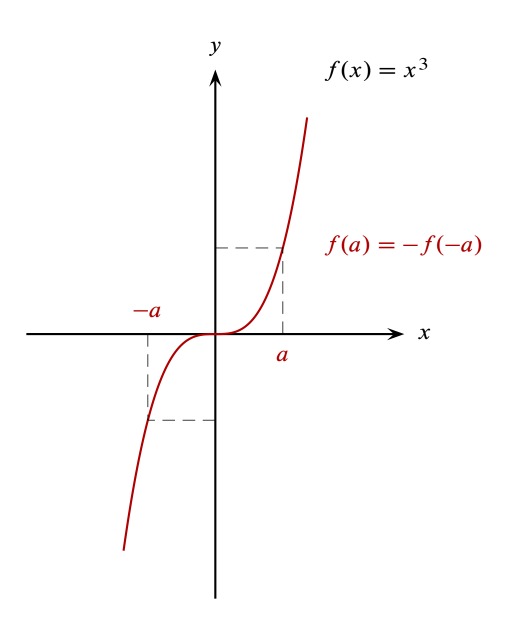
- f es impar si $f(-x) = -f(x)$.

  La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen $(0,0)$.

  Si una función es impar y un punto $(a,b) \in G_f$, entonces otro punto de la gráfica de f es $(-a,-b)$ que es el simétrico de (a,b) respecto al origen.

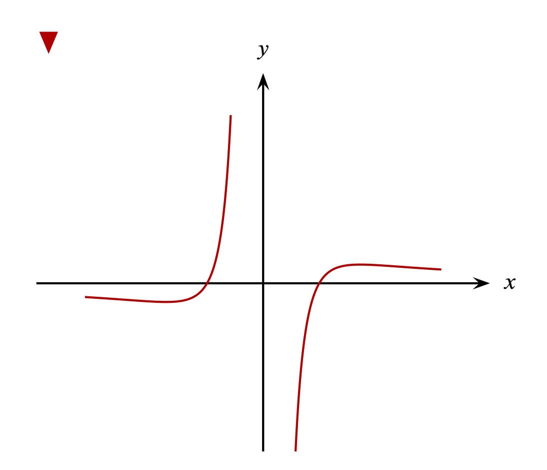
Ejemplo 2.6.3 *$f(x) = x^3$ es impar ya que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.*

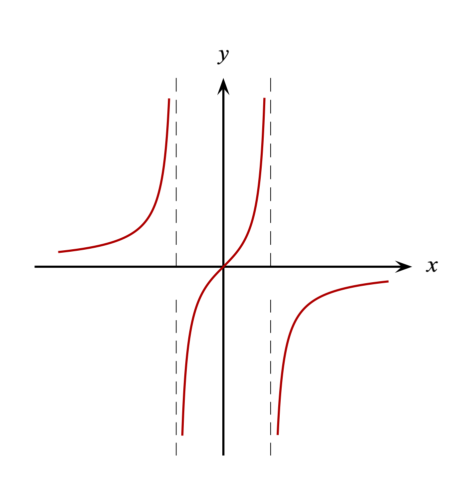




Si $x = -3$, entonces $f(-3) = (-3)^3 = -27 = -f(3)$. □

Ejemplo 2.6.4 *Las siguientes funciones son impares:*





□

2.6.3 Función lineal

- Una función f es lineal si es de la forma $f(x) = mx + b$ con m & $b \in \mathbb{R}$.

  Su dominio son todos los reales.

  Su gráfica es una línea recta de pendiente m y ordenada en el origen b.

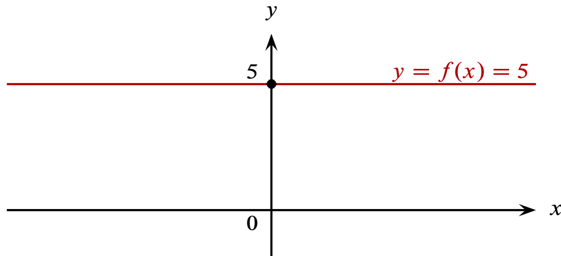
  Si $m \neq 0$, la única raíz de $f(x) = mx + b$ es $x = -\dfrac{b}{m}$ ya que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow mx + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{m}.$$

1. Si $m = 0$, diremos que $f(x) = b$ es constante, su rango consta de un solo número: $\{ b \}$. Su gráfica es una recta paralela al eje de las x que pasa por el punto $(0, b)$.

Ejemplo 2.6.5 *Si* $f(x) = 5$, *entonces* $D_f = \mathbb{R}$ & $R_f = \{5\}$.

▼ La gráfica de $y = f(x) = 5$ es la recta paralela al eje de las x que pasa por el punto $(0, 5)$ y no tiene raíces.



□

Ejemplo 2.6.6 *Si* $f(x) = 0$, *entonces* $D_f = \mathbb{R}$ & $R_f = \{0\}$.

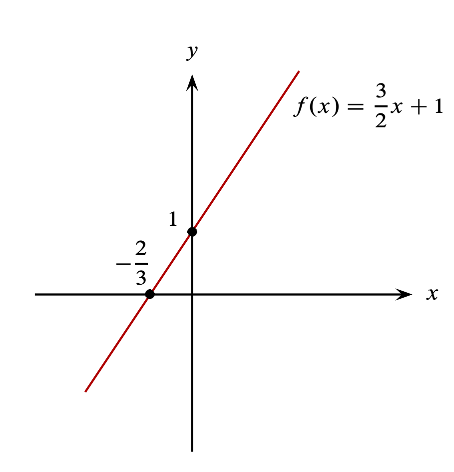
▼ Su gráfica es el eje de las x y ¡todos los reales son raíces de $f(x)$!

□

2. Si $m > 0$, $f(x) = mx + b$ es creciente .

Ejemplo 2.6.7 *Si* $f(x) = \dfrac{3}{2}x + 1$, *entonces* $D_f = \mathbb{R}$ & $R_f = \mathbb{R}$.





$f(x)$ es creciente y su única raíz es cuando:

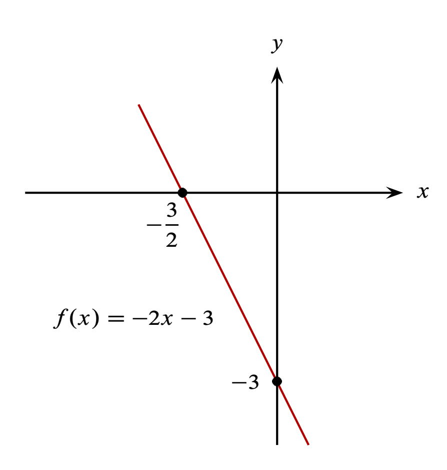
$$f(x) = \frac{3}{2}x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{2}x = -1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

□

3. Si $m < 0$, $f(x) = mx + b$ es decreciente.

Ejemplo 2.6.8 *Si $f(x) = -2x - 3$, entonces $D_f = \mathbb{R}$ & $R_f = \mathbb{R}$.*

▼



La función f es decreciente y su única raíz es cuando:

$$f(x) = -2x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; -2x = 3 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

□

2.6.4 Función cuadrática

- Una función f es cuadrática si es de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ con } a \neq 0, b \,\&\, c \in \mathbb{R}\ .$$

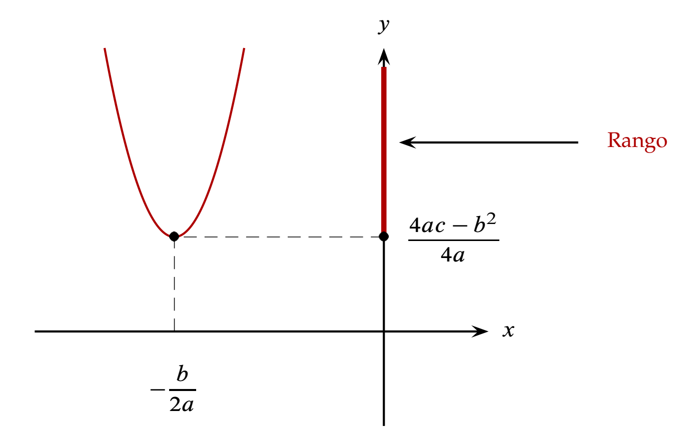
Su dominio son todos los reales.

Tiene dos raíces, una o ninguna dependiendo de si $b^2 - 4ac >, =$ o bien < 0 respectivamente.

Su gráfica es una parábola vertical que se abre hacia arriba o hacia abajo a partir de su vértice, dependiendo de si $a > 0$ o bien $a < 0$. Recordemos que:

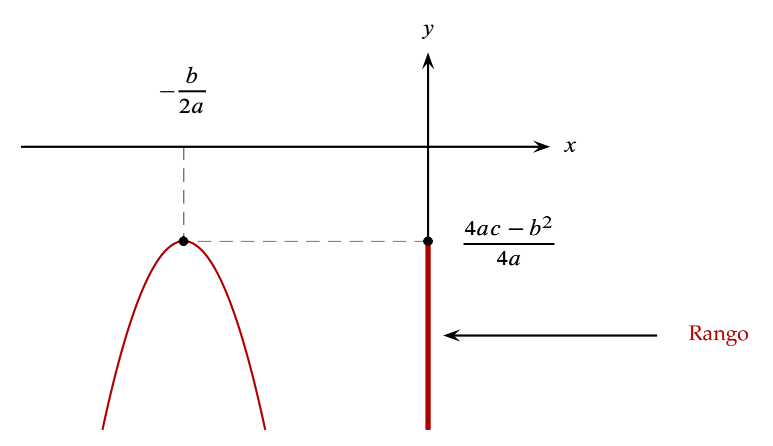
$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = \\ = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = \\ = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\,. \end{aligned}$$

- Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba y para $x = -\dfrac{b}{2a}$ se obtiene el menor valor para y que es: $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.



Su rango es $\left[\dfrac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right)$.

- Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo y para $x = -\dfrac{b}{2a}$ se obtiene el mayor valor para y que es: $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.



Su rango es $\left(-\infty, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right]$.

En ambos casos:

- Su vértice es el punto: $V\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

- Es monótona por partes.

Ejemplo 2.6.9 *Hallar el vértice, el eje, la intersección con el eje x (las raíces) y graficar la parábola*

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}.$$

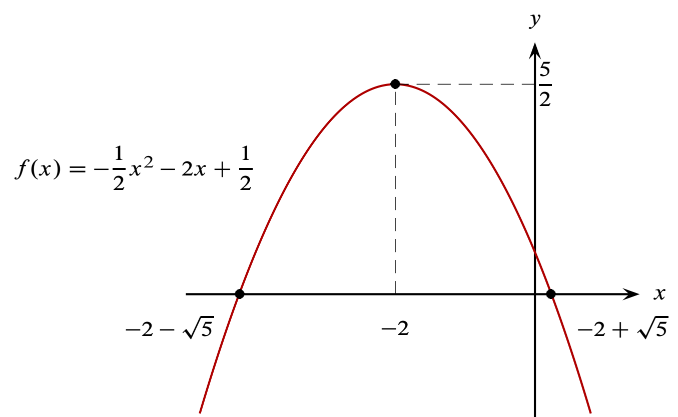
▼ Esta parábola se abre hacia abajo ya que $a = -\dfrac{1}{2} < 0$. Además,

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}\left(x^2 + 4x\right) + \frac{1}{2} = \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^2 + 4x + 4\right) + \frac{1}{2} + 2 = \\ &= -\frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Vértice: $V(-2, \frac{5}{2})$; eje: $x = -2$.
Las raíces se obtienen cuando $y = 0$:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x^2 + 4x - 1 = 0 \text{ (multiplicando a la ecuación dada por } -2) \;\Leftrightarrow \\ &\qquad \Leftrightarrow\; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5} \approx \begin{cases} 0.24 \\ -4.24\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Gráfica de $y = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}$:



□

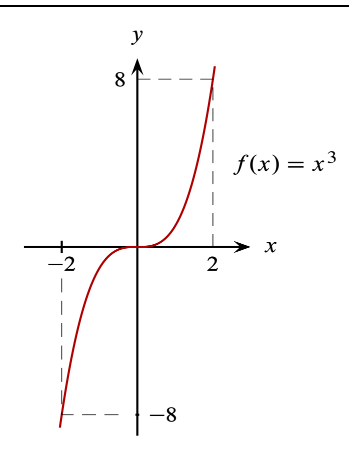
2.6.5 Funciones polinomiales

- Una función f que tiene la forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cd + d \text{ con } a \neq 0, b, c \text{ y } d \in \mathbb{R}\,,$$ se llama función <u>cúbica</u>.

Ejemplo 2.6.10 *Sea la función $f(x) = x^3$, su gráfica es*

▼



Además: $D_f = R_f = \mathbb{R}$, es impar y creciente.

□

- Una función f es polinomial de grado n donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si es de la forma

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n \,,$$

con $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n\} \subset \mathbb{R}$ que son llamados coeficientes.

Ejemplo 2.6.11 *Las funciones* $f_4(x) = x^4$, $f_6(x) = x^6, \cdots, f_{2n}(x) = x^{2n}$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *son funciones polinomiales.*

▼ Su dominio son los números reales y su rango los reales no negativos, su única raíz es $x = 0$, son pares y no son monótonas pero restringidas a los reales no negativos son crecientes y a los no positivos son decrecientes.
Sus gráficas son semejantes a las de $f(x) = x^2$.

□

Ejemplo 2.6.12 *Las funciones* $f_5(x) = x^5$, $f_7(x) = x^7, \cdots, f_{2n+1}(x) = x^{2n+1}$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *son funciones polinomiales.*

▼ Su dominio son los números reales y su rango también los reales, su única raíz es $x = 0$, son impares y crecientes.
Sus gráficas son semejantes a las de $f(x) = x^3$.

□

2.6.6 Funciones racionales y algebraicas

- Una función de la forma:

$$\Phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

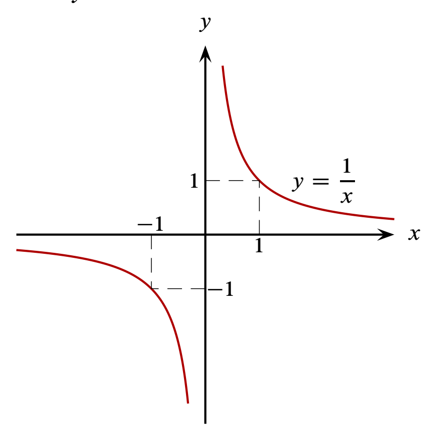
donde $f(x)$ & $g(x)$ son funciones polinomiales se llama función racional.

Su dominio son todos los números reales con excepción de las raíces del denominador $g(x)$, que a lo más son tantas como su grado.

Ejemplo 2.6.13 *Sea la función racional* $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.

▼ $D_f = R_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Es impar, no monótona, pero restringida a los reales negativos o a los positivos es decreciente.

Su gráfica es la hipérbola equilátera $xy = 1$.

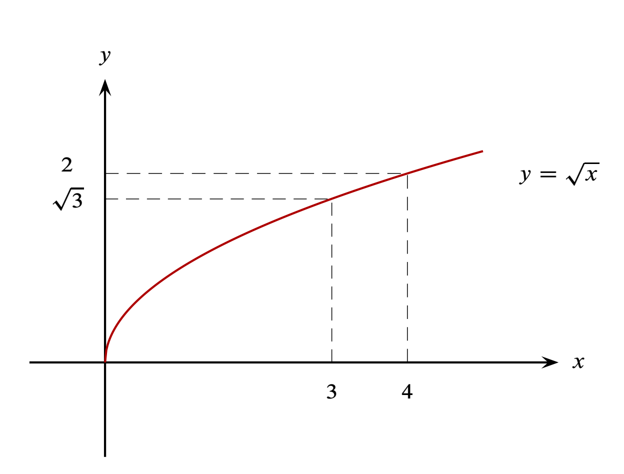


□

- Una función tal que en su regla de correspondencia sólo aparezca la variable independiente (x), números reales y los símbolos de sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar a una potencia y extraer raíz se llama función algebraica.

Ejemplo 2.6.14 *Sea la función algebraica* $f(x) = \sqrt{x}$, *su gráfica es*

▼

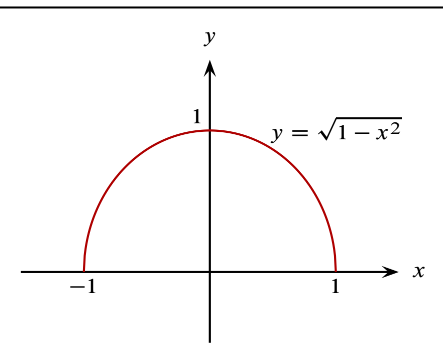


$D_f = R_f = \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$. Su única raíz es $x = 0$, es creciente y su gráfica es la semiparábola superior $y^2 = x$.

□

Ejemplo 2.6.15 *Sea la función algebraica* $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, *su gráfica es*

▼



$D_f = [-1, 1]\,, R_f = [0, 1]$. Sus raíces son $x = 1$ & $x = -1$, es par, no es monótona, es monótona por partes, creciente en $[-1, 0]$ y decreciente en $[0, 1]$, y su gráfica es la semicircunferencia unitaria superior $y = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ con centro en el origen $(0, 0)$.

□

2.6.7 Función definida por partes

A veces la regla de correspondencia de la función no es una sóla fórmula, esto es, el dominio de la función está descompuesto en partes ajenas y en cada una de ellas la función está definida por una fórmula diferente.

Ejemplo 2.6.16 *Trazar la gráfica de la función $f(x) = |\,x\,|$, valor absoluto de x.*

▼ Recordando la definición se tiene

$$f(x) = |\,x\,| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0\,; \\ -x & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

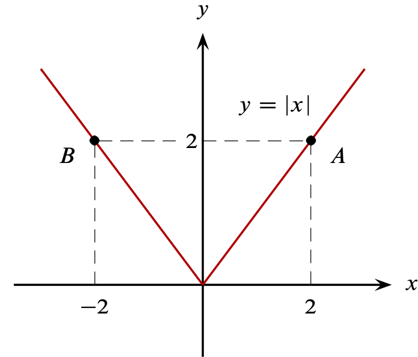
Por la definición de f sucede que:

1. Si $x \geq 0$, entonces $y = f(x) = |\,x\,| = x \Rightarrow y = x$, que es la recta que pasa por el origen con pendiente $m = 1$.

2. Si $x < 0$, entonces $y = f(x) = |\,x\,| = -x \Rightarrow y = -x$, que es la recta que pasa por el origen con pendiente $m = -1$.

$D_f = \mathbb{R}$ & $R_f = \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$, es decir, los reales no negativos.

$$f(\pm 2) = |\pm 2\,| = 2 \Rightarrow A(2, 2) \text{ \& } B(-2, 2) \text{ están en la gráfica}$$

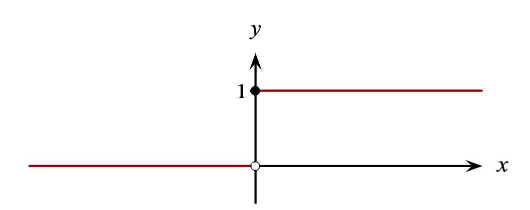


□

Ejemplo 2.6.17 *Trazar la gráfica de la función de Heaviside (1850-1925)*

$$H(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0\,; \\ 1 & si\ t \geq 0\,. \end{cases}$$

▼ La gráfica es:



□

Ejemplo 2.6.18 *Graficar la función* $E(x) = n \quad si \quad n \leq x < n + 1$.
Nótese que E *es una función definida por partes.*
Esta función se llama "la función cumpleaños" o bien "el mayor entero menor o igual que".

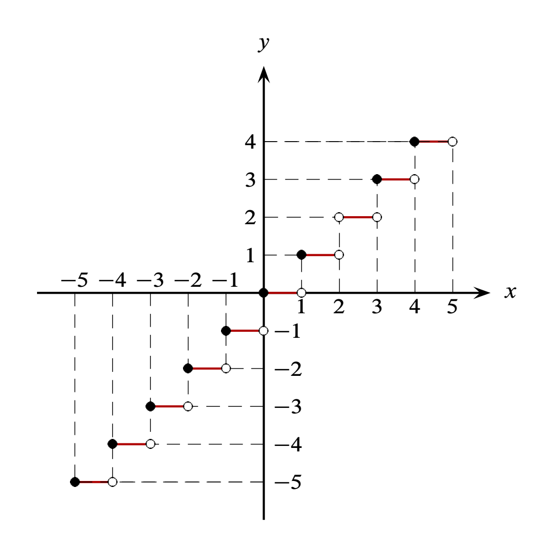
▼
$D_E = \mathbb{R}$ & $R_E = \mathbb{Z}$.
Ejemplos de $E(x)$ para algunos valores de x:

$$E(\pi) = 3;\ E(e) = 2;\ E(\sqrt{2}) = 1 \& E(-\sqrt{2}) = -2\,.$$

Algunos autores en lugar de $E(\pi)$, $E(e)$, $E(\sqrt{2})$, $E(-\sqrt{2})$ escriben:

$$E(x = \pi);\ E(x = e)\,;\,E(x = \sqrt{2})\ \&\ E(x = -\sqrt{2}),\ \text{respectivamente}\,.$$

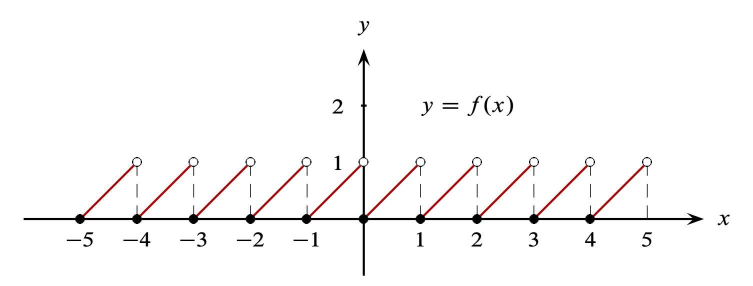
Veamos su gráfica:



□

Ejemplo 2.6.19 *Graficar la función* $f(x) = x - E(x)$.

▼ Si $x \in [n, n + 1)$ con $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = x - n$.



$D_f = \mathbb{R}$ & $R_f = [0, 1)$.

□

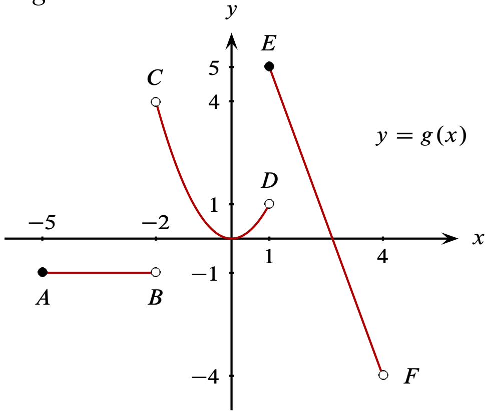
Ejemplo 2.6.20 *Trazar la gráfica de la función*

$$g(x) = \begin{cases} -1 & si\ -5 \leq x < -2\,; \\ x^2 & si\ -2 < x < 1\,; \\ 8 - 3x & si\ 1 \leq x < 4\,. \end{cases}$$

▼ Para obtener la gráfica de g notemos que:

1. Para $-5 \leq x < -2$ se tiene que $g(x) = -1$. En este caso la gráfica de g es el segmento de la recta $y = -1$ que tiene por extremos a los puntos $A(-5, -1)$ y $B(-2, -1)$.
2. Para $-2 < x < 1$ se tiene que $g(x) = x^2$. En este caso la gráfica de g es la porción de la parábola $y = x^2$ que tiene vértice en $V(0, 0)$ y por extremos a los puntos $C(-2, 4)$ y $D(1, 1)$.
3. Para $1 \leq x < 4$ se tiene que $g(x) = 8 - 3x$. En este caso la gráfica de g es el segmento de la recta $y = -3x + 8$ que tiene por extremos a los puntos $E(1, 5)$ y $F(4, -4)$.

Por lo tanto la gráfica de la función g es



Comprobamos en esta gráfica que el dominio de g es $D_g = [-5, 4) - \{-2\}$, el rango de g es $(-4, 5]$ y que los puntos $B(-2, -1)$, $C(-2, 4)$, $D(1, 1)$ y $F(4, -4)$ no pertenecen a la gráfica de la función a diferencia de $A(-5, -1)$ y de $E(1, 5)$, que sí están es la gráfica.

□

Ejemplo 2.6.21 *Trazar la gráfica de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & si\ -4 < x < -1\,; \\ |\,x\,| & si\ -1 < x < 2\,; \\ 4 - \dfrac{x}{2} & si\ 2 < x \leq 6\,. \end{cases}$$

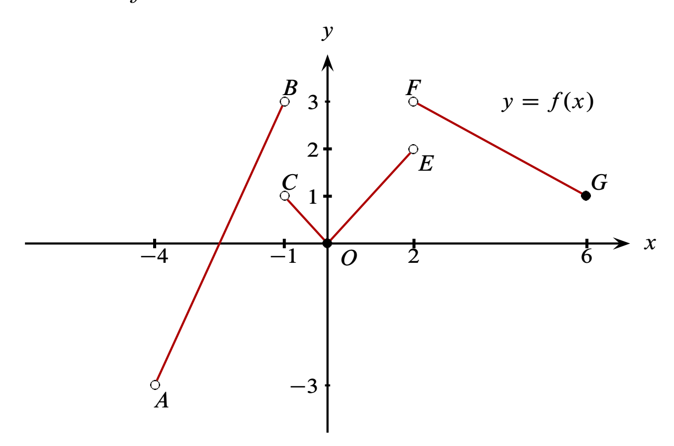
▼ Para obtener la gráfica de f notamos que:

1. Para $-4 < x < -1$ se tiene que $f(x) = 2x + 5$. En este caso la gráfica de f es el segmento de la recta $y = 2x + 5$ que tiene por extremos a los puntos $A(-4, -3)$ y $B(-1, 3)$.

2. Para $-1 < x < 2$ se tiene que $f(x) = |\,x\,|$. En este caso la gráfica de f está compuesta por el segmento de la recta $y = -x$ con extremos en $C(-1, 1)$ y $O(0, 0)$, y por el segmento de la recta $y = x$ con extremos en $O(0, 0)$ y $E(2, 2)$.

3. Para $2 < x \leq 6$ se tiene que $f(x) = 4 - \dfrac{x}{2}$. En este caso la gráfica de f es el segmento de la recta $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$ cuyos extremos son los puntos $F(2, 3)$ y $G(6, 1)$.

Por lo tanto la gráfica de la función f es



Entonces, el dominio de f es $D_f = (-4, 6] - \{-1, 2\}$, el rango de f es $R_f = (-3, 3)$ y comprobamos que los puntos A, B, C, E y F no pertenecen a la gráfica de la función, a diferencia de O y G que sí están en la gráfica.

□

Ejercicios 2.6.1 *Soluciones en la página* **??**

1. Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, señale si es par, impar o ninguna de las dos cosas.

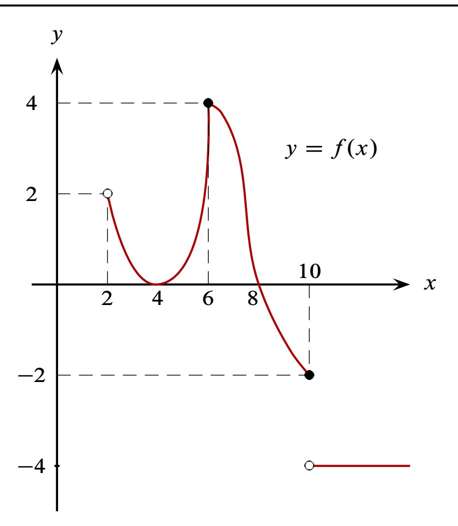
2. Dada la función $f(x) = \sqrt[4]{x^3 - x}$, señale si es par, impar o ninguna de las dos cosas.

3. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^3 - x}{x^2 + 1}$, señale si es par, impar o ninguna de las dos cosas.

4. Si f es par ¿será $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ par?

5. Si f & g son impares ¿será $h(x) = (f + g)(x)$ impar?

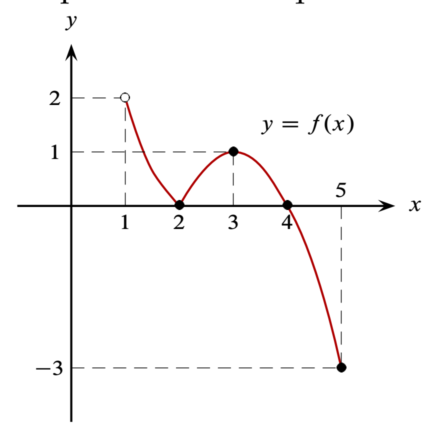
6. La función f es par, y parte de su gráfica es la figura siguiente:



a. Complete su gráfica de f.

b. Obtenga su dominio, raíces y rango, y además determine a partir de la gráfica completada las soluciones de $f(x) > 0$ y de $f(x) < 0$.

7. Si f es una función par cuya gráfica para $x \geq 1$ es la que se indica en la figura,



completar la gráfica, indicar su dominio, sus raíces y su rango.

8. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } -4 \leq x \leq -2\,; \\ x^2 + 1 & \text{si } -2 < x \leq 3\,; \\ 7 & \text{si } 3 < x\,. \end{cases}$$

a. Obtener su gráfica.

b. Determinar su dominio y rango.

c. Calcular: $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(5)$ & $f(1\,000)$.

9. Dada la siguiente función

$$g(x) = \begin{cases} -\,|\,x + 2\,| & \text{si } x < -2\,; \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 \leq x \leq 2\,; \\ x - 2 & \text{si } x > 2\,. \end{cases}$$

Obtenga su gráfica y diga si es par, impar o ninguna de las dos. Determinar su rango.

10. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -5\,; \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \le x \le 5\,; \\ 5 - x & \text{si } x > 5\,. \end{cases}$$

Esboce su gráfica, obtenga el rango, las raíces y diga si es par, impar o ni una cosa ni la otra.

11. Graficar la siguiente función

$$G(z) = \begin{cases} -2z + 4 & \text{si } z < -2; \\ 2z^2 - 1 & \text{si } -2 \le z \le 2; \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } z > 2. \end{cases}$$

12. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 3 & \text{si } x \in (-\infty, 0]\,; \\ -2x + 3 & \text{si } x \in [3, +\infty)\,. \end{cases}$$

Obtener dominio, raíces, gráfica y rango de dicha función.

13. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x < -1\,; \\ 4 & \text{si } |\,x\,| < 1\,; \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } 1 \le x \le 4\,. \end{cases}$$

a. Proporcionar el dominio y raíces de f.
b. Hacer un bosquejo gráfico y hallar el rango.

14. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 1 & \text{si } -2 \le x < 0\,; \\ 3 & \text{si } 0 \le x < 2\,; \\ -3x + 1 & \text{si } 2 \le x \le 4\,. \end{cases}$$

a. Proporcionar el dominio de la función, sus raíces y su paridad.
b. Hacer un bosquejo de la gráfica y hallar el rango.

15. Hallar el dominio, graficar y determinar el rango de las funciones:

a. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 0\,; \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1\,; \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 \le x\,. \end{cases}$

b. $g(x) = \dfrac{2x}{|\,x\,| + 2x}$.

16. Determinar dominio, raíces, un esbozo de la gráfica de la siguiente función y su rango.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x+3| & \text{si } -3 < x < 1; \\ 1 + 2x - x^2 & \text{si } x \geq 1\,. \end{cases}$$

17. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -3\,; \\ \left| x^2 + x - 2 \right| & \text{si } -3 \leq x \leq 1\,; \\ 1 - x & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

   a. Trace su gráfica.
   b. Determine su dominio, rango y raíces.

18. Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} |3x+1| & \text{si } x \leq 0\,; \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 < x < 3\,; \\ -3 & \text{si } x \geq 3\,, \end{cases}$$

obtener la gráfica de f, su dominio, su rango y sus raíces.

19. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x + 7 & \text{si } x < -5\,; \\ 2 & \text{si } -5 \leq x < -3\,; \\ \left| 4 - x^2 \right| & \text{si } -3 \leq x \leq 3\,; \\ 2 & \text{si } 3 < x < 6\,; \\ \dfrac{-x}{6} + \dfrac{7}{6} & \text{si } x \geq 6\,. \end{cases}$$

Determine:

   a. Gráfica y rango de f.
   b. ¿Es par o impar f? Justifique su respuesta.

20. Graficar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1; \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1; \\ |x - 3| & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

21. Realizar un bosquejo de la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1; \\ \dfrac{|x|}{x} & \text{si } -1 \leq x < 2 \;\&\; x \neq 0; \\ 4 & \text{si } x = 2; \\ x^2 - 6x + 6 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

22. Obtener dominio y gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} |\,x\,| + 1 & \text{si } x \le 0\,; \\ -x^2 + 1 & \text{si } 0 < x \le 1\,; \\ 3x - 3 & \text{si } x \ge 2\,. \end{cases}$$

23. Considere las funciones

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\,; \\ 1 & \text{si } x \ge 0\,. \end{cases}$$

así como

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0\,; \\ 0 & \text{si } x = 0\,; \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Obtener el dominio, la gráfica y el rango de la función definida por

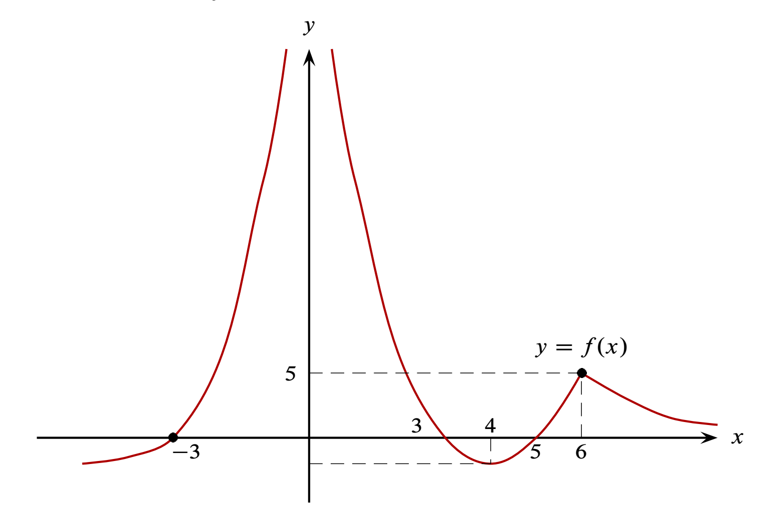
$$f(x) = sgn(x) + xU(x).$$

24. Sean las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } -10 < x \le 6; \\ x & \text{si } x > 6. \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \le 0; \\ x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Obtenga el dominio y la fórmula de la función $f + g$.

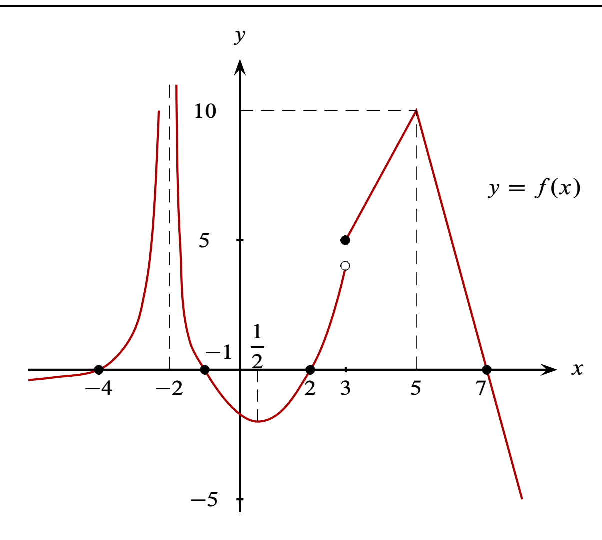
25. A partir de la gráfica de la función f



determine:

a. Los intervalos donde $f(x) > 0$ & $f(x) < 0$, así como los valores donde $f(x) = 0$, es decir, las raíces de f.
b. Los intervalos de monotonía de f, es decir, dónde es creciente y dónde es decreciente.

26. A partir de la gráfica de la función f:



Determinar:

a. Los intervalos donde $f(x) > 0$ & $f(x) < 0$; y los valores donde $f(x) = 0$.
b. Los intervalos de monotonía de f; es decir dónde es creciente y dónde es decreciente.

27. Para la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } -7 \leq x < -2\,; \\ -x^2 + 3 & \text{si } -2 \leq x \leq 3\,; \\ 4 & \text{si } 3 < x \leq 6\,. \end{cases}$$

a. Bosqueje su gráfica.
b. Determine su dominio, su rango y sus raíces.
c. A partir de la gráfica, encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d. A partir de la gráfica, encuentre los intervalos donde la función es positiva y donde es negativa.

28. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -6 \leq x < -2\,; \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 2\,; \\ -2x + 7 & \text{si } 2 < x \leq 5\,. \end{cases}$$

a. Bosqueje la gráfica de la función.
b. Determine el dominio y el rango de la función; encuentre también sus raíces.
c. A partir de la gráfica, encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
d. A partir de la gráfica, encuentre los intervalos en donde la función es positiva y negativa.

29. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq -2\,; \\ \left| x^2 - 1 \right| & \text{si } x \in (-2, 2)\,; \\ -2 & \text{si } x \geq 2\,. \end{cases}$$

Bosquejar su gráfica.

Obtener el dominio, raíces y especificar los intervalos donde: a. $f(x) > 0$; b. $f(x) < 0$; c. $f(x)$ crece; d. $f(x)$ decrece.

30. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \leq 0\,; \\ |\,x - 2\,| & \text{si } 0 < x < 4\,; \\ 3 & \text{si } x \geq 4\,. \end{cases}$$

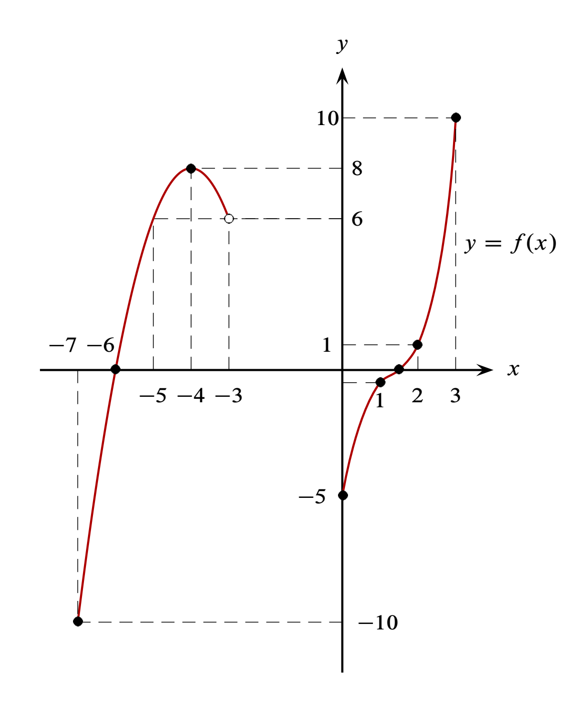
a. Grafique la función.

b. ¿Cuáles son el rango y las raíces de f?

c. ¿Cuáles son los intervalos de monotonía de f?

d. ¿La función f es par o impar? Justifique su respuesta.

31. En el dibujo aparece una parte de la gráfica de la función f.



a. Complete esta gráfica sabiendo que se trata de una función par y también determine su dominio, raíces y rango (imagen).

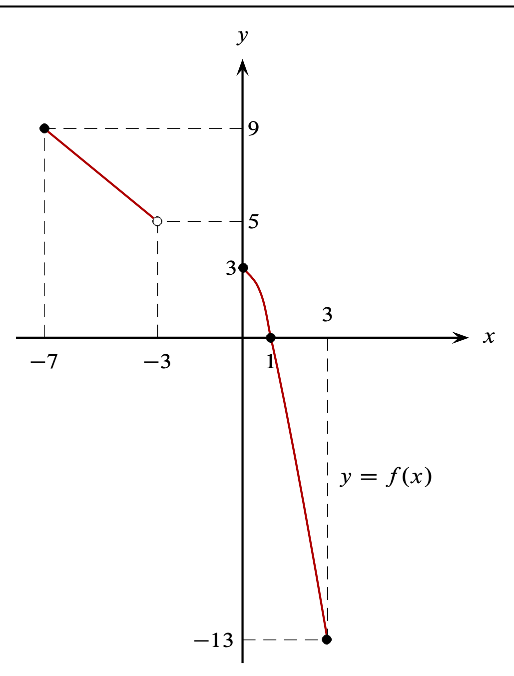
b. Determine las soluciones de las desigualdades $f(x) > 0$ & $f(x) < 0$.

c. Determine los intervalos donde esta función f es

i. creciente;

ii. decreciente.

32. La siguiente figura es parte de la gráfica de una función f:



a. Completar la gráfica sabiendo que es una función par.

b. Determinar dominio, raíces y rango.

c. Determinar los intervalos de monotonía.

Ejercicios 2.6.1 *Tipos de funciones, página* **??**

1. No es par ni impar .

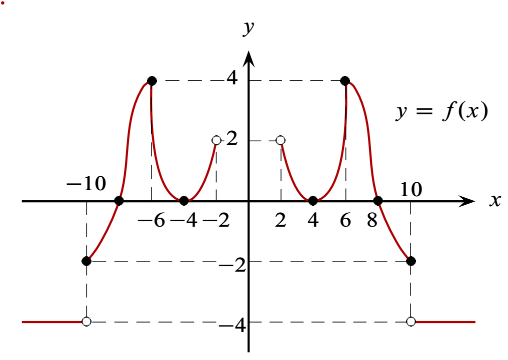
2. $f(x)$ no es par ni impar .

3. Es impar .

4. Sí .

5. Sí .

6.



$D_f = (-\infty, -2) \bigcup (2, +\infty)$;

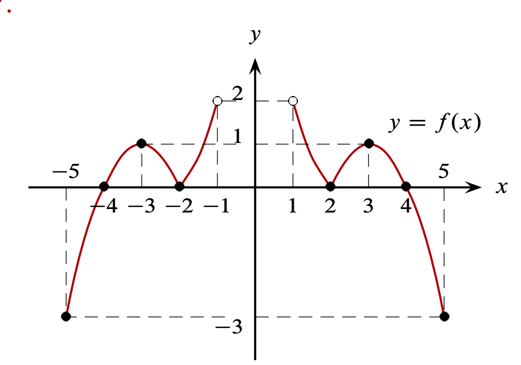
raíces: $x = -8, -4, 4$ & 8;

rango = $\{-4\} \bigcup [-2, 4]$;

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-8, -4) \bigcup (-4, -2) \bigcup (2, 4) \bigcup (4, 8)$;

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -8) \bigcup (8, +\infty)$.

7.

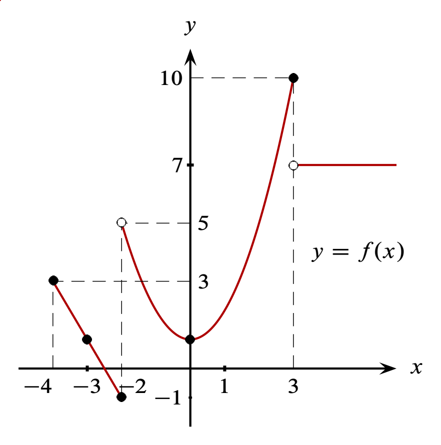


$D_f = [-5, -1) \bigcup (1, 5]$;

$R_f = [-3, 2)$;

raíces $x = -4, x = -2, x = 2$ & $x = 4$.

8.

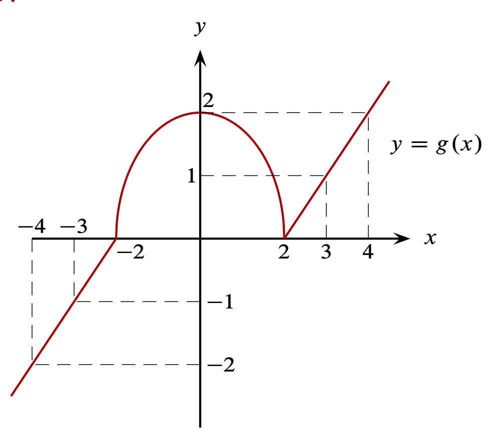


$D_f = [-4, +\infty)$; $R_f = [-1, 10]$;

$f(-4) = 3,\ f(-3) = 1,\ f(-2) = -1,\ f(0) = 1$;

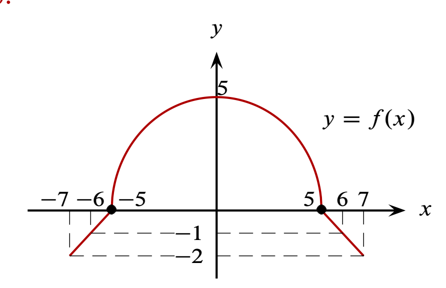
$f(3) = 10,\ f(5) = 7$ y $f(1\,000) = 7$.

9.



no es par ni impar; $R_g = \mathbb{R}$.

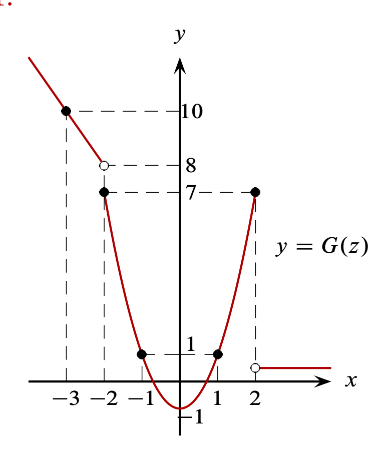
10.



$R_f = (-\infty, 5]$; las raíces son $x = \pm 5$;

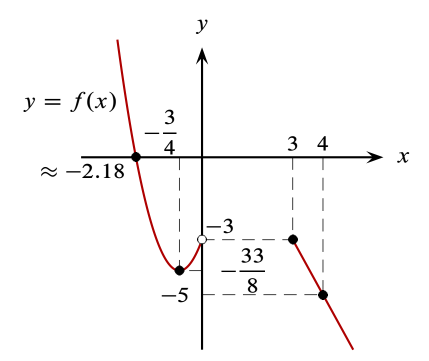
la función es par .

11.



12. $D_f = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$;

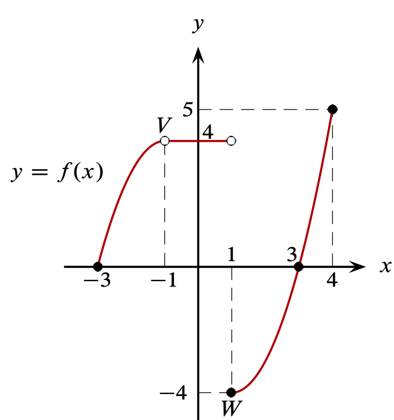
la única raíz es $x = \dfrac{-3 - \sqrt{33}}{4}$;



$R_f = \mathbb{R}$.

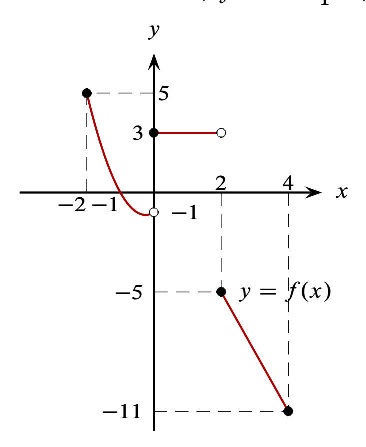
13. Dominio: $[-3, 4] - \{-1\}$; rango: $[-4, 5]$;

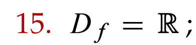
raíces: $x = -3$ & $x = 3$;

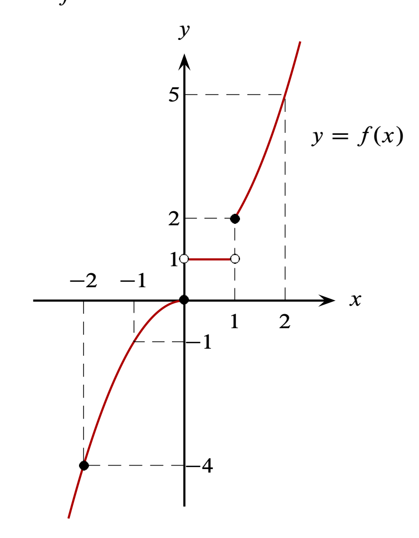


14. $D_f = [-2, 4]$; $R_f = [-11, -5] \bigcup \left(-\dfrac{9}{8}, 5\right]$;

raíces: $x = -1$; f no es par, ni impar.

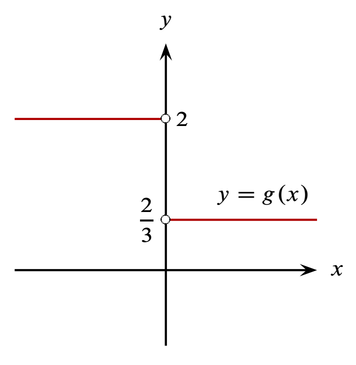



15. $D_f = \mathbb{R}$;



$R_f = (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, +\infty)$.

$D_g = \mathbb{R} - \{0\}$;

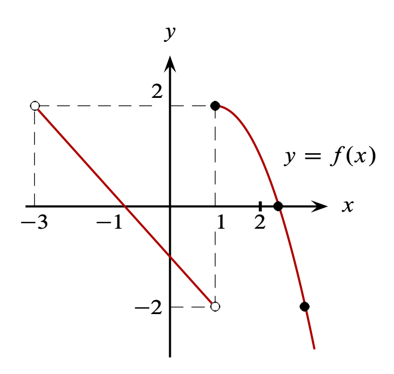


$R_g = \left\{\dfrac{2}{3}, 2\right\}$.

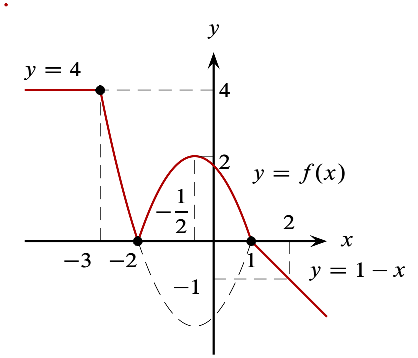
16. $D_f = (-3, +\infty)$;

las raíces son $x = -1$ & $x = 1 + \sqrt{2}$;

$R_f = (-\infty, 2]$.



17.

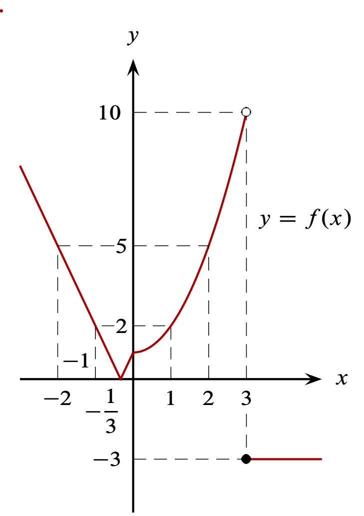


$D_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$;

$R_f = (-\infty, 4]$;

raíces $x = -2$ & $x = 1$.

18.

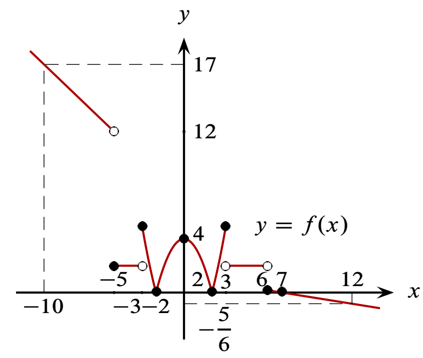


$D_f = \mathbb{R}$;

$R_f = \{-3\} \bigcup [0, +\infty)$;

raíz $x = -\dfrac{1}{3}$.

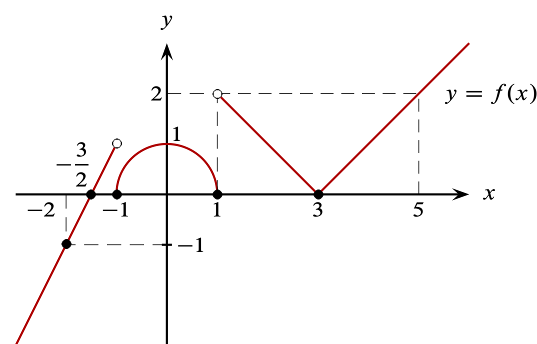
19.



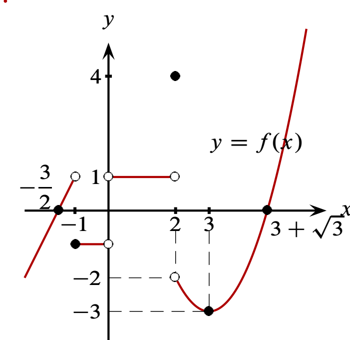
$R_f = (-\infty, 5] \bigcup (12, +\infty)$;

la función no es par ni impar.

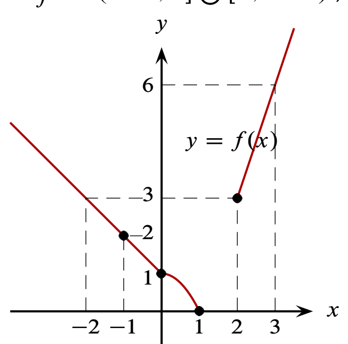
20.



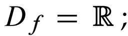
21.



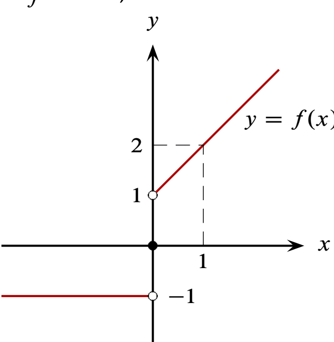
22. $D_f = (-\infty, 1] \bigcup [2, +\infty)$;



23.



$D_f = \mathbb{R}$;



$R_f = \{-1, 0\} \bigcup (1, +\infty)$.

24. $D_{f+g} = (-10, +\infty)$;

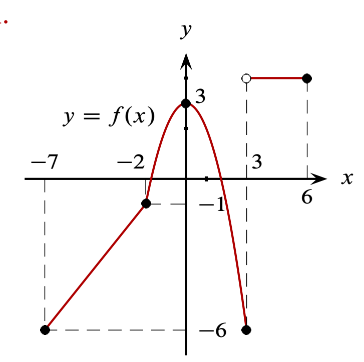
$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^3 + 1 - 2x & \text{si } x \in (-10, 0]\,; \\ x^3 + x^2 & \text{si } x \in (0, 6]\,; \\ x + x^2 & \text{si } x \in (6, +\infty)\,. \end{cases}$$

25. a. En $(-3, 0) \bigcup (0, 3) \bigcup (5, +\infty)$, $f(x) > 0$;
en $(-\infty, -3) \bigcup (3, 5)$, $f(x) < 0$;
$f(x) = 0$ si $x = -3$, $x = 3$ & $x = 5$;

b. f es creciente en $(-\infty, 0) \bigcup (4, 6)$;
f es decreciente en $(0, 4) \bigcup (6, +\infty)$.

26. $f(x) > 0$ si $x \in (-4, -2) \bigcup (-2, -1) \bigcup (2, 7)$;
$f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -4) \bigcup (-1, 2) \bigcup (7, +\infty)$;
$f(x) = 0$ si $x = -4, -1, 2, 7$;
f es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(0.5, 5)$;
f es decreciente en $(-2, 0.5)$ y en $(5, +\infty)$.

27. a.

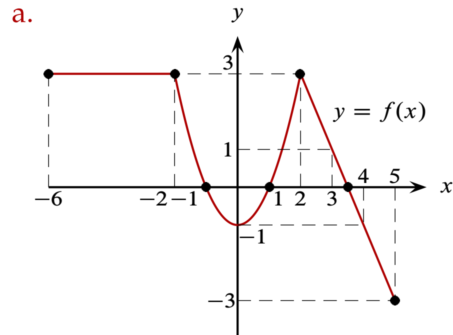


b. $D_f = [-7, 6]$ y $R_f = [-6, 3] \bigcup \{4\}$;
raíces $x = \pm\sqrt{3}$;

c. en $[-7, 0]$ creciente y en $[0, 3]$ decreciente;
en $(3, 6]$ es constante;

d. $f(x) > 0$ si $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \bigcup (3, 6]$;
$f(x) < 0$ si $x \in [-7, -\sqrt{3}) \bigcup (\sqrt{3}, 3]$.

28. a.

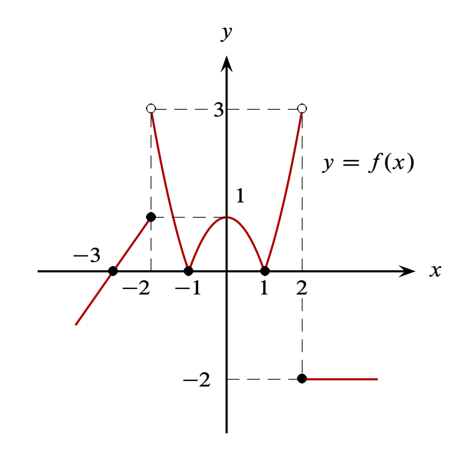


b. $D_f = [-6, 5]$, $R_f = [-3, 3]$; raíces $x = \pm 1, \dfrac{7}{2}$;

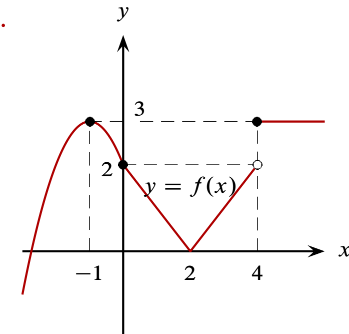
c. $f(x)$ crece en $[0, 2]$ y decrece en $[-2, 0] \bigcup [2, 5]$;

d. $f(x) > 0$ si $x \in [-6, -1) \bigcup \left(1, \dfrac{7}{2}\right)$;
$f(x) < 0$ si $x \in (-1, 1) \bigcup \left(\dfrac{7}{2}, 5\right]$.

29. $D_f = \mathbb{R}$;
las raíces: $\{-3, -1, 1\}$;
$f(x) > 0$ si $x \in (-3, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, 2)$;
$f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -3) \bigcup [2, \infty)$;
$f(x)$ crece si $x \in (-\infty, -2)$, $(-1, 0)$ y en $(1, 2)$;
$f(x)$ decrece si $x \in (-2, -1)$ y en $(0, 1)$;



30. a.



b. $R_f = (-\infty, 3]$; sus raíces son $-1-\sqrt{3}$ y 2;

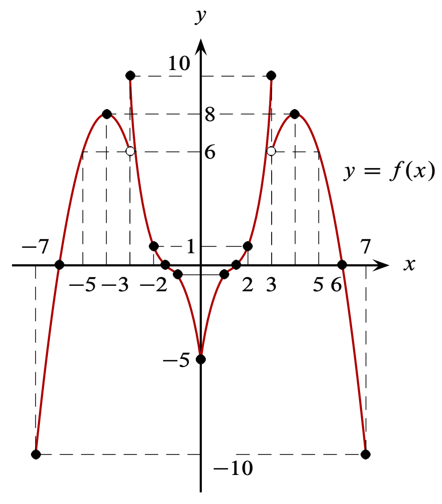
c. f es creciente en $(-\infty, -1] \bigcup [2, 4]$;

f es decreciente en $[-1, 2]$;

f constante en $[4, +\infty)$;

d. f no es par y tampoco es impar .

31. a.



$D_f = (-7, 7)$;

raíces: $-6, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$ y 6;

$R_f = [-10, 10]$;

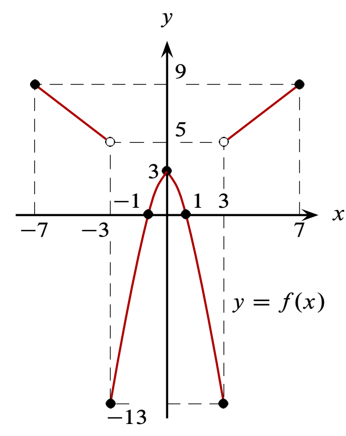
b. $f(x) > 0$ si $x \in \left(-6, -\frac{3}{2}\right) \bigcup \left(\frac{3}{2}, 6\right)$;

$f(x) < 0$ si $x \in (7, -6) \bigcup \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \bigcup (6, 7)$;

c. f es creciente en $(-7, -4)$, $[0, 3]$ y en $[3, 4)$;

f es decreciente en $(-4, -3)$, $[-3, 0]$ y en $(4, 7)$.

32.



$D_f = [-7, 7]$;

raíces: $\{-1, 1\}$;

$R_f = [-13, 3] \bigcup (5, 9]$;

la función decrece en $[-7, -3)$ y en $[0, 3]$;

la función crece en $[-3, 0]$ y en $[3, 7]$.

CAPÍTULO

2

Funciones

[1]

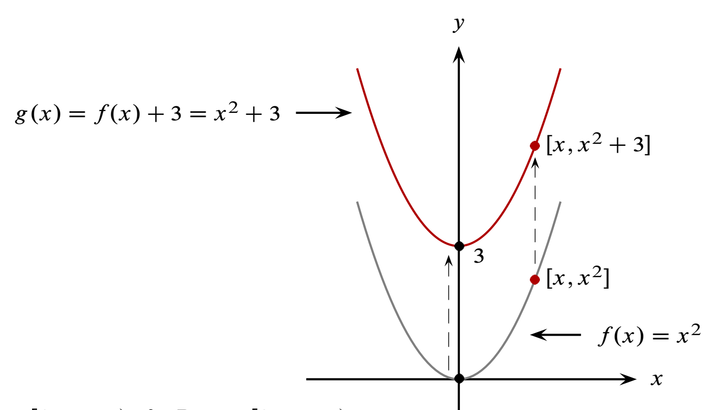
2.7 Transformaciones de funciones

Se pretende ahora que, a partir del conocimiento de la gráfica de una función f, esencialmente mediante traslaciones, contracciones y reflexiones, se obtenga un bosquejo de la gráfica de una función g de la forma

$$g(x) = kf(ax - b) + c\,.$$

Ejemplo 2.7.1 *La gráfica de:* $g(x) = x^2 + 3$ *es la gráfica de* $f(x) = x^2$ *desplazada hacia arriba* 3 *unidades.*

▼



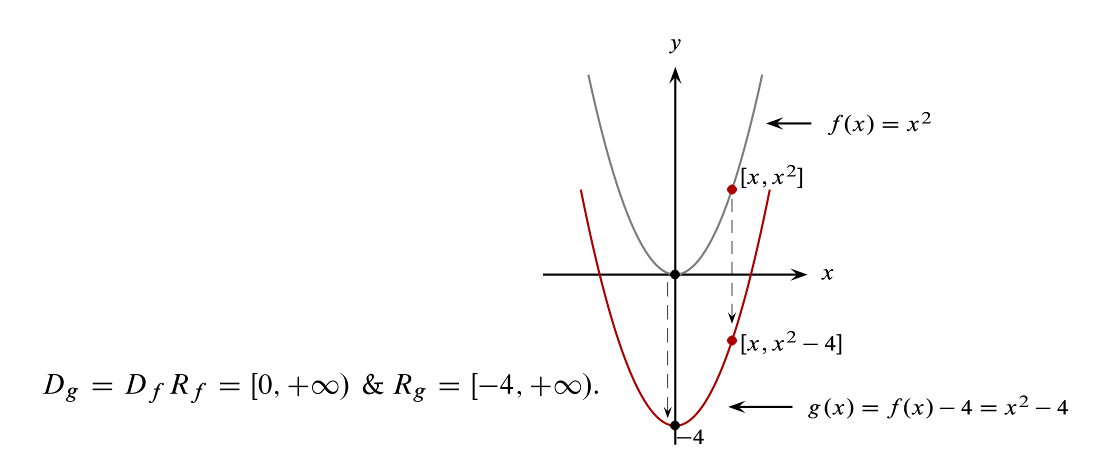
$D_g = D_f$, $R_f = [0, +\infty)$ & $R_g = [3, +\infty)$.

□

Ejemplo 2.7.2 *La gráfica de:* $g(x) = x^2 - 4$ *es la gráfica de* $f(x) = x^2$ *desplazada hacia abajo* 4 *unidades.*

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008





$D_g = D_f R_f = [0, +\infty)$ & $R_g = [-4, +\infty)$.

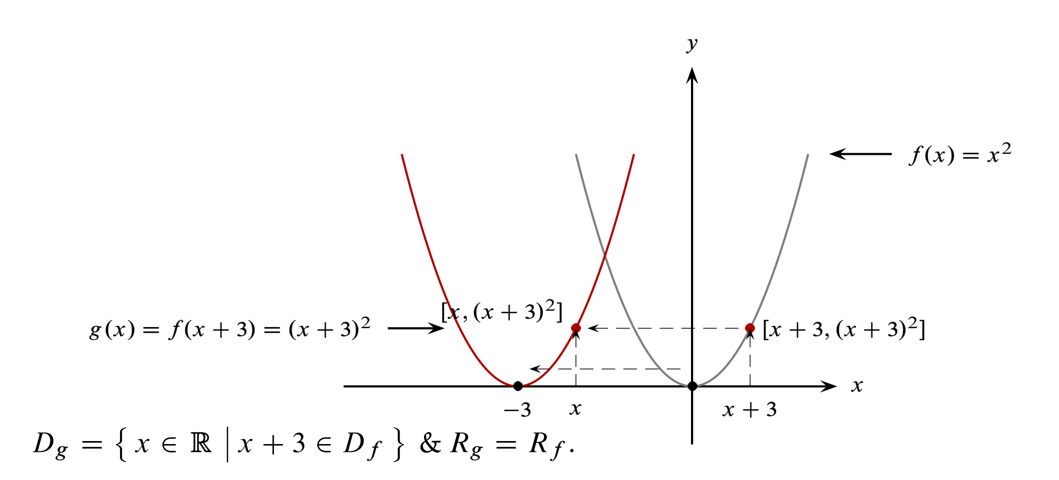
□

De los dos ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de $g(x) = f(x) + c$ es la gráfica de f desplazada verticalmente c unidades.
  En este caso $D_g = D_f$ & $R_g = \{\, f(x) + c \mid f(x) \in R_f \,\}$.

Ejemplo 2.7.3 *La gráfica de $g(x) = (x + 3)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia la izquierda 3 unidades.*

▼

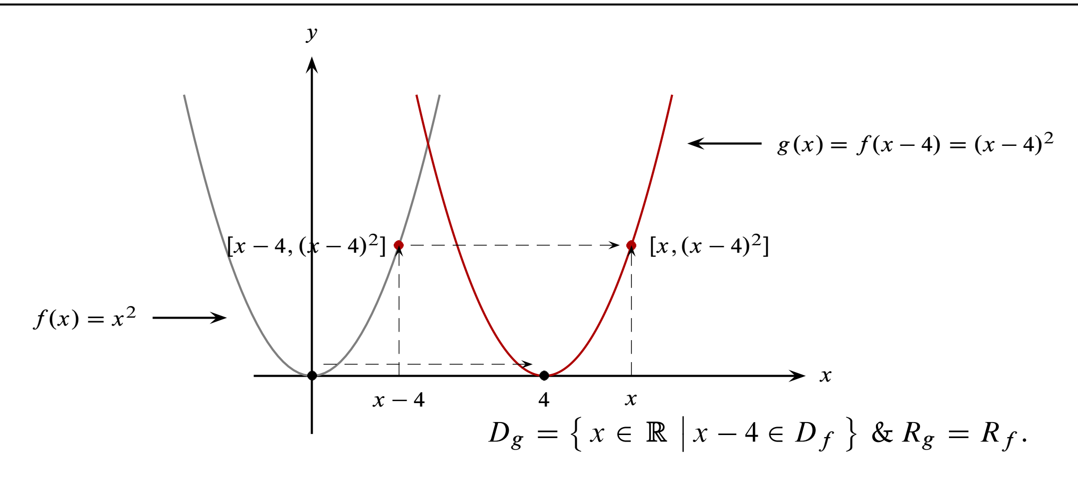


$D_g = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x + 3 \in D_f \,\}$ & $R_g = R_f$.

□

Ejemplo 2.7.4 *La gráfica de $g(x) = (x - 4)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia la derecha 4 unidades.*

▼



$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x - 4 \in D_f \right\} \;\&\; R_g = R_f.$$

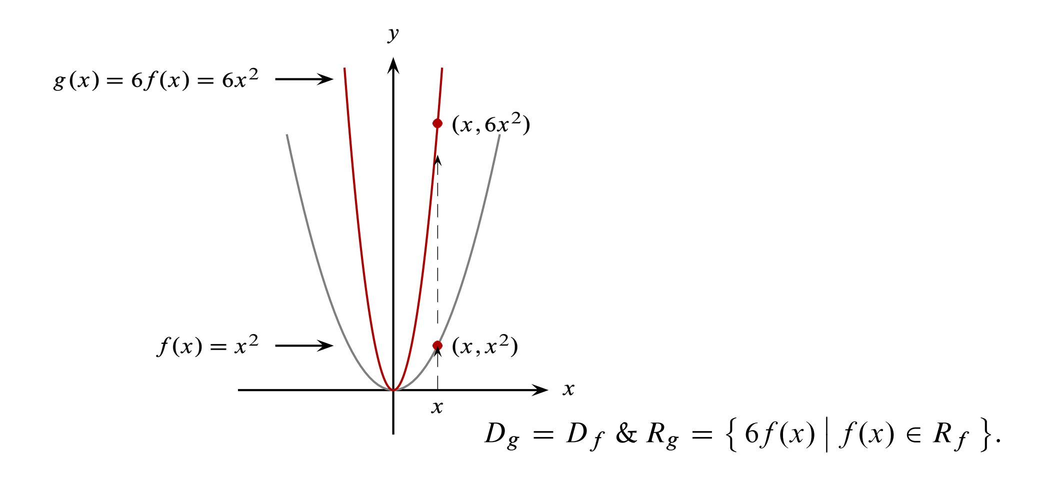
□

De los dos ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de: $g(x) = f(x-c)$ es la gráfica de f desplazada horizontalmente c unidades.
  En este caso $D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x - c \in D_f \right\}$ & $R_g = R_f$.

Ejemplo 2.7.5 *La gráfica de $g(x) = 6x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ alargada 6 veces en la dirección vertical.*

▼

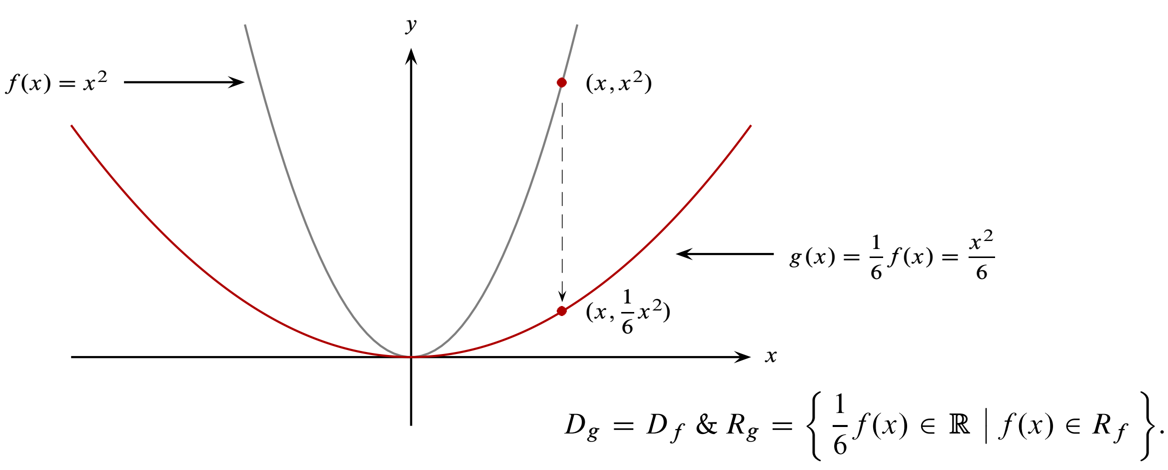


$$D_g = D_f \;\&\; R_g = \left\{ 6f(x) \,\middle|\, f(x) \in R_f \right\}.$$

□

Ejemplo 2.7.6 *La gráfica de $g(x) = \dfrac{1}{6}x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ comprimida 6 veces en la dirección vertical.*

▼

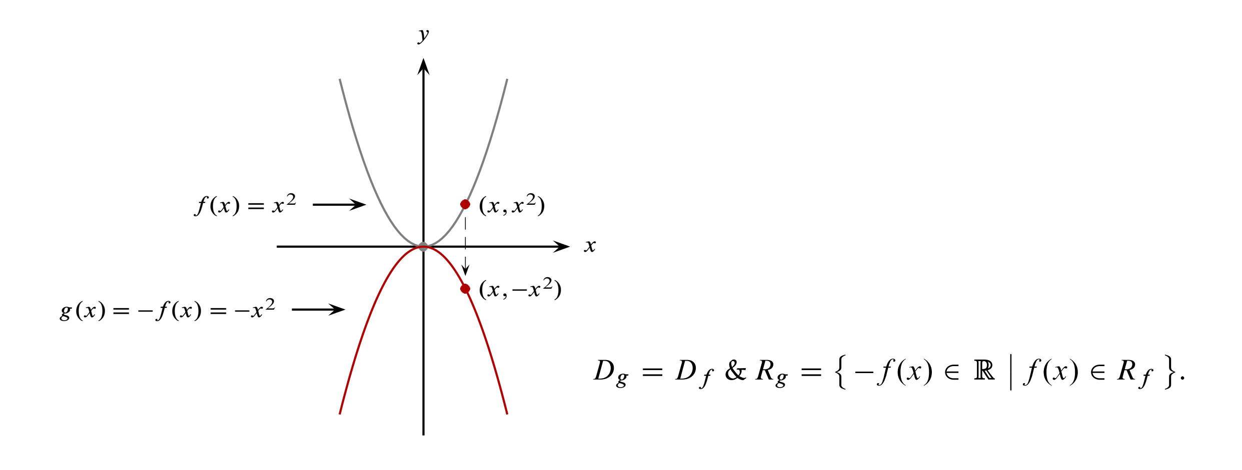


$$D_g = D_f \;\&\; R_g = \left\{ \frac{1}{6}f(x) \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) \in R_f \right\}.$$

□

Ejemplo 2.7.7 *La gráfica de* $g(x) = -x^2$ *es la gráfica de* $f(x) = x^2$ *reflejada respecto al eje* x.

▼



$D_g = D_f$ & $R_g = \{ -f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \in R_f \}$.

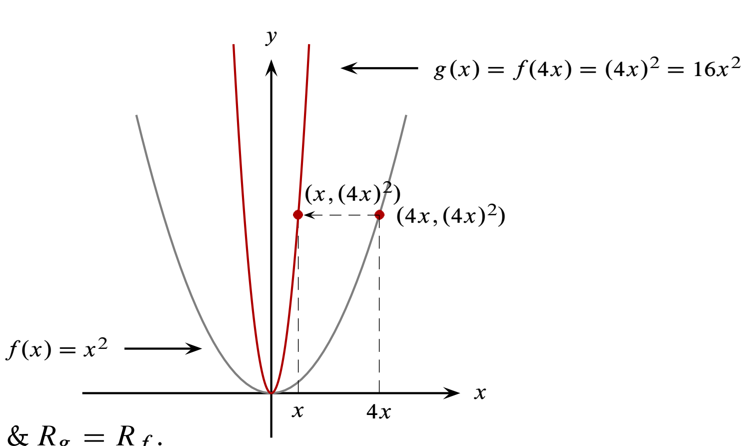
□

De los tres ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de $g(x) = kf(x)$ es la gráfica de f:
  1. Alargada verticalmente si $k > 1$.
  2. Comprimida verticalmente si $0 < k < 1$.
  3. Si $k < 0$, consideramos a la gráfica de la función $|k|f(x) = -kf(x)$ y la reflejamos con respecto al eje de las x.
     $D_f = D_g$, $R_g = \{ kf(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \}$.

Ejemplo 2.7.8 *La gráfica de* $g(x) = (4x)^2$ *es la gráfica de* $f(x) = x^2$ *comprimida horizontalmente* 4 *veces.*

▼

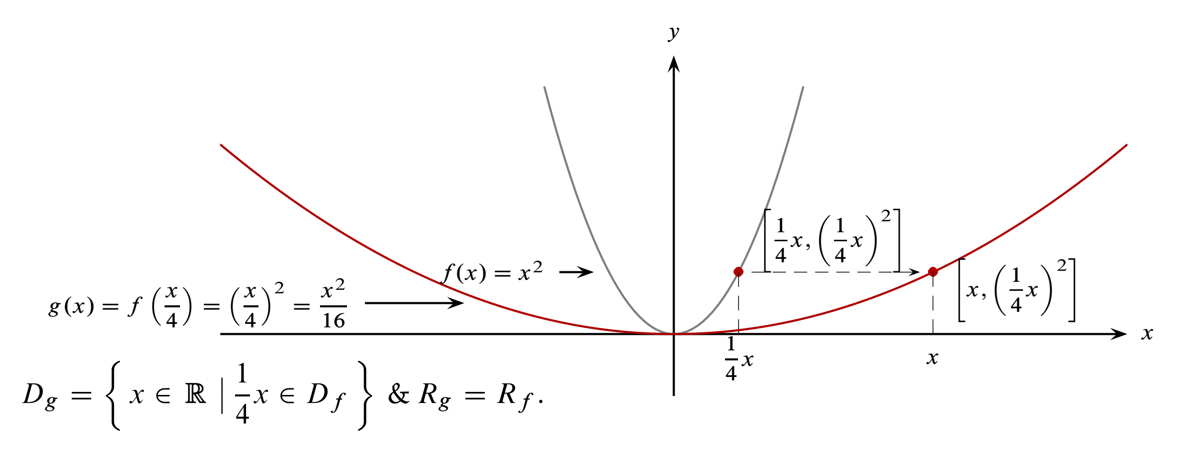


$D_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid 4x \in D_f \}$ & $R_g = R_f$.

□

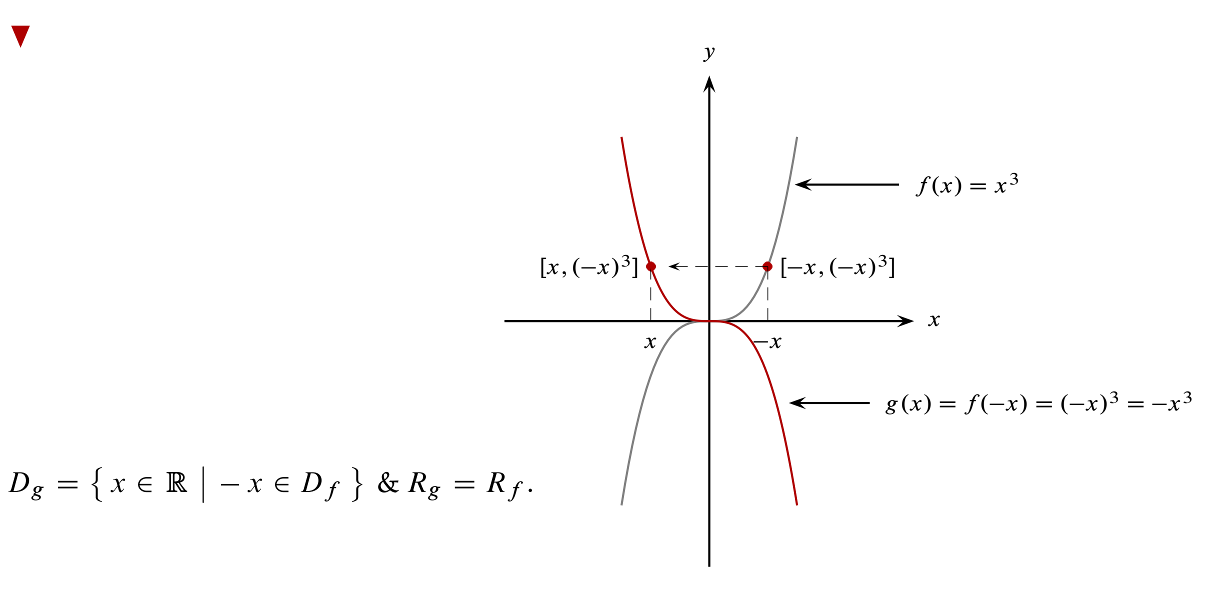
Ejemplo 2.7.9 *La gráfica de* $g(x) = \left(\dfrac{1}{4}x\right)^2$ *es la gráfica de* $f(x) = x^2$ *alargada horizontalmente* 4 *veces.*





□

Ejemplo 2.7.10 *La gráfica de* $g(x) = (-x)^3$ *es la gráfica de* $f(x) = x^3$ *reflejada respecto al eje* y*.*



□

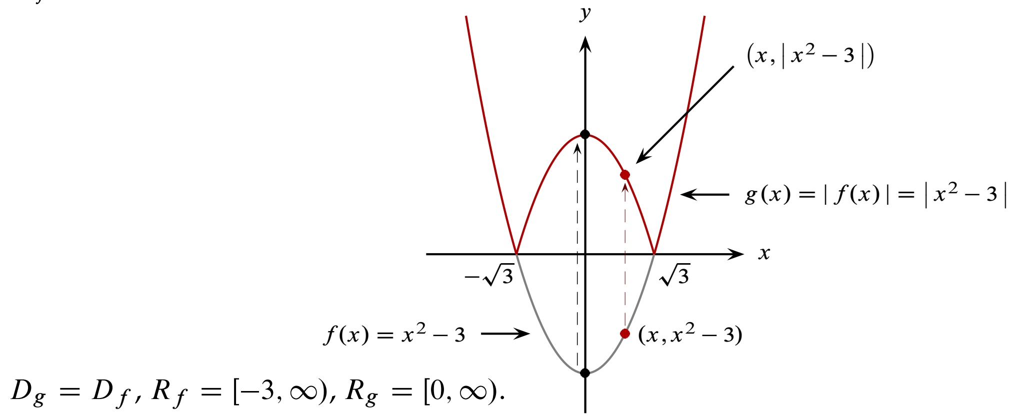
De los tres ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de $g(x) = f(kx)$ es la gráfica de f:
  1. Comprimida horizontalmente si $k > 1$.
  2. Alargada horizontalmente si $0 < k < 1$.
  3. Si $k < 0$, consideramos a la gráfica de la función $f(|k|x) = f(-kx)$ y la reflejamos con respecto al eje de las y.
     $D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid kx \in D_f \right\}$, $R_g = R_f$.

Por otro lado, tenemos el siguiente resultado:

Ejemplo 2.7.11

Si $g(x) = \left| x^2 - 3 \right|$, *la gráfica de* g *es la gráfica de* $f(x) = x^2 - 3$ *cuando* $x^2 - 3 \geq 0$ *y la simétrica de* f *con respecto al eje de las* x *cuando* $x^2 - 3 < 0$.

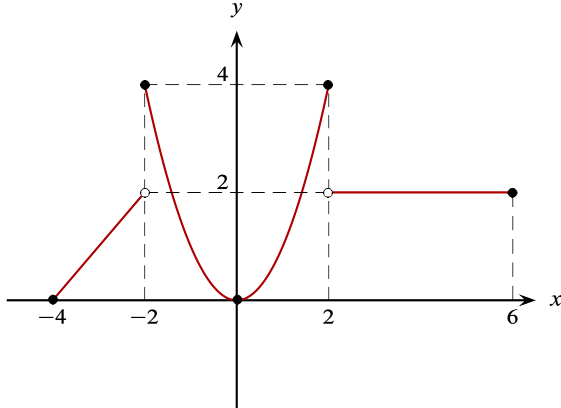


$D_g = D_f$, $R_f = [-3, \infty)$, $R_g = [0, \infty)$.

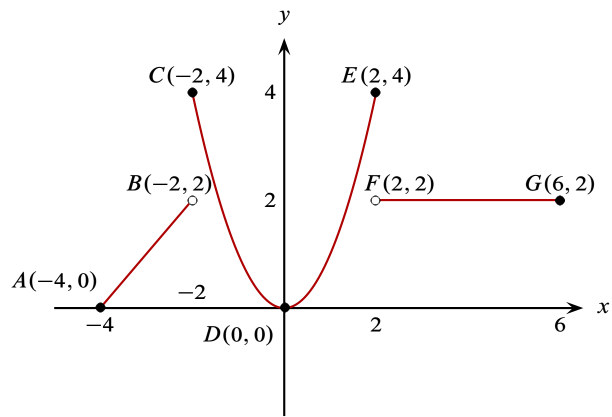
- Si $g(x) = |\, f(x) \,|$, la gráfica de $g(x)$ es la gráfica de f cuando $f(x) \geq 0$ y es la simétrica de f con respecto al eje de las x cuando $f(x) < 0$.

  $D_g = D_f$, $R_g = \left\{ |\, f(x) \,| \;\middle|\; f(x) \in \mathbb{R} \right\}$.

Ejemplo 2.7.12 *Considerando que la siguiente curva es la gráfica de la función* f, *bosquejar la gráfica de la función* $g(x) = f(2x) - 3$.



▼ Elegimos 7 puntos apropiados que determinan la gráfica de f cuyas imágenes determinarán la de g:



1. Primero se obtiene la curva $y = f(2x)$ comprimiendo horizontalmente la curva $y = f(x)$ por un factor de 2. La transformación de los puntos ocurre así:

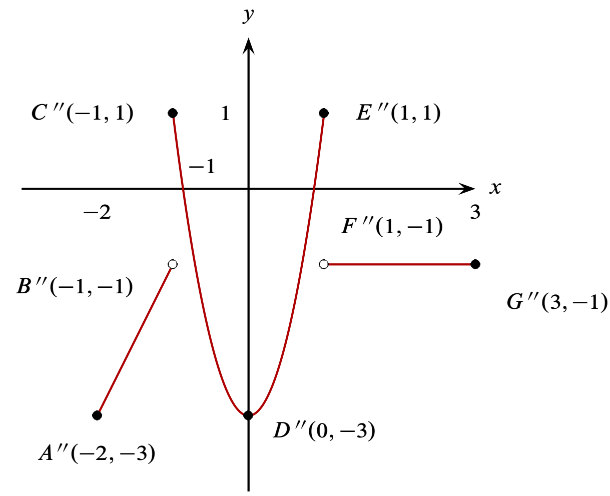
$$A(-4,0),\ B(-2,2),\ C(-2,4),\ D(0,0),\ E(2,4),\ F(2,2)\ \&\ G(6,2)\,;$$
$$A'(-2,0),\ B'(-1,2),\ C'(-1,4),\ D'(0,0),\ E'(1,4),\ F'(1,2)\ \&\ G'(3,2)\,.$$

2. Luego se obtiene la curva $y = f(2x) - 3$ desplazando verticalmente 3 unidades hacia abajo a la curva $y = f(2x)$.

   La transformación de los puntos ocurre así:

$$A'(-2,0),\ B'(-1,2),\ C'(-1,4),\ D'(0,0),\ E'(1,4),\ F'(1,2)\ \&\ G'(3,2)\,;$$
$$A''(-2,-3),\ B''(-1,-1),\ C''(-1,1),\ D''(0,-3),\ E''(1,1),\ F''(1,-1)\ \&\ G''(3,-1)\,.$$

3. La gráfica de $g(x) = f(2x) - 3$ es así:



También lo podríamos resolver directamente notando que $D_f = [-4, 6]$ y que por tanto el $D_g = [-2, 3]$. Usando los puntos elegidos anterioremente tenemos:

$A\,(-4,0)$: $g(-4) = f(-4) - 3 = 0 - 3 = -3 \Rightarrow A''\,(-2,-3) \in G_g\,;$

$B\,(-2,2)$: $g(-1^-) = f(-2^-) - 3 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow B''\,(-1,-1) \notin G_g\,;$

$C\,(-2,4)$: $g(-1) = f(-2) - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow C''\,(-1,1) \in G_g\,;$

$D\,(0,0)$: $g(0) = f(0) - 3 = 0 - 3 = -3 \Rightarrow D''\,(0,-3) \in G_g\,;$

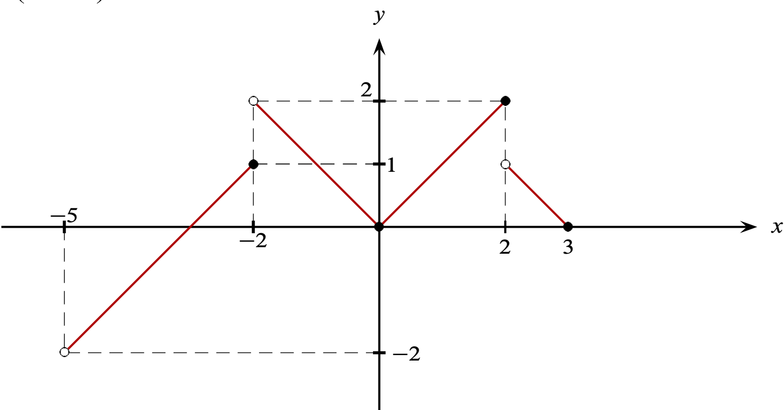
$E\,(2,4)$: $g(1) = f(2) - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow E''\,(1,1) \in G_g\,;$

$F\,(2,2)$: $g(1^+) = f(2^+) - 3 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow F''\,(1,-1) \notin G_g\,;$

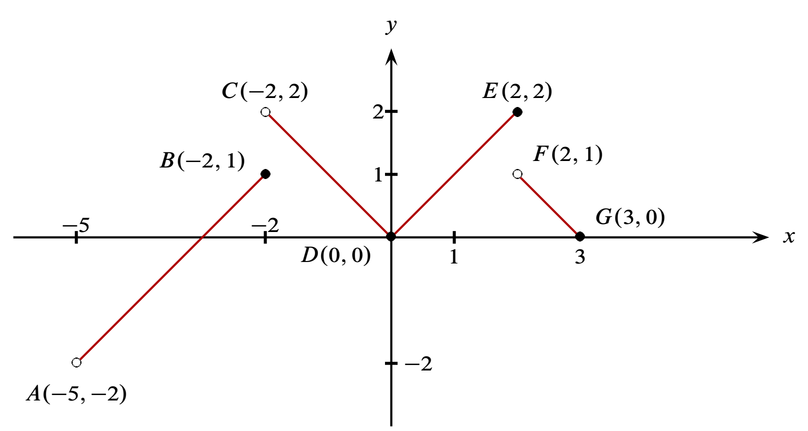
$G\,(6,2)$: $g(3) = f(6) - 3 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow G''\,(3,-1) \in G_g\,.$

□

Ejemplo 2.7.13 *Considerando que la siguiente figura es la gráfica de una función* f*, bosquejar la gráfica de la función* $g(x) = 1 - 2f(x-3)$.



▼ Elegimos 7 puntos apropiados que determinan la gráfica de f cuyas imágenes determinarán la de g:



1. Primero se obtiene la curva $y = f(x-3)$ desplazando horizontalmente 3 unidades hacia la derecha a la curva $y = f(x)$. La transformación de los puntos ocurre así:

$$\begin{array}{lllllll} A(-5,-2), & B(-2,1), & C(-2,2), & D(0,0), & E(2,2), & F(2,1) & \& \, G(3,0)\,; \\ A'(-2,-2), & B'(1,1), & C'(1,2), & D'(3,0), & E'(5,2), & F'(5,1) & \& \, G'(6,0)\,. \end{array}$$

2. Luego se obtiene la curva $y = 2f(x-3)$ alargando verticalmente a la curva $y = f(x-3)$ por un factor de 2. La transformación de los puntos ocurre así:

$$\begin{array}{lllllll} A'(-2,-2), & B'(1,1), & C'(1,2), & D'(3,0), & E'(5,2), & F'(5,1) & \& \, G'(6,0)\,; \\ A''(-2,-4), & B''(1,2), & C''(1,4), & D''(3,0), & E''(5,4), & F''(5,2) & \& \, G''(6,0)\,. \end{array}$$

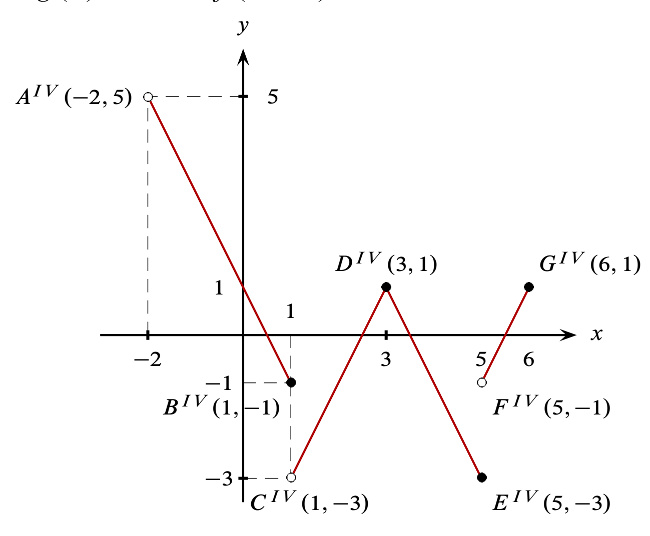
3. Después se obtiene la curva $y = -2f(x-3)$ poniendo un espejo en el eje x para reflejar a la curva $y = 2f(x-3)$. Esto se consigue multiplicando a las ordenadas por -1. La transformación de los puntos ocurre así:

$$\begin{array}{lllllll} A''(-2,-4), & B''(1,2), & C''(1,4), & D''(3,0), & E''(5,4), & F''(5,2) & \& \, G''(6,0)\,; \\ A'''(-2,4), & B'''(1,-2), & C'''(1,-4), & D'''(3,0), & E'''(5,-4), & F'''(5,-2) & \& \, G'''(6,0)\,. \end{array}$$

4. Finalmente se obtiene la curva $y = -2f(x-3)+1$ desplazando hacia arriba una unidad a la curva $y = -2f(x-3)$. La transformación de los puntos ocurre así:

$$A'''(-2,4),\ \ B'''(1,-2),\ \ C'''(1,-4),\ \ D'''(3,0),\ \ E'''(5,-4),\ \ F'''(5,-2)\ \ \&\ G'''(6,0)\,;$$
$$A^{IV}(-2,5),\ B^{IV}(1,-1),\ C^{IV}(1,-3),\ D^{IV}(3,1),\ E^{IV}(5,-3),\ F^{IV}(5,-1)\ \&\ G^{IV}(6,1)\,.$$

5. Por lo tanto, la gráfica de $g(x) = 1 - 2f(x-3)$ es



También lo podríamos resolver directamente notando que $D_f = [-5,3]$ y que por tanto el $D_g = [-2,6]$. Usando los puntos elegidos anterioremente tenemos:

$A\,(-5,-2)$: $g(-2) = 1-2f(-5) = 1-2(-2) = 1+4 = 5 \Rightarrow A^{iv}\,(-2,-5) \notin G_g$;

$B\,(-2,-1)$: $g(1) = 1-2f(-2) = 1-2(1) = 1-2 = -1 \Rightarrow B^{iv}\,(1,-1) \in G_g$;

$C\,(-2,2)$: $g(1^+) = 1-2f(-2^+) = 1-2(2) = 1-2 = -3 \Rightarrow C^{iv}\,(1,-3) \notin G_g$;

$D\,(0,0)$: $g(3) = 1-2f(0) = 1-2(0) = 1-0 = 0 \Rightarrow D^{iv}\,(3,1) \in G_g$;

$E\,(2,2)$: $g(5) = 1-2f(2) = 1-2(2) = 1-4 = -3 \Rightarrow E^{iv}\,(5,-3) \in G_g$;

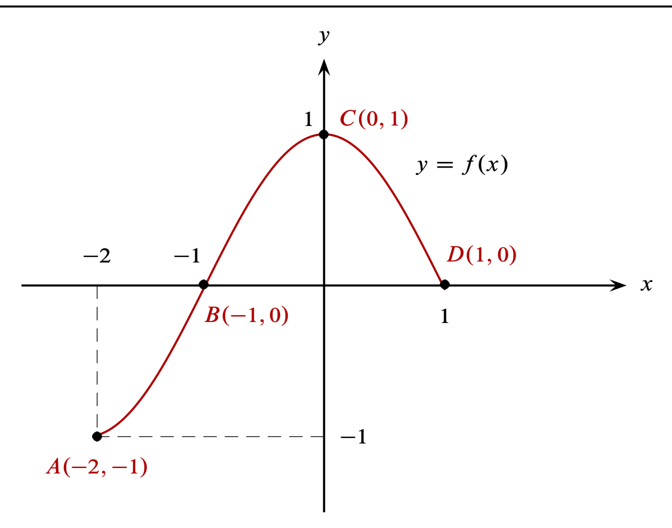
$F\,(2,1)$: $g(5^+) = 1-2f(2^+) = 1-2(1) = 1-2 = -1 \Rightarrow F^{iv}\,(5,-1) \notin G_g$;

$G\,(3,0)$: $g(6) = 1-2f(3) = 1-2(0) = 1-0 = 1 \Rightarrow G^{iv}\,(6,1) \in G_g$.

□

Ejercicios 2.7.1 *Soluciones en la página 15*

1. Considerando la siguiente figura como la gráfica de cierta función f,

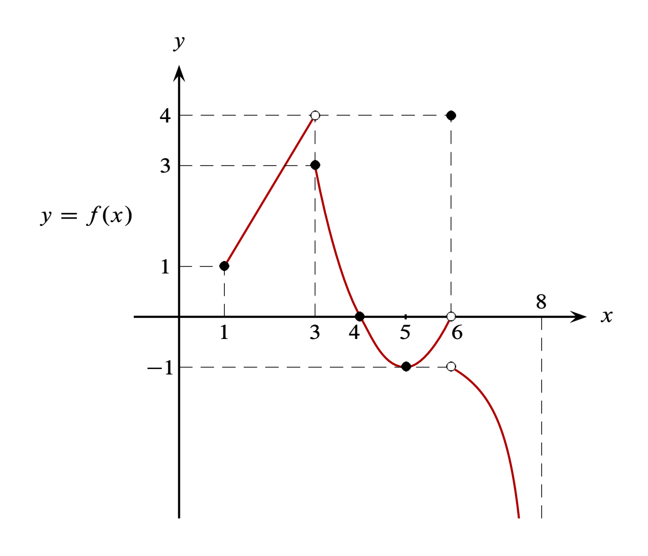


realizar un bosquejo de la gráfica de la función

$$g(x) = -2f(x-1) + 3.$$

Especificar la nueva posición de los puntos $A(-2, -1)$; $B(-1, 0)$; $C(0, 1)$ & $D(1, 0)$.

2. Considerando que la figura siguiente es un bosquejo de la gráfica de cierta función f, obtenga el dominio, el rango, las raíces así como un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = -3f(x+5) + 2$.



3. Considerando la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0\,; \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

a. Realizar un bosquejo de la gráfica de la función f.

b. Realizar un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = f(x-3) - 2$.

c. Obtener dominio, rango y raíces de la función g.

4. Dada
$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si } x\leq -1\,;\\ 2x-3 & \text{si } x>-1\,.\end{cases}$$
Obtenga la gráfica de $h(x)=f(x-3)-1$.

5. Dada la función
$$g(t)=\begin{cases} 4-t^2 & \text{si } -3\leq t<1\,;\\ 3t & \text{si } 1<t<2\,.\end{cases}$$
   a. Bosquejar su gráfica y determinar dominio, rango y raíces.
   b. Obtener los intervalos en los que $g(t)\geq 0$ así como aquellos en donde $g(t)<0$.
   c. A partir de la gráfica obtenida, bosquejar la gráfica de $f(t)=2g(t+2)-3$.

6. Considere la función:
$$f(x)=\begin{cases} x+5 & \text{si } -8\leq x<0\,;\\ \sqrt{x} & \text{si } 0\leq x\leq 6\,.\end{cases}$$
   a. Determinar dominio, raíces o puntos en donde la función vale cero, gráfica y rango de f.
   b. A partir de la gráfica de f, construir la gráfica de $h(x)=1-2f(x+3)$.

7. Considere la función f definida por
$$f(x)=\begin{cases} 1-2x & \text{si } x<0\,;\\ x^2 & \text{si } x\geq 1\,.\end{cases}$$
   a. Grafique la función f.
   b. Usando la gráfica de f, construir la gráfica de la función $h(x)=3-2f(2x+1)$ y obtener una expresión o fórmula para $h(x)$.

8. Sea
$$f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } -6\leq x<-4\,;\\ x^2+2x-3 & \text{si } -4\leq x\leq 0\,;\\ 2x-3 & \text{si } \quad 0<x<4\,,\end{cases}$$
determine:
   a. Un esbozo gráfico de la función.
   b. Dominio, rango, raíces, paridad, intervalos de monotonía e intervalos donde $f(x)>0$ y donde $f(x)<0$.
   c. Un esbozo gráfico para la función $g(x)=-f(x-1)+2$.

9. Sea
$$g(x)=\begin{cases} 2x-4 & \text{si } -4<x\leq -1\,;\\ -1 & \text{si } -1<x<3\,;\\ (x-4)^2 & \text{si } x\geq 3\,.\end{cases}$$

a. Obtenga dominio, raíces y un bosquejo de la gráfica de g, así como su rango.

b. Grafique la función $h(x) = g(x+3) - 2$, a partir de la gráfica de g.

10. Sea f la función dada por $f(t) = t^2$ con $0 \leq t \leq 1$.

    Sea g la función definida por

$$g(t) = \begin{cases} -f(-t) & \text{si } -1 \leq t \leq 0\,; \\ f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1\,. \end{cases}$$

a. Hallar el dominio y hacer un bosquejo de la gráfica de g indicando su rango o imagen.

b. Si $h(t) = 2g(t-1) + 3$, hacer un bosquejo de la gráfica de esta nueva función e indicar su dominio y rango.

11. Sean

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} & \text{si } x \leq -1; \\ |\,3x-4\,| & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

$$g(x) = 3f(x+1) - 4,$$

determinar las gráficas de ambas funciones, el dominio y el rango de la función g.

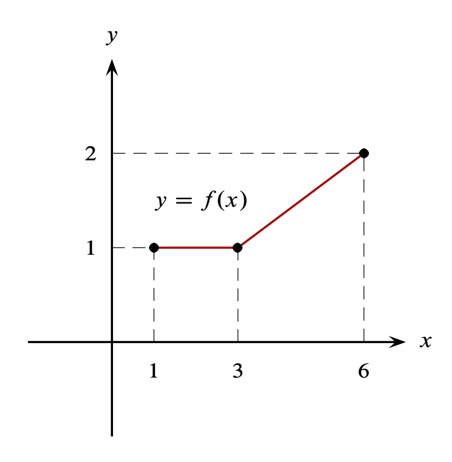
12. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } -3 < x \leq -1\,; \\ 1-x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2\,; \\ -1 & \text{si } 2 < x \leq 4\,. \end{cases}$$

a. Obtener la gráfica, el rango y las raíces de f.

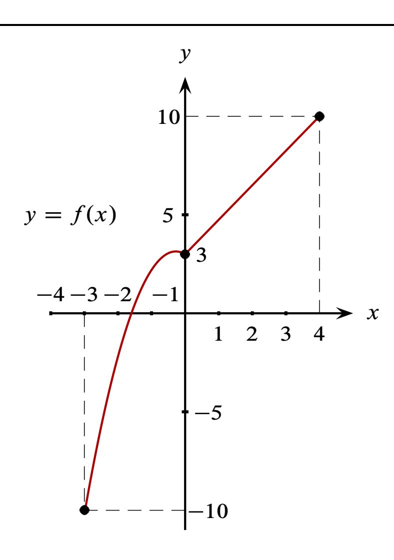
b. A partir de la gráfica de f hacer un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = 2 - f(x-1)$.

13. a. Encuentre la regla de correspondencia para la función f representada por la siguiente gráfica:



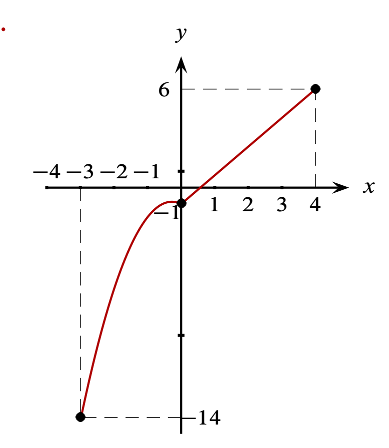
b. Elabore la gráfica de la función dada por: $g(x) = 3f(2x-2) + 2$.

14. Dada la gráfica de una función f:

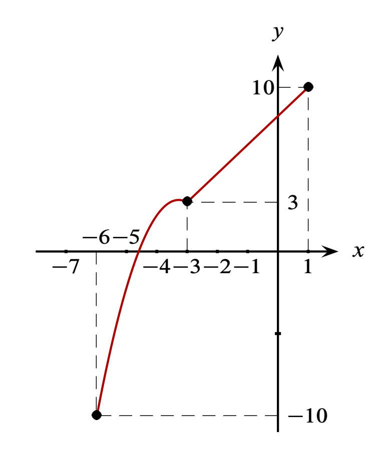


asocie cada una de las siguientes funciones $f(x+3)$, $-2f(x)$ & $f(x)-4$ con su gráfica correspondiente.

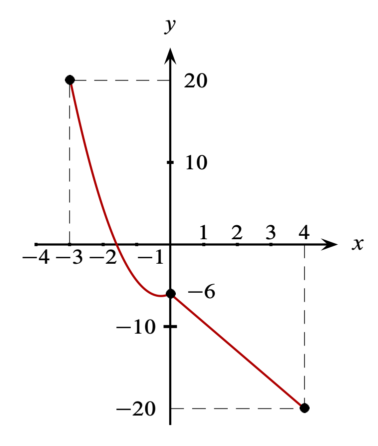
a.



b.



c.



15. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{si } x < -1\,; \\ 2x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1\,; \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

Grafique:

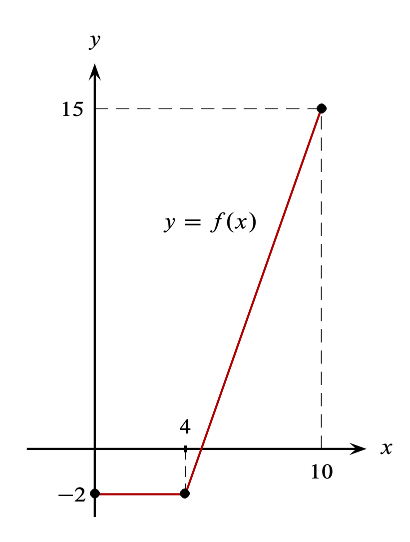
a. $f(x)$.
b. $g(x) = f(x-2) + 5$.
c. $h(x) = |\, f(x)\,|$.

16. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1\,; \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 3\,. \end{cases}$$

a. Determinar dominio, raíces, gráfica e imagen o rango de f.
b. A partir de su gráfica, construir la gráfica de $g(x) = |\, f(x)\,|$.
c. Graficar la función $h(x) = -f(x-1) + 1$.

17. La siguiente es la gráfica de una función $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$.



a. Determine su regla de correspondencia.

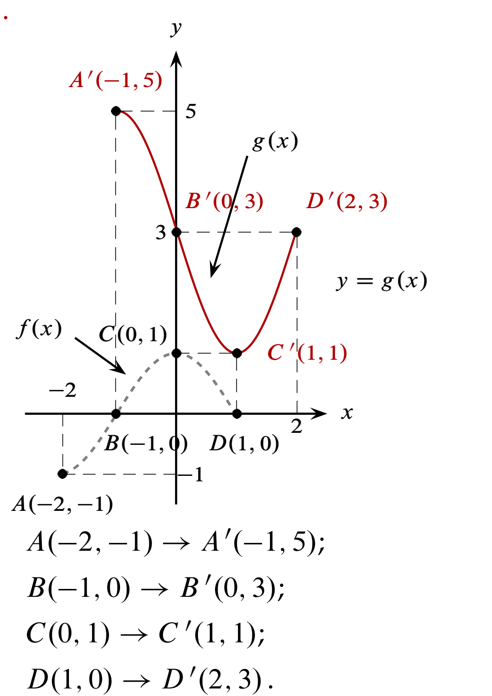
b. Considere la función g definida por

$$g(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{si } -10 \leq x < 0\,; \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 10\,. \end{cases}$$

Bosqueje la gráfica de g. Determine su dominio, rango y raíces.

c. Sea $h(x) = g(x + 1) - 2$; a partir de la gráfica de g obtenga la de h.

Ejercicios 2.7.1 *Transformaciones de funciones, página 9*

1. 

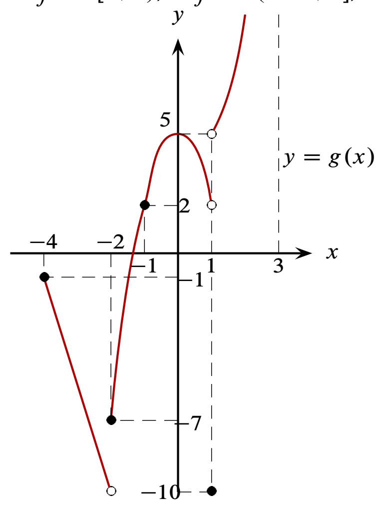
$A(-2,-1) \to A'(-1,5)$;

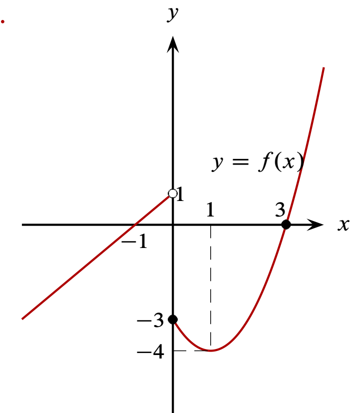
$B(-1,0) \to B'(0,3)$;

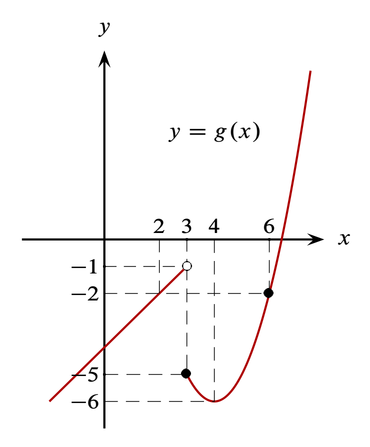
$C(0,1) \to C'(1,1)$;

$D(1,0) \to D'(2,3)$.

2. $D_f = [1, 8)$, $R_f = (-\infty, 4]$, raíz $x = 4$;



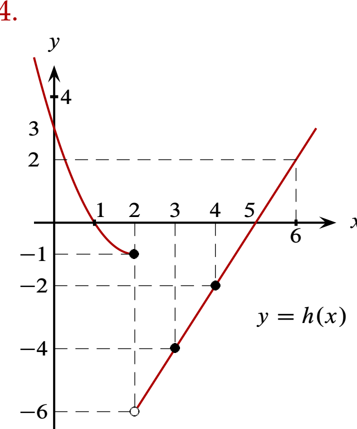
3. 

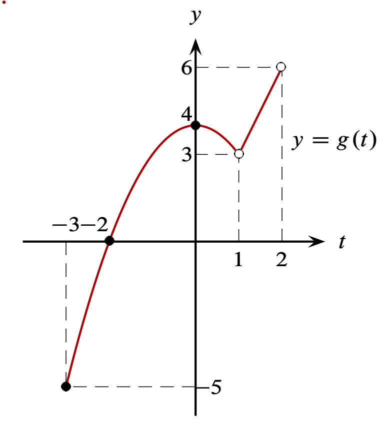


Dominio: $(-\infty, 3)$ y $[3, \infty)$;

rango: $\mathbb{R}$;

raíces: $4 + \sqrt{6}$.

4. 

5. a. 

$D_g = [-3, 2) - \{1\} = [-3, 1) \bigcup (1, 2)$;

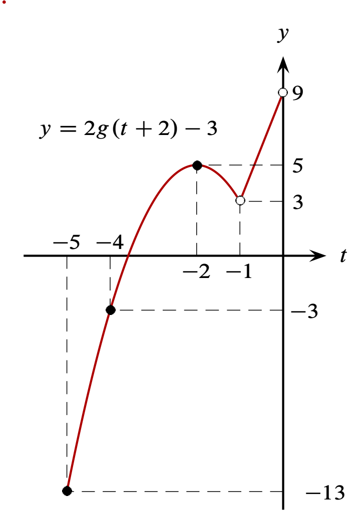
$R_g = [-5, 6)$;

raíces: $\{-2\}$;

b. $g(t) \geq 0$ si $t \in [-2, 2) - \{1\} = [-2, 1) \bigcup (1, 2)$;

$g(t) < 0$ si $t \in [-3, -2)$;

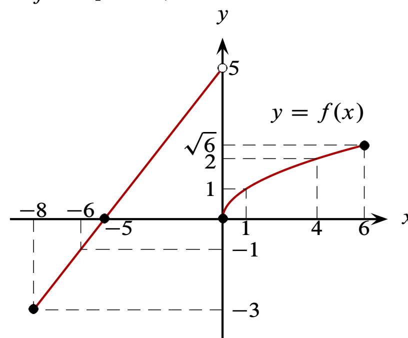
c.



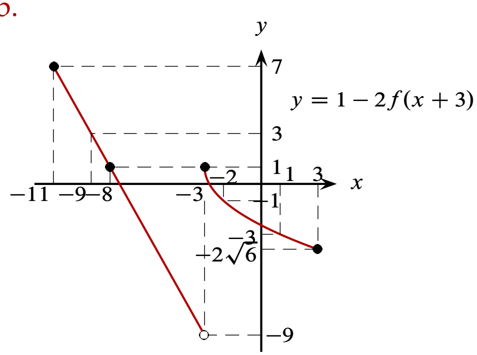
6. a. $D_f = [-8, 6]$;

raíces: -5 & 0;

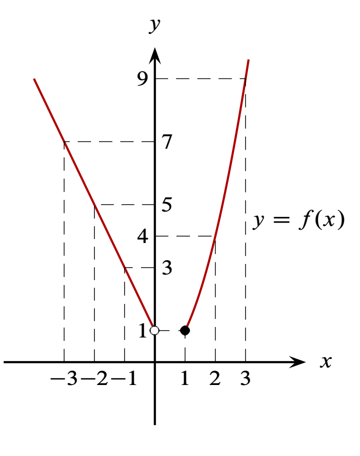
$R_f = [-3, 5)$;

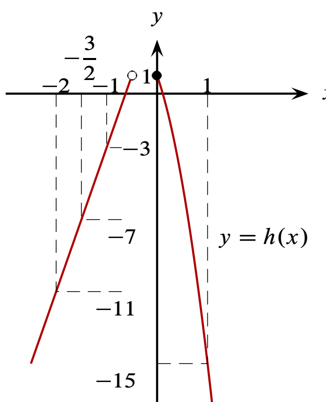


b.

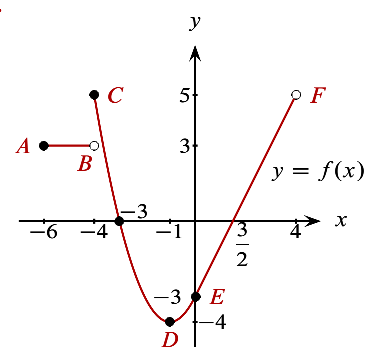


7.





8.



Dominio: $D_f = [-6, 4)$;

rango: $R_f = [-4, 5]$;

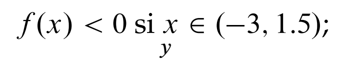
raíces: $x = -3$, $x = 1.5$;

no es par ni impar;

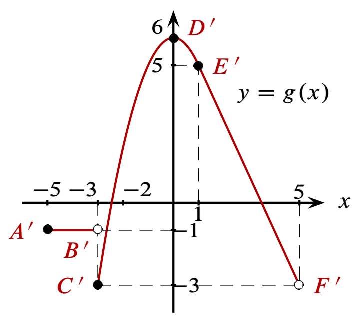
$f(x)$ decrece si $x \in [-4, -1]$;

$f(x)$ crece si $x \in [-1, 4)$;

$f(x) > 0$ si $x \in (-6, -3) \bigcup (1.5, 4)$;



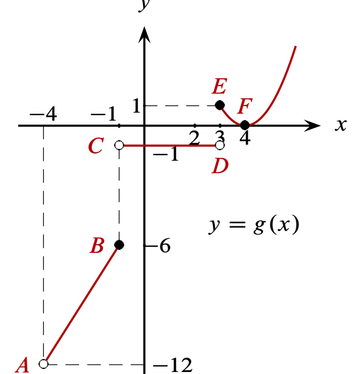
$f(x) < 0$ si $x \in (-3, 1.5)$;

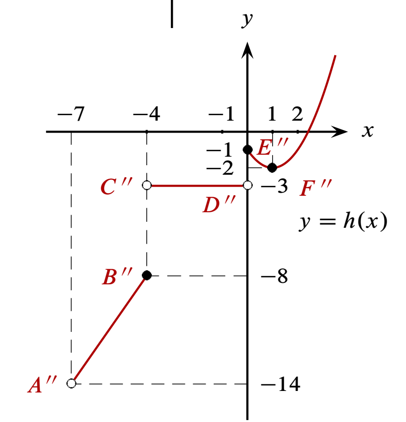


9.

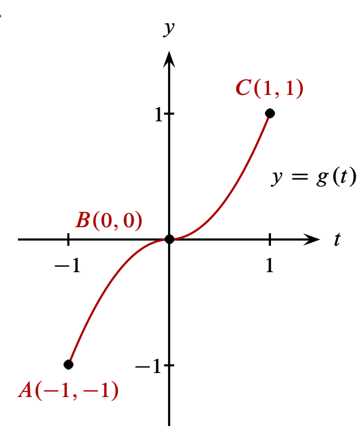
$D_g = (-4, +\infty)$;

$R_g = (-12, -6] \bigcup \{-1\} \bigcup [0, +\infty)$;

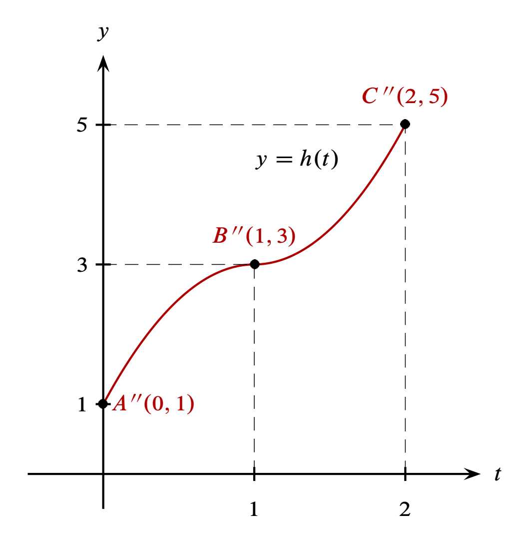




10.

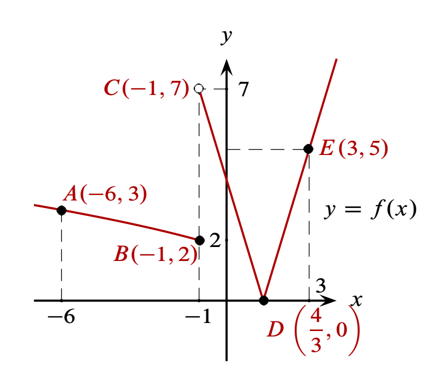


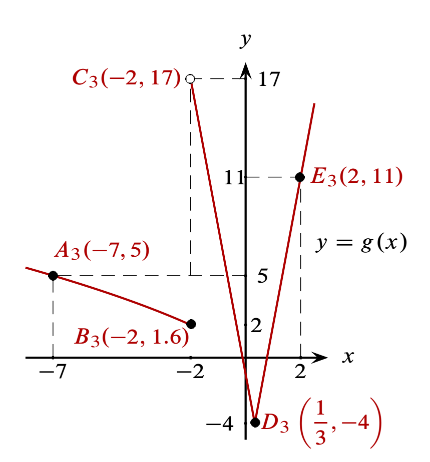
$R_g = [-1, 1]$;



$D_h = [0, 2]$, $R_h = [1, 5]$.

11.

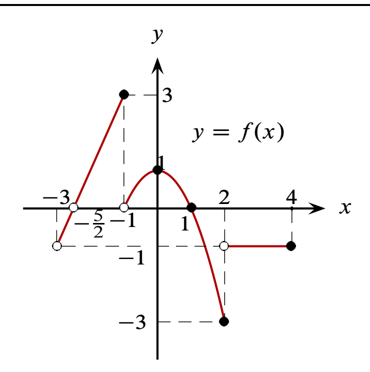




El dominio de g es $\mathbb{R}$;

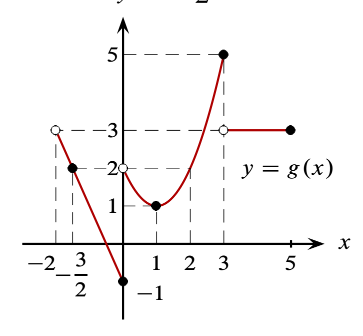
el rango de g es $(-4, +\infty)$.

12.

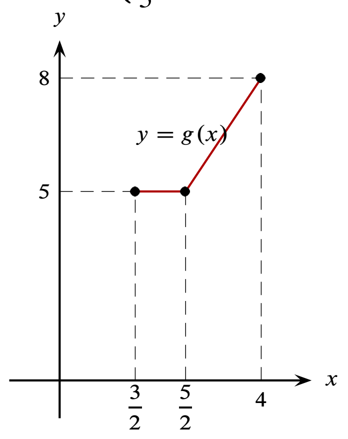


$R_f = [-3, 3]$;

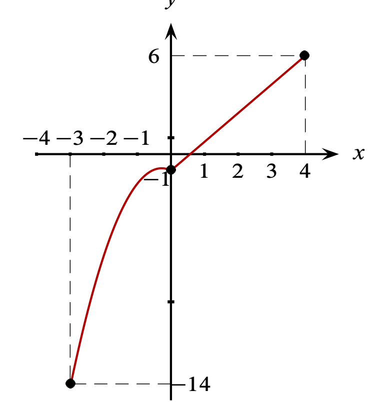
raíces: $x = -\dfrac{5}{2}$; $x = 1$;



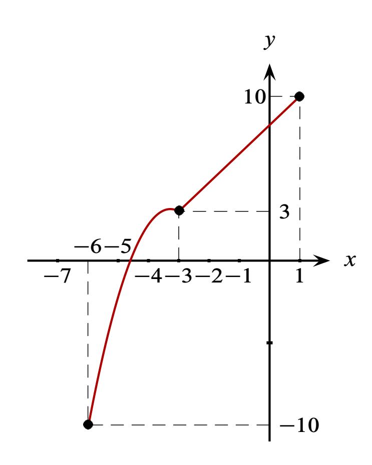
13. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1, 3]\,; \\ & \text{(observe que } f(3) = 1); \\ \dfrac{1}{3}x & \text{si } x \in [3, 6]\ . \end{cases}$



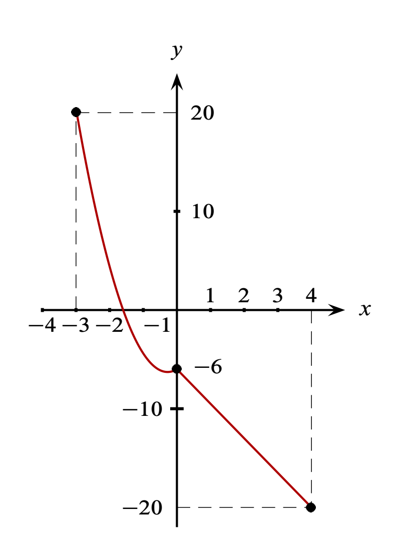
14. a. Ésta es la función $f(x) - 4$:



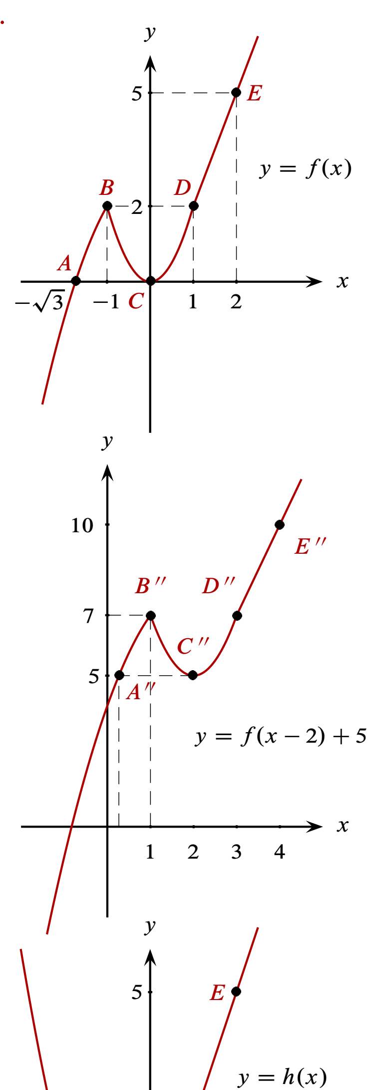
b. Ésta es la función $f(x + 3)$:



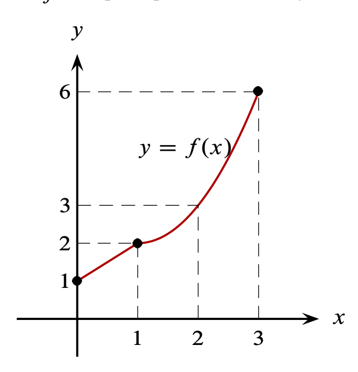
c. Ésta es la función $-2f(x)$:



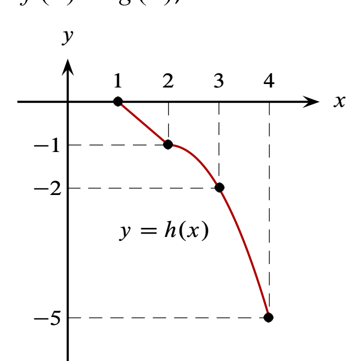
15.



16. $D_f = [0, 3]$; raíces de $f = \emptyset$; $R_f = [1, 6]$.

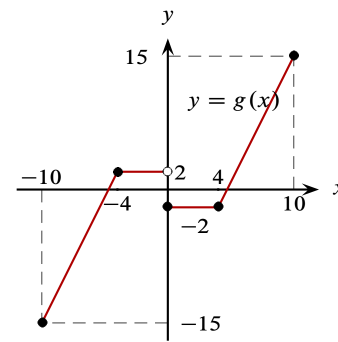


$f(x) = g(x)$;



17. a. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } 0 \le x < 4; \\ \dfrac{17}{6}x - \dfrac{40}{3} & \text{si } 4 \le x \le 10. \end{cases}$

b.

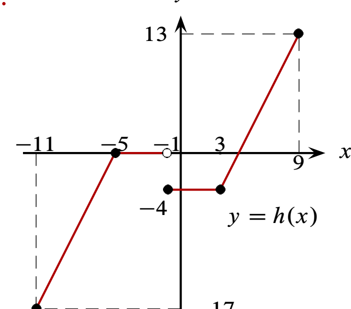


$D_g = [-10, 10]$;

$R_g = [-15, 15]$;

raíces: $x = \pm\dfrac{80}{17}$.

c.



CAPÍTULO

2

Funciones

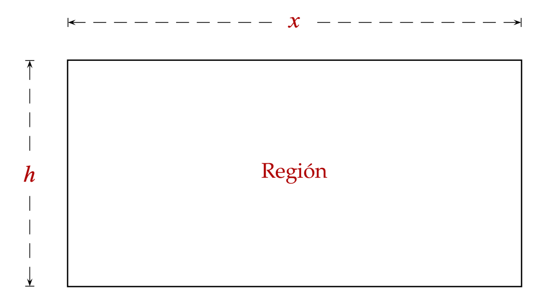
[1]

2.8 Modelando con funciones

Ahora haremos uso de ejemplos concretos para mostrar la manera en que podemos utilizar a las funciones para modelar matemáticamente situaciones y problemas reales.
Para llevar a cabo la actividad de modelar con funciones es necesario que se consideren las preguntas siguientes: ¿qué es lo que se pide en el problema?, así como ¿qué datos se dan en el problema?

Ejemplo 2.8.1 *Una región rectangular tiene un perímetro de* 200 *m. Expresar el área de la región como función de la longitud de uno de sus lados.*

▼ Consideramos un rectángulo con lados de longitudes x & h, expresados en metros.



¿Qué es lo que se pide en este problema?
Expresar el área A del rectángulo, que es $A = xh$, como función (solamente) de x o bien de h.
¿Qué dato se da en el problema? Que el perímetro, que es $P = 2x + 2h$, es de 200 m. Esto es, se sabe que $2x + 2h = 200$ o bien que $x + h = 100$.

Tenemos entonces

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

$\begin{cases} \text{una función: } A = xh & \text{(por abuso del lenguaje en ocasiones llamamos función} \\ & \text{a una regla de correspondencia o una fórmula);} \\ \text{una ecuación: } x + h = 100. & \end{cases}$

Ahora de la ecuación despejamos una de las variables (la que más nos convenga) para luego sustituirla en la función. En este caso es indistinto despejar cualquiera de las dos variables.
Si queremos expresar el área A como función de x, despejamos h de la ecuación.

$$x + h = 100 \;\Rightarrow\; h = 100 - x,$$

sustituimos el valor de h en la función y obtenemos

$$A = xh = x(100 - x) = 100x - x^2;$$

(si la quisiéramos como una función de h despejaríamos $x = 100 - h$.)

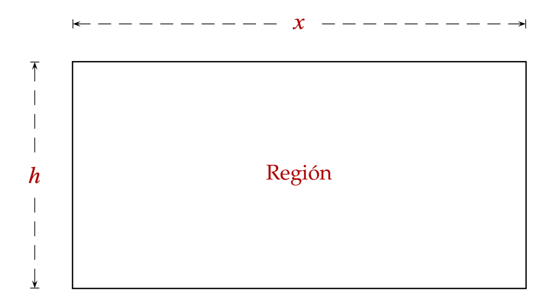
Luego la función buscada es

$$A(x) = 100x - x^2.$$

□

Ejemplo 2.8.2 *Una región rectangular tiene un área de* $160\ m^2$*. Expresar su perímetro como función de la longitud de uno de sus lados.*

▼ Consideramos un rectángulo con lados de longitudes x & h, expresados en metros.



¿Qué es lo que se pide en el problema?
Expresar el perímetro P del rectángulo, que es $P = 2x + 2h$, como función (solamente) de x o bien de h.
¿Qué dato se da en el problema? Que el área del rectángulo, que es $A = xh$, es igual a $160\ \text{m}^2$.
Esto es, se sabe que: $xh = 160$.

Tenemos entonces

$\begin{cases} \text{una función: } P = 2x + 2h; \\ \text{una ecuación: } xh = 160. \end{cases}$

Si queremos expresar el perímetro P como función de h, despejamos x de la ecuación para despeués sustituirla en P.

$$xh = 160 \;\Rightarrow\; x = \frac{160}{h};$$

sustituyendo x en P obtenemos

$$P = 2x + 2h = 2\left(\frac{160}{h}\right) + 2h = \frac{320}{h} + 2h.$$

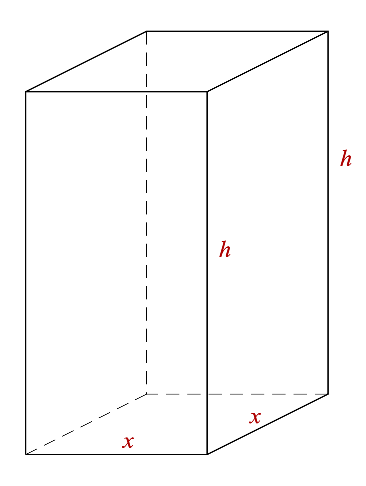
Luego la función buscada es

$$P(h) = \frac{320}{h} + 2h.$$

□

Ejemplo 2.8.3 *Una caja de caras laterales rectangulares sin tapa tiene su base cuadrada y un volumen de 2 m^3. Expresar el área de la caja como función de uno de los lados de la base.*

▼ Consideramos una caja de caras laterales rectangulares de altura h y base cuadrada de lado x con h & x expresados en metros.



¿Qué es lo que se pide en este problema?
Expresar el área A de la caja como función de x (uno de los lados de la base) a sabiendas de que

$$A = \text{área de la base } + \text{ área de las caras laterales } = x^2 + 4xh.$$

¿Qué dato se da en el problema? Que el volumen de la caja, $V = x^2h$, es igual a 2 m^3; es decir, se sabe que $x^2h = 2$.

Tenemos entonces

$$\begin{cases} \text{una función: } A = x^2 + 4xh; \\ \text{una ecuación: } x^2h = 2. \end{cases}$$

Ahora, dado que se quiere expresar A como función de x, despejamos h de la ecuación, para luego sustituirla en la función.

$$x^2h = 2 \Rightarrow h = \frac{2}{x^2}.$$

Sustituyendo h en la función obtenemos

$$A = x^2 + 4xh = x^2 + 4x\left(\frac{2}{x^2}\right) = x^2 + \frac{8}{x}.$$

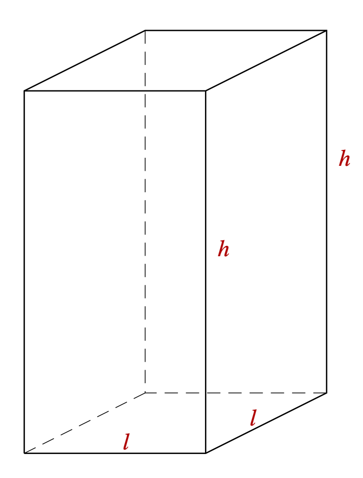
Luego la función buscada es

$$A(x) = x^2 + \frac{8}{x}.$$

□

Ejemplo 2.8.4 *Una caja de caras laterales rectangulares con base y tapa cuadradas tiene un área total de* 1 200 *cm*^{2}. *Expresar el volumen de la caja como función de uno de los lados de la base.*

▼ Consideramos una caja de caras rectangulares de altura h y base cuadrada de lado l, con h y l expresados en centímetros.



¿Qué es lo que se pide en este problema? Expresar el volumen V de la caja como función de l (uno de los lados de la base) a sabiendas de que

$$V = l^2 h.$$

¿Qué se sabe en el problema? Que el área total de la caja, que es $A = l^2 + l^2 + 4lh$, es igual a 1 200 cm^2. Es decir, se sabe que $2l^2 + 4lh = 1\,200$; o sea $l^2 + 2lh = 600$.

Tenemos entonces

$$\begin{cases} \text{una función: } V = l^2 h; \\ \text{una ecuación: } l^2 + 2lh = 600. \end{cases}$$

Ahora bien, debido a que se quiere expresar a V como función de l, despejamos h de la ecuación para luego sustituirla en la función

$$l^2 + 2lh = 600 \;\Rightarrow\; 2lh = 600 - l^2 \;\Rightarrow\; h = \frac{600 - l^2}{2l}.$$

Sustituyendo h en la función, obtenemos

$$V = l^2 h = l^2 \left(\frac{600 - l^2}{2l} \right) = \frac{l}{2}(600 - l^2) = 300\,l - \frac{1}{2} l^3.$$

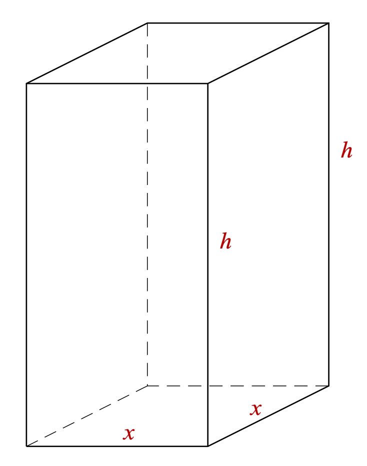
Luego la función buscada es

$$V(l) = 300\,l - \frac{1}{2} l^3.$$

□

Ejemplo 2.8.5 *Se va a construir un tanque de caras laterales rectangulares, con base y tapa cuadradas con capacidad de* 8 m^3 *para almacenar aceite. El material para construir la base y la tapa tiene un costo de* \$1 000.00 *por* m^2 *y el material para construir las caras laterales tiene un costo de* \$500.00 *por* m^2.
Obtener el costo de la construcción del tanque en función de la longitud x *del lado de la base cuadrada.*

▼ La figura del tanque corresponde a:



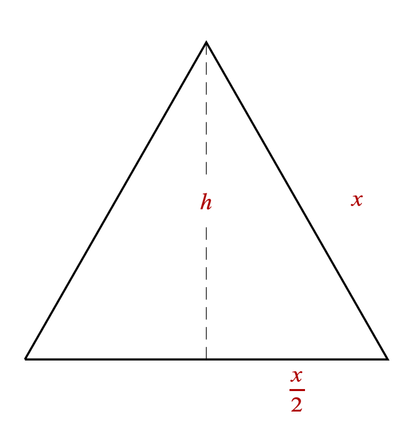
El área de la base cuadrada es x^2 y el de la tapa también es x^2, luego la suma de estas áreas es $2x^2$; entonces, el costo en pesos para construirlas, será de $2\,000x^2$, estando x expresada en metros.
Una cara lateral del tanque constituye un rectángulo de base x y altura digamos h (expresada también en metros), es decir, xh es su área.
El volumen del tanque es el área de la base multiplicada por la altura, es decir, x^2h, pero como tiene que ser 8 m^3 tenemos que $x^2h = 8$; luego despejando h resulta que $h = \dfrac{8}{x^2}$.
El área de una cara lateral es por tanto $x\dfrac{8}{x^2} = \dfrac{8}{x}$ y el área de las cuatro es $4\left(\dfrac{8}{x}\right) = \dfrac{32}{x}$.
Y su costo es $\dfrac{32}{x}(500) = \dfrac{16\,000}{x}$.
El costo total C de la construcción como función de la longitud del lado x de la base cuadrada será

$$C(x) = 2\,000x^2 + \frac{16\,000}{x} .$$

□

Ejemplo 2.8.6 *Exprese el área de un triángulo equilátero como función de la longitud* x *de uno de sus lados.*

▼ Usaremos la siguiente figura



Como la altura correspondiente a uno de sus lados es también la mediatriz tenemos, por el teorema de Pitágoras, que

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{4x^2 - x^2}{4}} =$$
$$= \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Y el área será entonces

$$A = \frac{1}{2} \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

Es decir,

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

□

Ejemplo 2.8.7 *El número de vibraciones (V) de una cuerda que vibra es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión T de la cuerda. Una cuerda particular vibra a 864 vibraciones por segundo sometida a una tensión de 24 kg.*

1. *Exprese el número de vibraciones de esta cuerda en términos de la tensión T.*
2. *Determine el número de vibraciones por segundo $(V/seg.)$ cuando la cuerda esté sometida a una tensión de 6 kg.*

▼

1. Ya que V es directamente proporcional a $\sqrt{T}$, entonces existe una constante de proporcionalidad k tal que $V = k\sqrt{T}$. Para la cuerda en consideración tendremos

$$864 = k\sqrt{24};$$

por lo tanto

$$k = \frac{864}{\sqrt{24}} = \frac{864}{\sqrt{24}} \cdot \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{24}} = \frac{864\sqrt{24}}{24} = 36\sqrt{24} = 36\sqrt{4 \times 6} = 72\sqrt{6};$$

y por último

$$V = 72\sqrt{6}\sqrt{T} = 72\sqrt{6T}.$$

2. Si $T = 6$, tendremos que

$$V = 72\sqrt{6 \times 6} = 72 \times 6 = 432\,.$$

□

Ejemplo 2.8.8 *En un bosque un depredador se alimenta de su presa y, para las primeras 15 semanas a partir del fin de la temporada de caza, la población de depredadores es una función f de x, donde x es el número de presas en el bosque el cual, a su vez, es una función g de t, donde t es el número de semanas que han pasado desde el fin de la temporada de caza.*

Si $f(x) = \dfrac{1}{48}x^2 - 2x + 50$ & $g(t) = 4t + 52$, donde $0 \le t \le 15$, haga lo siguiente:

1. *Encuentre un modelo matemático que exprese la población de depredadores como función del número de semanas a partir del fin de la temporada de caza.*

2. *Determine la población de depredadores* 11 *semanas después del cierre de la temporada de caza.*

▼

1. Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
f[x(t)] = f[g(t)] = f(4t+52) &= \frac{(4t+52)^2}{48} - 2(4t+52) + 50 = \\
&= \frac{[4(t+13)]^2}{48} - 8t - 104 + 50 = \frac{t^2+26t+169}{3} - 8t - 54 = \\
&= \frac{t^2+26t+169-24t-162}{3} = \frac{t^2+2t+7}{3}, \text{ (donde } 0 \le t \le 15).
\end{aligned}
$$

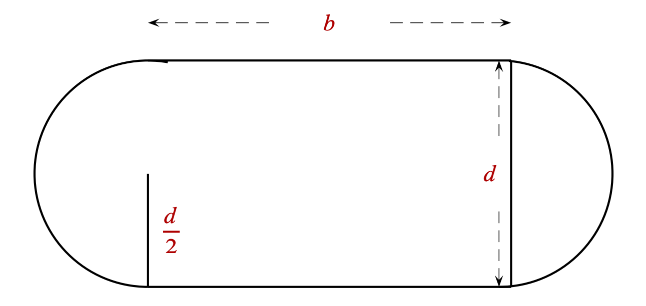
2. Valuamos:

$$
f[x(11)] = f[g(11)] = \frac{11^2+2\times 11+7}{3} = \frac{121+22+7}{3} = \frac{150}{3} = 50.
$$

□

Ejemplo 2.8.9 *Una pista de* 400 *m de longitud tiene lados paralelos y cabeceras semicirculares. Encuentre una expresión para el área A encerrada por la pista, en función del diámetro d de los semicírculos.*

▼ Dibujamos la pista.



Vemos que:

$$
A = bd + \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = bd + \frac{\pi d^2}{4}.
$$

Pero el perímetro es

$$
P = 2b + \pi d = 400 \text{ por lo que } b = \frac{400-\pi d}{2}
$$

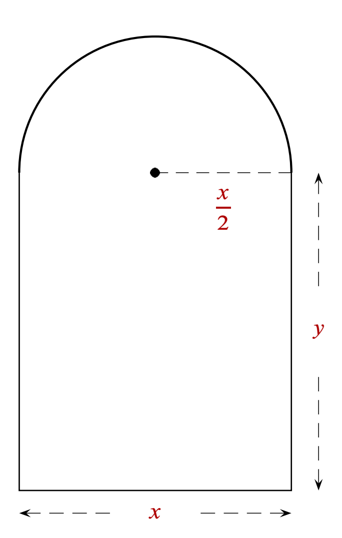
y entonces sustituyendo en A

$$
A(d) = \frac{400-\pi d}{2}d + \frac{\pi d^2}{4} = \frac{800d - \pi d^2}{4} = \frac{d}{4}(800-\pi d).
$$

□

Ejemplo 2.8.10 *Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 45 dm, exprese su área como función del ancho x de la misma.*

▼ Primero representamos la ventana:



El área A es la suma del área del rectángulo más la del semicírculo que tiene radio $\frac{x}{2}$, es decir,

$$A = xy + \pi\frac{x^2}{4}\frac{1}{2} = xy + \frac{\pi}{8}x^2 .$$

Pero además el perímetro de 45 dm es igual a

$$P = x + 2y + 2\pi\frac{x}{2}\frac{1}{2} ,$$

y así

$$P = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x + 2y = 45$$

y de aquí que

$$2y = 45 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x \;\Rightarrow\; y = \frac{45}{2} - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{x}{2} .$$

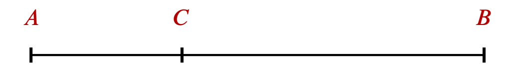
Luego, sustituyendo este valor, nos queda A como función de x:

$$A(x) = x\left[22.5 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{x}{2}\right] + \frac{\pi}{8}x^2 = 22.5x + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)x^2 =$$
$$= 22.5x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2 .$$

□

Ejemplo 2.8.11 *Un cordel de 10 m de largo se corta en dos partes; con una de ellas se forma un cuadrado y con la otra se forma un triángulo equilátero. Si x es la longitud del lado del triángulo, exprese la suma de las áreas del cuadrado y del triángulo (área total encerrada) en función de x.*

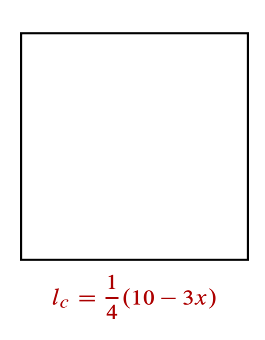
▼ Consideramos la figura siguiente

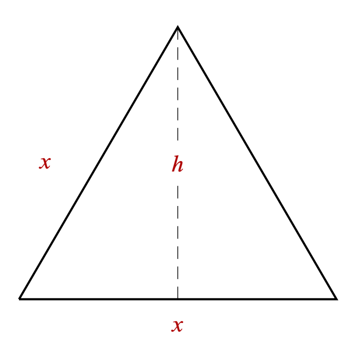


Si el punto C es donde cortamos el cordel $\overline{AB}$ en 2 pedazos entonces $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB} = 10$.
Si con el pedazo $\overline{AC}$ formamos un triángulo equilátero con lados de longitud x entonces $\overline{AC} = 3x$.
De lo cual se desprende que $\overline{CB} = 10 - 3x$.

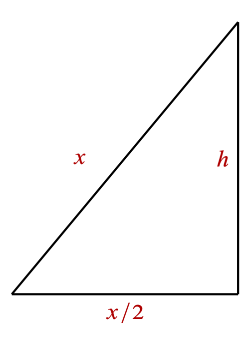
Con el pedazo $\overline{CB}$ formamos un cuadrado con lados de longitud $l_c = \dfrac{1}{4}(10 - 3x)$.

Las figuras correspondientes son





Calculamos la altura h del triángulo equilátero, mediante el teorema de Pitágoras.



Tenemos:

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}x^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

El área del triángulo es

$$A_t = \frac{xh}{2} = \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

El área del cuadrado es

$$A_c = {l_c}^2 = \left[\frac{1}{4}(10 - 3x)\right]^2 = \frac{1}{16}(10 - 3x)^2.$$

El área total de los 2 polígonos es

$$A = A_t + A_c = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{1}{16}(10 - 3x)^2.$$

Es decir,

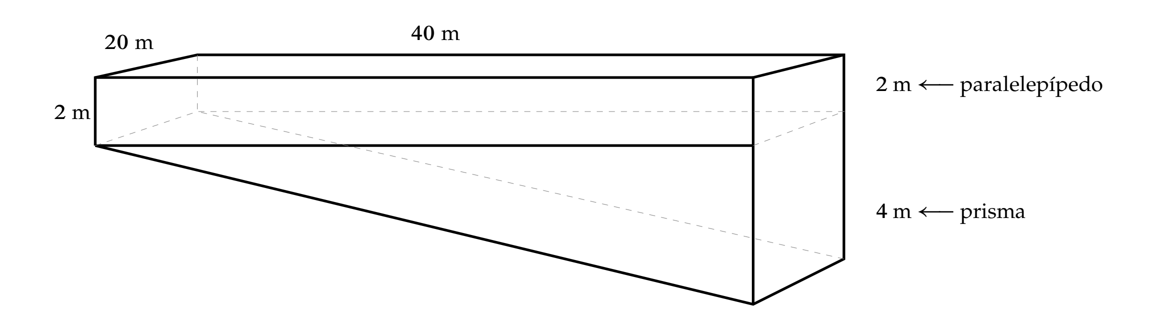
$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{1}{16}(10 - 3x)^2,$$

que es la función deseada.

□

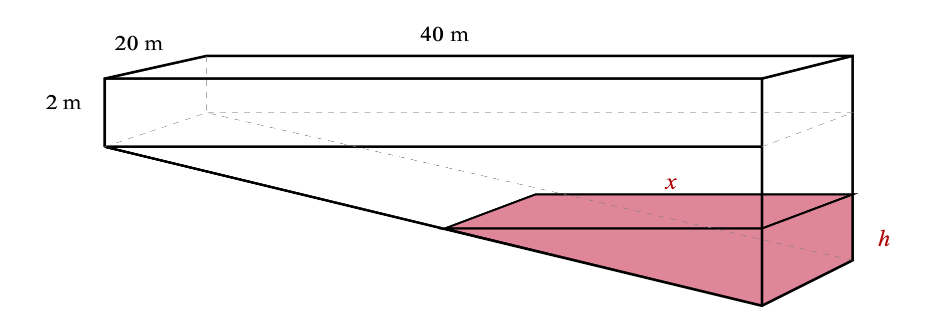
Ejemplo 2.8.12 *La piscina mostrada en la figura tiene 2 m de profundidad mínima y 6 m de profundidad máxima, 40 m de largo, 20 m de ancho y el fondo es un plano inclinado. Expresar el volumen V del agua contenida en la piscina en función de la altura h del nivel del agua desde la parte más profunda de la piscina.*



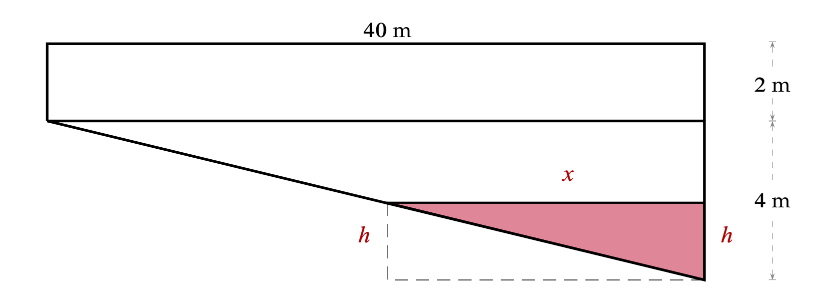


Primero observamos que la piscina está conformada por dos secciones diferentes: en los 2 primeros metros de profundidad se tiene un paralelepípedo recto rectangular (una caja de caras rectangulares) y en la parte restante se tiene una forma de prisma con caras rectangulares y triangulares.
¿Qué se pide en el problema? Expresar el volumen V del agua contenida en la piscina (cuando ésta no está necesariamente llena) en función de la altura h, medida a partir de la parte más profunda de dicha piscina.
¿Qué datos se dan en el problema? Los que se ven en la figura.
Para resolver este problema supongamos que la piscina está inicialmente vacía y que la estamos llenando.

1. En una primera etapa vemos lo siguiente:



La sección vertical de la figura anterior es



En la figura anterior vemos la porción de la piscina que está llena de agua (parte sombreada) y que tiene un volumen V_1. Proponemos dos formas de calcular dicho volumen:

a. V_1 es igual a la mitad del volumen del paralelepípedo que tiene por base el rectángulo de lados h & 20 m y altura x, es decir, $V_1 = \dfrac{20hx}{2}$.

b. V_1 = (área del triángulo rectángulo de catetos x, h)(anchura de la piscina)= $\dfrac{xh}{2} \times 20$.

Es decir:

$$V_1 = 10xh.$$

En la figura anterior vemos una proyección de la piscina donde, por semejanza de triángulos, se cumple que

$$\frac{x}{h} = \frac{40}{4} \Rightarrow \frac{x}{h} = 10 \Rightarrow x = 10h.$$

Entonces,

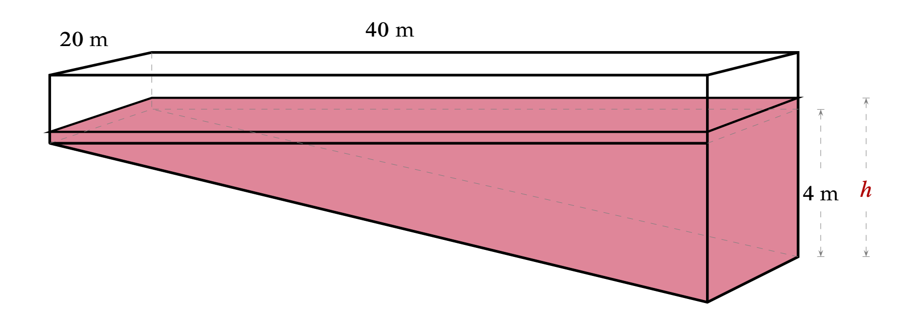
$$V_1 = 10xh = 10(10h)h = 100h^2.$$

Es decir: $V_1(h) = 100h^2$ para $0 \leq h \leq 4$.

Nótese que el volumen de todo el semiparalelepípedo es

$$V_p = V_1(4) = V_1(h = 4) = 100(4)^2 = 100(16) = 1\,600 \text{ m}^3.$$

2. En una segunda etapa, cuando el semiparalelepípedo ya fue rebasado por el agua, vemos lo siguiente:



Ahora la porción de la piscina llena de agua está conformada por el semiparalelepípedo que tiene un volumen $V_p = 1\,600\,\text{m}^3$ y por un paralelepípedo recto rectangular con una altura igual a $h - 4$ y un volumen V_c dado por

$$V_c = (\text{largo})(\text{ancho})(\text{altura}) = (40)(20)(h-4);$$
$$V_c = 800(h-4) = 800h - 3\,200.$$

Entonces, el volumen de toda la porción de la piscina que está llena de agua es

$$V_2 = V_p + V_c = 1\,600 + (800h - 3\,200) = 800h - 1\,600.$$

Es decir: $V_2(h) = 800(h-2)$ para $4 < h \le 6$.

3. Por lo tanto el volumen V en función de h es

$$V(h) = \begin{cases} 100\,h^2 & \text{si } 0 \le h \le 4; \\ 800(h-2) & \text{si } 4 \le h \le 6. \end{cases}$$

□

Ejemplo 2.8.13 *Una barra metálica AD de longitud ℓ está formada por tres porciones: AB, BC y CD, de longitudes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 (donde $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = \ell$) y con densidades lineales de masa (cantidad de masa por unidad de longitud) ρ_1, ρ_2, ρ_3, respectivamente. Si AP es una porción de longitud x (variable) y masa M (variable), expresar M en función de x.*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Expresar la masa de una porción cualquiera de la barra metálica en función de la longitud de dicha porción. Es decir, dado un pedazo AP (de la barra metálica) de longitud x, expresar la masa M de dicho pedazo en función (precisamente) de x.
Para encontrar una expresión de la masa M debemos tomar en cuenta la longitud x de la porción considerada; ¿por qué? Porque puede suceder cualquiera de los tres casos siguientes:

$$0 \le x \le \ell_1 \text{ o bien } \ell_1 < x \le \ell_1 + \ell_2 \text{ o bien } \ell_1 + \ell_2 < x \le \ell.$$

Considerando que la densidad lineal de masa es la cantidad de masa por unidad de longitud, entonces la masa de un pedazo de alambre (con densidad lineal constante) es igual al producto de su densidad por su longitud; es decir la masa del pedazo de alambre está en función de su longitud. Por esto, para un pedazo de alambre de longitud x sucede lo siguiente:

1. Si $0 \le x \le \ell_1$, entonces la masa (del pedazo de alambre) es $M_1(x) = \rho_1 x$.
2. Si $\ell_1 < x \le \ell_1 + \ell_2$, entonces la masa es $M_2(x) = \rho_1 \ell_1 + \rho_2 (x - \ell_1)$.
3. Si $\ell_1 + \ell_2 < x \le \ell$, entonces la masa es $M_3(x) = \rho_1 \ell_1 + \rho_2 \ell_2 + \rho_3 [x - (\ell_1 + \ell_2)]$.

Por lo tanto, la masa M de una porción de alambre de longitud x es la función

$$M(x) = \begin{cases} \rho_1 x & \text{si } 0 \le x \le \ell_1; \\ \rho_1\ell_1 + \rho_2(x - \ell_1) & \text{si } \ell_1 < x \le \ell_1 + \ell_2; \\ \rho_1\ell_1 + \rho_2\ell_2 + \rho_3[x - (\ell_1 + \ell_2)] & \text{si } \ell_1 + \ell_2 < x \le \ell. \end{cases}$$

□

Ejercicios 2.8.1 *Soluciones en la página 16*

1. Las dimensiones de un rectángulo pueden variar, pero no su área que debe ser de A cm^2. Considerando que uno de sus lados mide x cm, expresar el perímetro P del rectángulo en función de x.
2. El perímetro de un rectángulo debe ser P cm. Expresar el área A del rectángulo en función de la longitud y de uno de sus lados.
3. Las dimensiones de un paralelepípedo (caja con caras laterales rectangulares) pueden variar, pero no su volumen que debe ser igual a V m^3. Considerando que la caja tiene base cuadrada con lado de longitud igual a x m, expresar el área A de la superficie total del paralelepípedo en función de x.
4. Una caja con base y tapa cuadradas tiene una superficie de área A cm^2. Expresar el volumen V de la caja en función de la longitud de uno de sus lados.
5. a. Exprese el área A de un cuadrado en función de su perímetro P.
   b. Exprese el perímetro P de un cuadrado en función de su área A.
6. a. Exprese el área A de un círculo en función de su perímetro C.
   b. Exprese el perímetro C de un círculo en función de su área A.
7. a. Exprese el área A de un triángulo equilátero en función de la longitud s de uno de sus lados.
   b. Exprese el área A de un triángulo equilátero en función de la longitud h de la altura.
8. Exprese el volumen V de un cubo en función del área A de su base.
9. Una caja con base y tapa cuadradas de lado x tiene una superficie total de 600 m^2. Expresar el volumen V de la caja como función de x.

10. Una pecera de 1.5 pies de altura h tiene un volumen de 6 pies cúbicos. Si x es el largo de la base, y su ancho es y:

    a. Determine y como función de x. Además grafique esta función.
    b. Encuentre la cantidad de material necesario, en pies cuadrados, para construir la pecera en función de x.

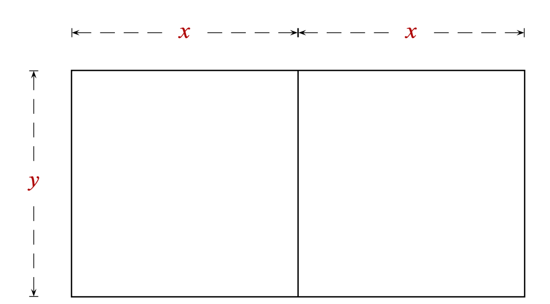
11. Un envase cilíndrico tiene una altura igual al triple del radio r.

    a. Determine la superficie del envase, considerando sus dos tapas, en función del radio.
    b. Si se desean fabricar envases cuyos radios están entre 3 y 5 dm, ¿cuál es la respectiva variación de volumen de los envases?

12. Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos adosados a dos de sus lados opuestos. Si el perímetro del terreno es de 800 m, hallar el área A del terreno en función de la longitud ℓ de uno de los lados del rectángulo.

13. Una lata tiene capacidad de 1 dm^3 y forma de un cilindro circular recto. Exprese el área de la superficie de la lata como función de su radio.

14. Un granjero dispone de 200 m de valla para cercar dos corrales adyacentes (véase figura). Expresar el área A encerrada como función de x



15. Una caja cerrada, en forma de cubo, va a construirse con dos materiales diferentes. El material de las caras laterales cuesta 2.5 pesos por centímetro cuadrado y el material de la base y la tapa cuesta 3 pesos por centímetro cuadrado. Exprese el costo total C de la caja en función de la longitud x de uno de sus lados.

16. Un avión vuela a una velocidad de 350 millas/h, a una altitud de una milla y pasa directamente sobre una estación de radar en el instante $t = 0$.

    a. Exprese la distancia horizontal d (en millas) que el avión recorre como función del tiempo t.
    b. Exprese la distancia s entre el avión y la estación de radar como función de d.
    c. Aplique la composición de funciones para expresar s como función de t.

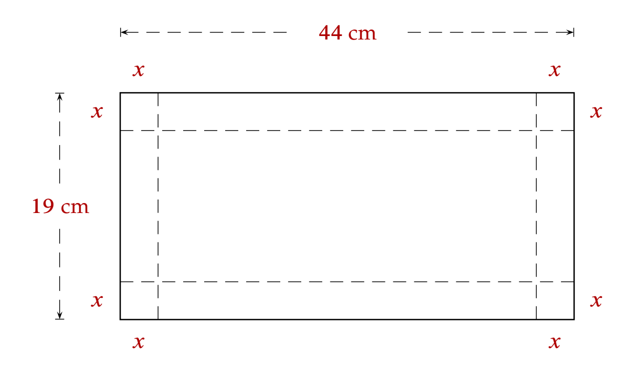
17. Una ventana inglesa tiene la forma de rectángulo coronado con un triángulo equilátero. Si el perímetro de la ventana es de 30 m, exprese el área de la ventana en función de su ancho.

18. Se va a construir una cisterna rectangular con base y tapa cuadradas para almacenar 12 000 pies^3 de agua. El concreto para construir la base y las caras laterales tiene un costo de \$100.00 por pie^2 y el material para construir la tapa cuesta \$200.00 por pie^2.

    Obtenga el costo de la construcción de la cisterna en función de la longitud x del lado de la base.

19. Un alambre de 100 cm de longitud se corta en dos partes. Una de ellas se dobla para formar un cuadrado y con la otra se forma un triángulo equilátero. Obtener el área de ambas figuras como función del lado del cuadrado.

20. De una pieza rectangular de cartón que mide 44 cm de largo y 19 cm de ancho se va a construir una caja sin tapa. Se cortarán 4 cuadrados de x cm de lado, como se muestra en la figura, y luego se doblará sobre las líneas punteadas para formar la caja. Exprese el volumen de esta caja como función de x.



21. Considerando las escalas Celsius y Fahrenheit para medir temperaturas, se sabe que 0 °C corresponde a 32 °F y que 100 °C a 212 °F. Deducir la fórmula de transición de una escala a la otra, es decir expresar °C en función de °F, así como °F en función de °C.

22. Un viaje subsidiado por una escuela costará a cada estudiante 150 pesos si viajan no más de 150 estudiantes; sin embargo el costo a pagar por estudiante se reduciría 5 pesos por cada uno más que se inscriba al grupo de los 150. Exprese los ingresos brutos recibidos por la escuela en función del número de inscritos a dicho viaje.

23. El costo de un viaje en taxi es de 4.80 pesos por el primer kilómetro (o parte del primer kilómetro) y de 30 centavos por cada 100 metros subsiguientes. Exprese el costo de un viaje como función de la distancia x recorrida (en kilómetros) para $0 < x < 2$; además grafique esa función.

Ejercicios 2.8.1 *Modelando con funciones, página 13*

1. $P(x) = 2\left(x + \dfrac{A}{x}\right)$.

2. $A(y) = \left(\dfrac{P}{2} - y\right) y$.

3. $A(x) = 2x^2 + \dfrac{4V}{x}$.

4. $V(w) = \dfrac{A}{4} w - \dfrac{1}{2} w^3$.

5. $A(P) = \dfrac{1}{4} P^2$;

   $P(A) = 4\sqrt{A}$.

6. $A(C) = \dfrac{1}{4\pi} C^2$;

   $C(A) = 2\pi\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$.

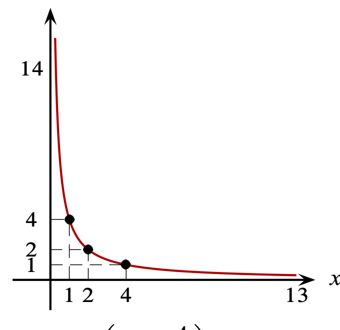
7. $A(s) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} s^2$;

   $A(h) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} h^2$.

8. $V = \left(A^{\frac{1}{2}}\right)^3 = A^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{A^3}$.

9. $V = \dfrac{300x - x^3}{2}$.

10. $y = \dfrac{4}{x}$;



   $A = 3\left(x + \dfrac{4}{x}\right) + 4 \text{ pies}^2$.

11. $S(r) = 6\pi r^2 + 2\pi r^2 = 8\pi r^2$;

    $V(r) \in [81\pi, 375\pi]$.

12. $A = \dfrac{1}{4}\left(1\,600l - \pi l^2\right)$.

13. $A(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2}{r}$.

14. $A_{\square}(x) = \dfrac{2x(200 - 4x)}{3}$.

15. $C(x) = 16x^2$ pesos.

16. $d = 350t$;

    $s = \sqrt{1 + d^2}$;

    $s(t) = \sqrt{1 + (350t)^2}$.

17. $A = 15x + \dfrac{-6 + \sqrt{3}}{4} x^2$.

18. $C(x) = 300x^2 + \dfrac{4\,800\,000}{x}$.

19. $A_{\triangle} = \dfrac{(100 - 4x)(25 - x)}{3\sqrt{3}}$.

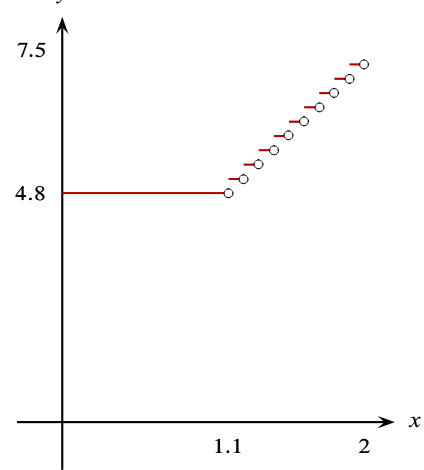
20. $V(x) = 4x^3 - 126x^2 + 836x$ cm^3.

21. $T_C = \dfrac{5}{9}(T_F - 32)$; $\quad T_F = \dfrac{9}{5} T_C + 32$.

22. $I(n) = \begin{cases} 150n & \text{si } n \le 150; \\ (180 - n)5n & \text{si } n > 150. \end{cases}$

23. $C(x) = 4.80 + n(0.30)$

    si $1 + n(0.1) \le x < 1 + (n + 1)(0.1)$.



CAPÍTULO

3

Límite de una función

[1]

OBJETIVOS PARTICULARES

1. Comprender el concepto de límite de una función en un punto.
2. Calcular, en caso de que exista, el límite de una función mediante la aplicación de reglas y procedimientos algebraicos.
3. Comprender la noción de límites laterales (de una función en un punto) y su relación con el concepto de límite (de una función).
4. Determinar la existencia o la no existencia del límite de una función, vía la existencia y la comparación de los límites laterales.
5. Comprender la noción de límites infinitos de una función.
6. Determinar los limites infinitos de una función, mediante la aplicación de reglas y procedimientos algebraicos.
7. Comprender la noción de asíntota vertical de una función.
8. Calcular las asíntotas verticales de una función.
9. Comprender la noción de límites en infinito de una función.
10. Determinar los límites en infinito de una función, mediante la aplicación de reglas y procedimientos algebraicos.
11. Comprender la noción de asíntota horizontal de una función.
12. Calcular las asíntotas horizontales de una función.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

13. Bosquejar la gráfica de una función considerando su comportamiento asintótico.

14. Determinar el límite de una función de ciertos puntos a partir de su gráfica.

3.1 Introducción

Supongamos que $x_0 \in (a, b)$ y que tenemos una función f tal que su dominio D_f contiene al intervalo (a, b) con excepción posiblemente de x_0; el hecho de que la función $f(x)$ esté o no definida en x_0 es irrelevante.
Decimos que el límite de la función $y = f(x)$, cuando x tiende a x_0, es el número real α si para números $x \in (a, b)$ suficientemente próximos a x_0 las imágenes correspondientes $f(x)$ están tan próximas a α como queramos. Si esto sucede, se dice que el límite de $f(x)$ en x_0 existe y es igual a α.

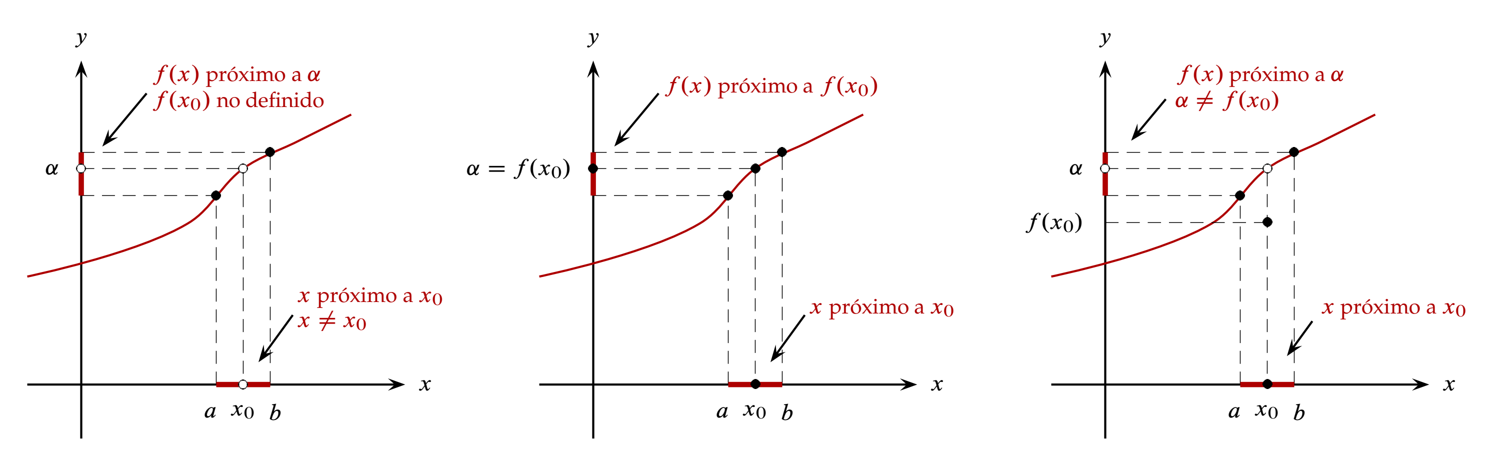
Esto lo denotamos así:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$$

lo que se lee como: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es α.
Algunos autores escriben:

$$f(x) \to \alpha \text{ cuando } x \to x_0.$$

Es bastante claro que, en caso de existir, el límite de una función f es único.



Ejemplo 3.1.1 *La función* $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$ *no está definida en* $x_0 = 2$. *¿Qué se puede decir acerca de* $\lim_{x \to 2} f(x)$*?*

▼ Observemos que $x = 2$ es raíz del numerador, por tanto $x - 2$ es factor de $3x^2 - 7x + 2$ y, efectuando la división, obtenemos $3x^2 - 7x + 2 = (3x - 1)(x - 2)$.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2} = \frac{(3x - 1)(x - 2)}{x - 2} = 3x - 1.$$

Podemos cancelar el factor $x - 2$ ya que $x - 2 \neq 0$ (pues $x \neq 2$).
Luego, damos valores a x cada vez más cerca de $x_0 = 2$ (pero sin llegar a $x = 2$) y obtenemos las imágenes $f(x)$ correspondientes.

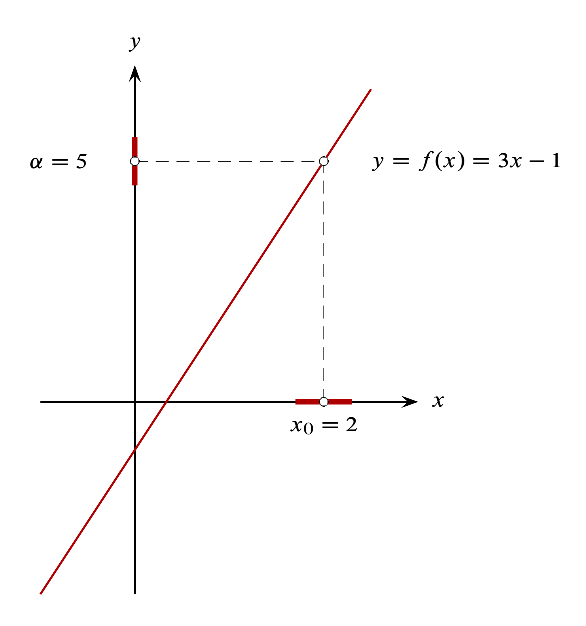
x	$f(x) = 3x - 1$
1.8	4.4
1.9	4.7
1.99	4.97
1.999	4.997
1.9999	4.9997
1.99999	4.99997
$\downarrow$	$\downarrow$
2	5

x	$f(x) = 3x - 1$
2.2	5.6
2.1	5.3
2.01	5.03
2.001	5.003
2.0001	5.0003
2.00001	5.00003
$\downarrow$	$\downarrow$
2	5

Finalmente observamos que a medida que la variable x toma valores cada vez más cercanos al número $x_0 = 2$, las imágenes correspondientes tienen valores cada vez más cerca al número $\alpha = 5$.

Podemos decir entonces que $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$.

Nótese que $|f(x) - 5| \to 0$ cuando $|x - 2| \to 0$.
Gráficamente se tiene:

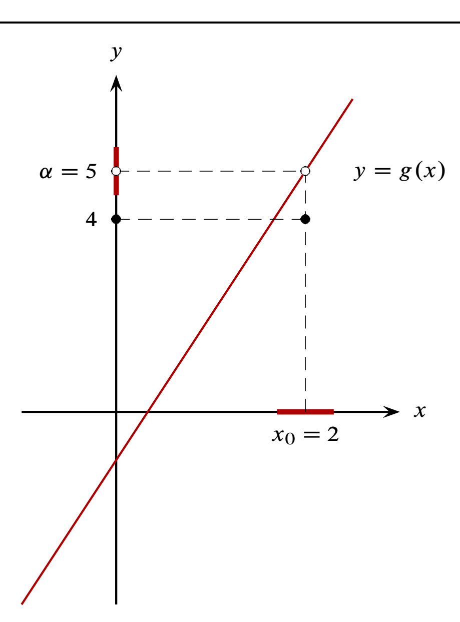


□

Ejemplo 3.1.2 *Dada la función* $g(x) = \begin{cases} 3x - 1 & si\ x \neq 2; \\ 4 & si\ x = 2; \end{cases}$

¿qué se puede decir acerca de $\lim_{x \to 2} g(x)$*?*

▼ En este caso se tiene que $x_0 = 2$ y debemos ver el comportamiento de las imágenes $g(x)$ cuando $x \to 2$; es decir, cuando x toma valores cada vez más cercanos al número $x_0 = 2$.



Notamos que para $x \neq 2$, la función $g(x) = 3x - 1$ coincide con la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$ del ejemplo 3.1.1 anterior, donde vimos que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$. Podemos afirmar entonces que $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 5$. El límite existe.
¿Cómo influye el hecho de que $g(2) = 4$? ¡En nada influye!
¿Por qué? Porque al indagar por el $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ lo que importa es el comportamiento de las imágenes $g(x)$ cuando x toma valores cerca del número $x_0 = 2$, pero siempre distintos del número 2.

□

Ejemplo 3.1.3 *Dada la función $f(x) = \dfrac{|\,x\,|}{x}$ ¿qué se puede decir acerca de $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?*

Para ver el comportamiento de las imágenes $f(x)$ cuando $x \to x_0 = 0$, debemos dar a la variable x valores cercanos a 0.
Debido a que aparece $|\,x\,|$, debemos considerar dos acercamientos por separado.

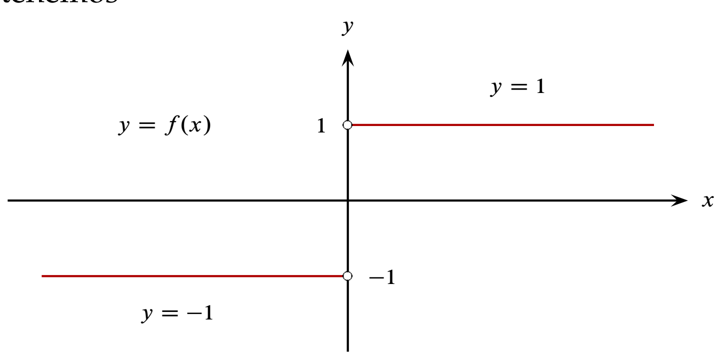
1. Si $x < 0$, entonces $|\,x\,| = -x$ & $f(x) = \dfrac{|\,x\,|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$.

   Es decir, para $x < 0$ se tiene que $f(x) = -1$.

2. Si $x > 0$, entonces $|\,x\,| = x$ & $f(x) = \dfrac{|\,x\,|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$.

   Es decir, para $x > 0$ se tiene que $f(x) = 1$.

   ▼ Geométricamente tenemos



Ahora bien, ¿qué decir acerca de $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Es claro que no se puede afirmar que $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ ya que esto sucede sólo cuando $x < 0$ y no sucede cuando $x > 0$. Así también no se puede afirmar que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ ya que esto sucede solamente cuando $x > 0$ y no cuando $x < 0$.

Entonces $\lim_{x\to 0} f(x) \neq -1$ y $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 1$.

Vemos entonces que no hay argumentos para asegurar la existencia de algún número α que permita afirmar que $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \alpha$.

En esta situación decimos que $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

□

Ejercicios 3.1.1 *Soluciones en la página 6*

1. Sean $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ así como $x_0 = 3$.

   ¿Qué se puede decir acerca de $\lim_{x\to x_0} f(x)$?

2. Dada $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq -1; \\ 1 & \text{si } x = -1. \end{cases}$

   ¿Existe $\lim_{x\to -1} f(x)$?

3. Sean $g(x) = \dfrac{x - 4}{|x - 4|}$ así como $x_0 = 4$.

   ¿Qué puede decir acerca de $\lim_{x\to x_0} g(x)$?

4. Sean $\phi(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ y también $a = -1$.

   ¿Existe $\lim_{x\to a} \phi(x)$?

5. Dada $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 < x < 0; \\ 1 & \text{si } x = 0; \\ 3x & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$

   ¿Existe $\lim_{x\to 0} h(x)$?

6. ¿Qué se puede decir acerca de $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$?

Ejercicios 3.1.1 *Introducción, página 5*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x) = 4\,.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) = 2\,.$
3. No existe $\displaystyle\lim_{x\to 4} g(x)$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \phi(x) = -2\,.$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x) = 0\,.$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ no existe.

CAPÍTULO

3

Límite de una función

[1]

3.2 Álgebra de límites

Es bastante claro intuitivamente lo siguiente:

Si existen $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)$ entonces:

- $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$.
- $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x)$.
- $\lim_{x \to x_0} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \times \lim_{x \to x_0} g(x)$.
- $\lim_{x \to x_0} [f(x)/g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x)/ \lim_{x \to x_0} g(x)$ si $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Esto es, que si $f(x)$ y también $g(x)$ están tan cerca de α y β, respectivamente, como queramos para valores de x próximos a x_0, entonces:

$f(x) + g(x)$	está tan próximo a	$\alpha + \beta$	como queramos con tal de que x esté suficientemente próximo a x_0 ;
$f(x) - g(x)$	"	$\alpha - \beta$	idem.
$f(x) \times g(x)$	"	$\alpha \times \beta$	idem.
$f(x)/g(x)$	"	α/β	idem.

Este hecho se puede extender para sumas y productos de más de dos funciones.
En el caso del cociente β tiene que ser $\neq 0$. Si $\beta = 0$, la afirmación no tiene sentido.

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Ejemplo 3.2.1 *Considerando que*

$$\lim_{x\to -3} f(x) = 4, \quad \lim_{x\to -3} g(x) = -2 \quad \& \quad \lim_{x\to -3} h(x) = 0,$$

calcular los límites que existan de la siguiente lista. Si el límite no existe argumentar por qué.

1. $\lim_{x\to -3}[f(x) + g(x)]$;
2. $\lim_{x\to -3}\dfrac{f(x)}{g(x)}$;
3. $\lim_{x\to -3}[g(x)h(x)]$;
4. $\lim_{x\to -3}\dfrac{g(x)}{h(x)}$;
5. $\lim_{x\to -3}\dfrac{h(x)}{g(x) - f(x)}$.

▼

1. $\lim_{x\to -3}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to -3} f(x) + \lim_{x\to -3} g(x) = 4 + (-2) = 4 - 2 = 2.$

2. $\lim_{x\to -3}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to -3} f(x)}{\lim_{x\to -3} g(x)} = \dfrac{4}{-2} = -2.$

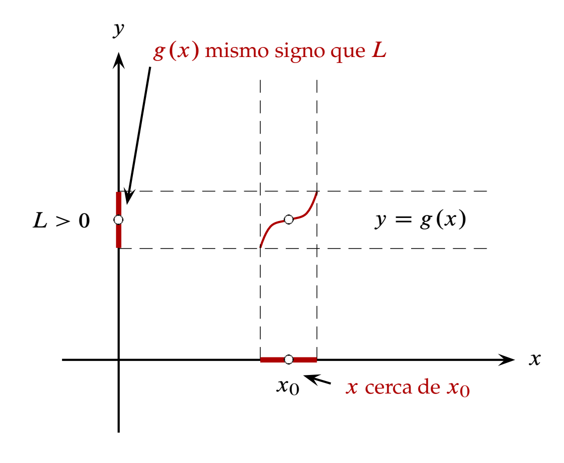
3. $\lim_{x\to -3}[g(x)h(x)] = [\lim_{x\to -3} g(x)][\lim_{x\to -3} h(x)] = (-2)(0) = 0.$

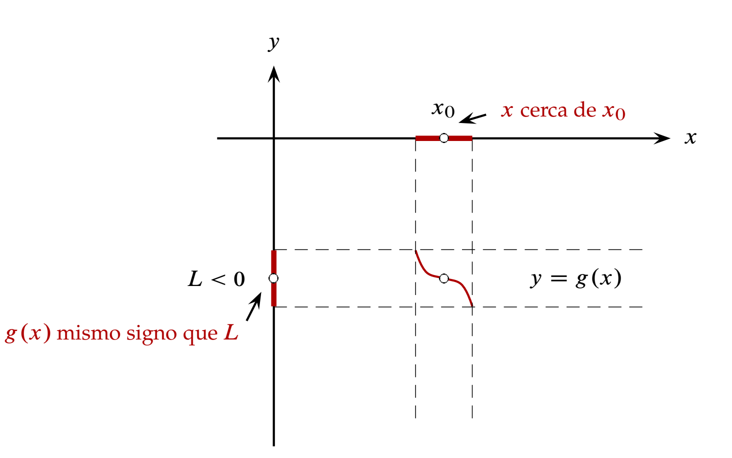
4. $\lim_{x\to -3}\dfrac{g(x)}{h(x)} = \text{“}\left(\dfrac{-2}{0}\right)\text{”} \notin \mathbb{R}$. $\lim_{x\to -3}\dfrac{g(x)}{h(x)}$ no existe como veremos más adelante.

5. $\lim_{x\to -3}\dfrac{h(x)}{g(x) - f(x)} = \dfrac{\lim_{x\to -3} h(x)}{\lim_{x\to -3}[g(x) - f(x)]} = \dfrac{\lim_{x\to -3} h(x)}{\lim_{x\to -3} g(x) - \lim_{x\to -3} f(x)} = \dfrac{0}{-2 - 4} = \dfrac{0}{-6} = 0.$

□

- Tambié es cierto que si $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$ y $L \neq 0$, entonces “cerca" de x_0 las imágenes $g(x)$ tienen el mismo signo que L.





- Uno de los casos más simples en el calculo de límites es el de una función constante $f(x) = \gamma$ en el que para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \gamma = \gamma.$$

Ejemplo 3.2.2 *Tenemos que:*

▼

1. $\lim_{x \to 4} 5 = 5;$
2. $\lim_{x \to -7} 8 = 8;$
3. $\lim_{x \to 3} -2 = -2.$

□

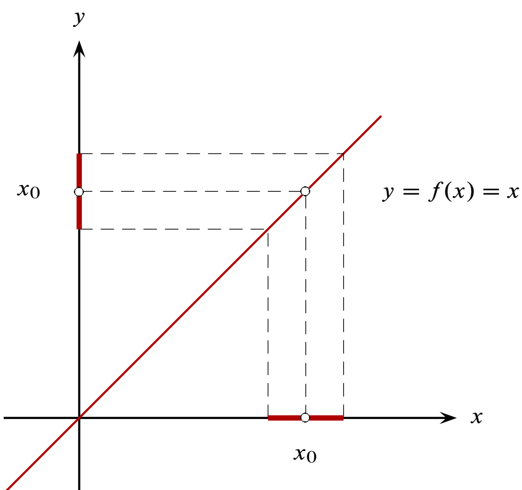
Entonces:

- $\lim_{x \to x_0} [\beta \times f(x)] = \beta \times \lim_{x \to x_0} f(x).$

  En particular de $\beta = -1$, tenemos $\lim_{x \to x_0} [-f(x)] = -\lim_{x \to x_0} f(x).$

Otro caso muy simple es el de la función identidad $f(x) = x$; aquí evidentemente

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0$ para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.



Y en consecuencia:

- Si $g(x) = mx + n$, entonces $\lim_{x \to x_0} g(x) = mx_0 + n$ para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Si $h(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{x \to x_0} h(x) = x_0^n$, para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.

Además:

- Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, entonces $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = \alpha^n$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Dos resultados muy importantes son:

- Si $f(x)$ es una función polinomial y además $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Si $f(x)$ es una función racional y además $x_0 \in D_f$, entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ejemplo 3.2.3 *Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 5$, calcular los límites siguientes:*

1. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;
4. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$;
5. $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} f(x)$;
6. $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}} f(x)$.

▼ Por ser f una función polinomial:

1. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 4(-1) - 5 = -2 + 3 + 4 - 5 = 0.$
2. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 4(2) - 5 = 16 + 12 - 8 - 5 = 15.$
3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2(0)^3 + 3(0)^2 - 4(0) - 5 = 0 + 0 - 0 - 5 = -5.$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) - 5 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 - 5 = -6.$
5. $$\begin{aligned}\lim_{x\to -\frac{3}{2}} f(x) &= f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) - 5 = \\ &= 2\left(-\frac{27}{8}\right) + 3\left(\frac{9}{4}\right) + 6 - 5 = \\ &= -\frac{27}{4} + \frac{27}{4} + 6 - 5 = 1.\end{aligned}$$
6. $$\begin{aligned}\lim_{x\to -\frac{2}{3}} f(x) &= f\left(-\frac{2}{3}\right) = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{3}\right) - 5 = \\ &= 2\left(-\frac{8}{27}\right) + 3\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{8}{3} - 5 = -\frac{16}{27} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} - 5 = -\frac{16}{27} + 4 - 5 = -\frac{43}{27}.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.2.4 *Dada la función* $g(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2 - 4}$, *calcular:*

1. $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$;
4. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} g(x)$;
5. $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}} g(x)$;
6. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} g(x)$.

▼ La función g es racional y su dominio es $D_g = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Por estar los números $0, -1, 3, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{2}$ en el dominio de la función g:

1. $\displaystyle \lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = \frac{4(0)^2 - 1}{0^2 - 4} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}.$

2. $\displaystyle \lim_{x\to -1} g(x) = g(-1) = \frac{4(-1)^2 - 1}{(-1)^2 - 4} = \frac{4-1}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1.$

3. $\displaystyle \lim_{x\to 3} g(x) = g(3) = \frac{4(3)^2 - 1}{(3)^2 - 4} = \frac{36-1}{9-4} = \frac{35}{5} = 7.$

4. $\displaystyle \lim_{x\to \frac{1}{2}} g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4} = \frac{1-1}{\frac{1}{4} - 4} = \frac{0}{-\frac{15}{4}} = 0.$

5. $\displaystyle \lim_{x\to -\frac{2}{3}} g(x) = g\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4} = \frac{\frac{16}{9} - 1}{\frac{4}{9} - 4} = \frac{\frac{7}{9}}{-\frac{32}{9}} = -\frac{7}{32}.$

6. $\displaystyle \lim_{x\to -\frac{1}{2}} g(x) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4} = \frac{1-1}{\frac{1}{4} - 4} = \frac{0}{-\frac{15}{4}} = 0.$

De 4. y de 6. se desprende que $\displaystyle \lim_{x\to -\frac{1}{2}} g(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}} g(x)$, lo cual es consistente pues $g(x)$ es par.

□

Otro resultado también importante es

- Si $\displaystyle \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y si $\displaystyle \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe, entonces $\displaystyle \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Este resultado usualmente se aplica de la siguiente forma:

- Si $\displaystyle \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y si $\displaystyle \lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, entonces $\displaystyle \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

Ejemplo 3.2.5 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{4x}{2x-1}$, *calcular* $\displaystyle \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$.

▼ Notamos primero que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$ y luego que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(4x) = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \neq 0$.

Podemos afirmar entonces que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ no existe.

□

Próximamente diremos algo más del $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, cuando $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$ al ver límites infinitos.

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ puede o no existir.

A este resultado algunos autores le llaman indeterminación cero sobre cero: "$\left(\frac{0}{0}\right)$".

Ejemplo 3.2.6 *Dada la función* $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$, *calcular* $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

▼ Primero notamos que $\lim\limits_{x\to -2}(x^2 - 4) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$.

Luego notamos que

$$\lim_{x\to -2}(x^2 - x - 6) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0.$$

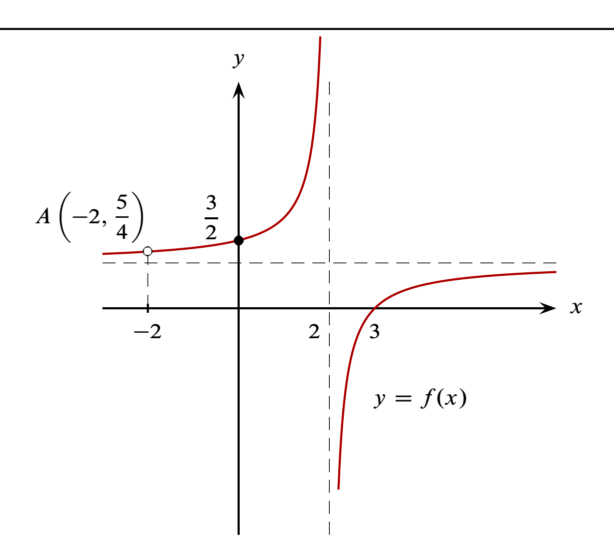
Entonces, puede ser que exista $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

Como $x = -2$ anula tanto a $x^2 - 4$ como a $x^2 - x - 6$, entonces $x - (-2) = x + 2$ es factor de ambos polinomios por el teorema del Residuo. Por lo tanto, después de factorizar,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} f(x) &= \lim_{x\to -2}\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to -2}\frac{x-3}{x-2} = \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x-3)}{\lim\limits_{x\to -2}(x-2)} = \frac{-2-3}{-2-2} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Pudimos cancelar el factor $x + 2$ en numerador y en denominador pues al calcular el límite hallamos que $x + 2 \neq 0$ al ser $x \neq -2$.

Comentario: puesto que $f(-2)$ no existe y que $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \frac{5}{4}$, entonces podemos visualizar que la gráfica de f tiene un orificio en el punto $A\left(-2, \frac{5}{4}\right)$.



□

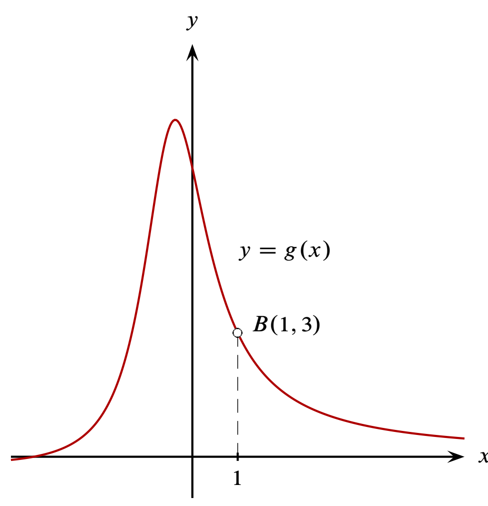
Ejemplo 3.2.7 *Dada la función* $g(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{x^3 - 1}$, *calcular* $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

▼ Primero notamos que $\lim\limits_{x \to 1}(x^3 - 1) = 1^3 - 1 = 0$ y luego que $\lim\limits_{x \to 1}(2x^2 + 5x - 7) = 2 + 5 - 7 = 0$. Entonces puede ser que exista $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

Como $x = 1$ anula tanto a $2x^2 + 5x - 7$ como a $x^3 - 1$, entonces $x - 1$ es factor de ambos polinomios. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{x^3 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(2x + 7)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} =$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x + 7}{x^2 + x + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}(2x + 7)}{\lim\limits_{x \to 1}(x^2 + x + 1)} = \frac{2 + 7}{1 + 1 + 1} = \frac{9}{3} = 3.$$

Comentario: como $g(1)$ no existe y $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$, entonces podemos concluir que la gráfica de g tiene un orificio en el punto $B(1, 3)$.



□

Ejemplo 3.2.8 *Dada* $h(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 27}$, *calcular* $\lim\limits_{x \to -3} h(x)$.

▼ Notamos primero que

$$\lim_{x \to -3}(x^3 + 27) = (-3)^3 + 27 = -27 + 27 = 0$$

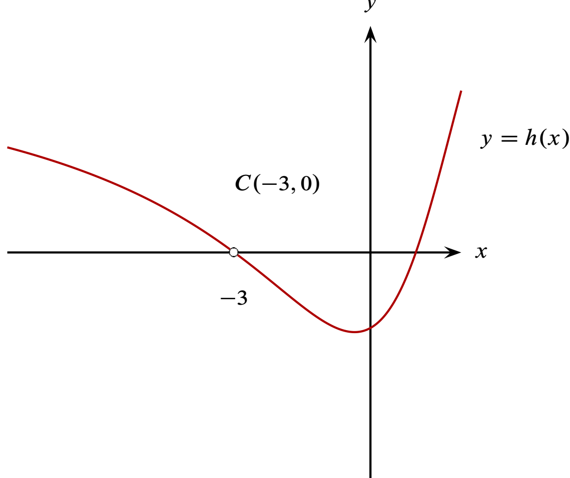
y luego que

$$\lim_{x \to -3}(x^3 + 5x^2 + 3x - 9) = (-3)^3 + 5(-3)^2 + 3(-3) - 9 = -27 + 45 - 9 - 9 = 0.$$

Puede suceder entonces que exista $\lim_{x \to -3} h(x)$.
Como $x = -3$ anula tanto al numerador como al denominador, entonces $x + 3$ es factor de ambos polinomios. Recuérdese que, en cada caso, el otro factor se puede obtener dividiendo el polinomio entre el factor $x + 3$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -3} h(x) &= \lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 27} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x^2 + 2x - 3)}{(x+3)(x^2 - 3x + 9)} = \\
&= \lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 9} = \frac{\lim_{x \to -3}(x^2 + 2x - 3)}{\lim_{x \to -3}(x^2 - 3x + 9)} = \frac{(-3)^2 + 2(-3) - 3}{(-3)^2 - 3(-3) + 9} = \\
&= \frac{9 - 6 - 3}{9 + 9 + 9} = \frac{0}{27} = 0.
\end{aligned}$$

Comentario: ya que $h(-3)$ no existe y que $\lim_{x \to -3} h(x) = 0$, entonces se puede afirmar que la curva $y = h(x)$ tiene un orificio en el punto $C(-3, 0)$.



□

Ejemplo 3.2.9 *Dada* $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$*, calcular* $\lim_{x \to -1} g(x)$.

▼ Notamos primero que

$$\lim_{x \to -1}(x^2 + 2x + 1) = (-1)^2 + 2(-1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

y luego que

$$\lim_{x \to -1}(x^2 - 1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Entonces puede ser que exista $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.
Factorizando numerador y denominador:

$$\lim_{x\to -1} g(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+1}.$$

Ahora notamos que

$$\lim_{x\to -1}(x+1) = -1+1 = 0$$

y que

$$\lim_{x\to -1}(x-1) = -1-1 = -2 \neq 0.$$

Entonces sucede que $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-1}{x+1}$ no existe.
Por lo tanto $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ no existe.

□

Ejemplo 3.2.10 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

▼ Ya que $\lim\limits_{x\to 1}(1-x) = 0$ y que $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^3) = 0$ y también que tanto $\lim\limits_{x\to 1} 1 = 1$ como $\lim\limits_{x\to 1} 3 = 3$ son distintos de cero, no podemos expresar el límite pedido como la diferencia de límites:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x} - \lim_{x\to 1}\frac{3}{1-x^3},$$

pues estos últimos no existen. Entonces, procedemos algebraicamente. Primero sumamos las fracciones y luego simplificamos.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} &= \frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \\
&= \frac{(1+x+x^2)-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \\
&= \frac{(x-1)(x+2)}{-(x-1)(1+x+x^2)} = \\
&= \frac{x+2}{-(1+x+x^2)} \text{ si } x-1 \neq 0, \text{ es decir, si } x \neq 1.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{-(1+x+x^2)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}[-(1+x+x^2)]} = \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}{-\lim\limits_{x\to 1}(1+x+x^2)} = \frac{1+2}{-(1+1+1)} = \frac{3}{-3} = -1.
\end{aligned}$$

□

Otras reglas importantes para el cálculo de límites son las siguientes:

- $f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \sqrt[n]{x_0}$.

  Si n es par se requiere que $x_0 > 0$.

- $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = x^{\frac{m}{n}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0^{\frac{m}{n}}$.

  Si n es par se requiere que $x_0 > 0$.

- Si $n \in \mathbb{N}$ es impar o bien $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ cuando $n \in \mathbb{N}$ sea par, entonces

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}.$$

  Si n es par se requiere que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$.

- Si $f(x) \le h(x) \le g(x)$ para x en un intervalo abierto que contiene a x_0 y

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \alpha \Rightarrow \lim_{x\to x_0} h(x) = \alpha.$$

Ejemplo 3.2.11 *Dadas las funciones* $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ & $g(x) = \sqrt[3]{4-3x^2}$, *calcular*

1. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$;
4. $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}[f(x) - g(x)]$;
6. $\lim\limits_{x\to -3}[f(x)g(x)]$.

▼

1. $$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \sqrt{x^3+1} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(x^3+1)} = \sqrt{(2)^3+1} = \\ = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3.$$

2. $$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \sqrt[3]{4-3x^2} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(4-3x^2)} = \sqrt[3]{4-3(2)^2} = \\ = \sqrt[3]{4-12} = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

3. Notamos primero que $\lim\limits_{x\to -2}(x^3+1) = (-2)^3 + 1 = -8 + 1 = -7 < 0$ y afirmamos luego que $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ no tiene sentido pues

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^3 + 1 \ge 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^3 \ge -1 \right\} = [-1, +\infty)$$

   y no contiene intervalos abiertos que contengan a -2.

4. $$\lim_{x\to-1} g(x) = \lim_{x\to-1} \sqrt[3]{4-3x^2} = \sqrt[3]{\lim_{x\to-1}(4-3x^2)} = \\ = \sqrt[3]{4-3(-1)^2} = \sqrt[3]{4-3} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

5. $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \sqrt{x^3+1} = \sqrt{\lim_{x\to0}(x^3+1)} = \sqrt{0^3+1} = \sqrt{1} = 1.$

   Por otra parte

$$\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0} \sqrt[3]{4-3x^2} = \sqrt[3]{\lim_{x\to0}(4-3x^2)} = \sqrt[3]{4-3(0)^2} = \sqrt[3]{4-0} = \sqrt[3]{4}.$$

   Luego

$$\lim_{x\to0}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to0} f(x) - \lim_{x\to0} g(x) = 1-\sqrt[3]{4}.$$

6. Observamos que

$$D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g = [-1,+\infty)\cap\mathbb{R} = [-1,+\infty)$$

   y entonces calcular

$$\lim_{x\to-3} f(x)g(x)$$

   no tiene sentido puesto que la función $f\cdot g$ no está definida cerca de -3.

□

Ejemplo 3.2.12 *Calcular* $\lim_{x\to4}\dfrac{4-x}{2-\sqrt{x}}$.

▼ Notamos primero que $\lim_{x\to4}(2-\sqrt{x}) = 2-\sqrt{4} = 2-2 = 0$ y luego que $\lim_{x\to4}(4-x) = 4-4 = 0$. Observamos que podemos factorizar el numerador y entonces

$$\lim_{x\to4}\frac{4-x}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to4}\left[\frac{2^2-(\sqrt{x})^2}{2-\sqrt{x}}\right] = \lim_{x\to4}\frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})} = \\ = \lim_{x\to4}(2+\sqrt{x}) = 2+\sqrt{4} = 2+2 = 4.$$

□

Ejemplo 3.2.13 *Calcular* $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}$.

▼ Vemos primero que $\lim_{x\to0} x = 0$ y luego que $\lim_{x\to0}(\sqrt{3-x}-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-\sqrt{3} = 0$.
Usemos un artificio algebraico: racionalizamos al numerador para generar una diferencia de cuadrados (multiplicamos al numerador y al denominador por el "binomio conjugado" del numerador que

es $\neq 0$):

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}\,\frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{3-x})^2-(\sqrt{3})^2}{x(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 0}\frac{(3-x)-3}{x(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} = \\
&= \frac{-1}{\sqrt{3-0}+\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 3.2.14 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$.

▼ Notemos primero que

$$\lim_{x\to 3}(x^2-4x+3) = 3^2-4(3)+3 = 9-12+3 = 0.$$

Y luego observemos que

$$\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}\right) = \sqrt{9-6+6}-\sqrt{9+6-6} = 3-3 = 0.$$

Procedemos analogamente al ejemplo anterior racionalizando al numerador. Se multiplica y divide por $\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}$ que es una cantidad $\neq 0$ si consideramos que $x\neq 3$.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} = \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}\,\frac{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}} = \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x^2-2x+6})^2-(\sqrt{x^2+2x-6})^2}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} = \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{(x^2-2x+6)-(x^2+2x-6)}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} = \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{-4x+12}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} = \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{-4(x-3)}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} = \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{-4}{(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} = \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 3}-4}{\lim\limits_{x\to 3}[(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})]} =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{-4}{\lim\limits_{x\to 3}(x-1)\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} =$$

$$= \frac{-4}{2\left(\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2-2x+6}+\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2+2x-6}\right)} =$$

$$= \frac{-4}{2(3+3)} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

□

Ejercicios 3.2.1 *Soluciones en la página 16*

I. Considerando que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -8$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = 0$ y que $\lim\limits_{x\to 2} \phi(x)$ no existe, calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 2} [g(x) - f(x)]$.
2. $\lim\limits_{x\to 2} [f(x)\cdot g(x)]$.
3. $\lim\limits_{x\to 2} [f(x) + \phi(x)]$.
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{f(x)}$.
5. $\lim\limits_{x\to 2} \left[f^2(x) - g^3(x)\right]$.
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)h(x)}{g(x)}$.
7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$.
8. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\sqrt{g(x)} + \sqrt[3]{f(x)}\right]$.
9. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]^5$.
10. $\lim\limits_{x\to 2} \left[h(x)\sqrt{f(x)}\right]$.

II. Calcular los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to 4} (-x^2 - 9x - 8)$.
2. $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{x^4 - 2x + 1}$.
3. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{-x^2 + 8x - 3}$.
4. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$.
5. $\lim\limits_{x\to 6} \left[(x+4)^3(x-5)^2\right]$.
6. $\lim\limits_{x\to -1} (4x^3 + 3x^2 - 2x - 1)$.
7. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} (x^3 - x^2 - x + 1)$.
8. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} (3 - 4x + 5x^2)$.
9. $\lim\limits_{x\to 0} (3x^2 - 2)^5$.
10. $\lim\limits_{x\to -3} (6 - x^2)^4$.
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2 - 4x + 5}{6x^2 - 7x + 8}$.
12. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x + 2}{x^2 + 4}$.
13. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$.

14. $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)^3}{(4x^2+1)^5}$.

III. Calcular los límites siguientes:

1. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-25}$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{6x^2-3x^3}$.

5. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4-3x^2+2}{x^4+2x^2-3}$.

7. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1}$.

8. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$.

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

10. $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

11. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

12. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

13. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$.

14. $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

15. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

16. $\displaystyle\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

17. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

18. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x^2+2x-3}$.

19. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x^2-5x}{x^2-7x}$.

20. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2}$.

21. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$.

22. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x-\sqrt{-12x+40}}{3x^2+x-14}$.

23. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+1}-1}{h}$.

24. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.

25. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$.

26. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x^3-16}{-3x^2+8x-4}$.

27. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$.

28. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{2}{3}} \frac{\sqrt{9x+19}-6x-1}{6x^2-19x+10}$.

29. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{4-\sqrt{x+15}}{x^2-1}$.

30. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2+5x+6}$.

31. $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{2x^2+5x-3}{x^2-2x-15}$.

32. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

33. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-x}{x^2-1}$.

34. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2+4x-7}{x^2-1}$.

35. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{-\sqrt{x+4}+2}$.

36. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-2x^2+2x-1}{x-1}$.

37. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{4}{x}-3\right) x$.

38. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+25}-5}$.

39. Considere la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{13-x^2}-x-1}{x^2-5x+6}$.

a. Viendo la tabla de imágenes de f, calcule $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ con dos cifras decimales exactas:

x	$f(x)$
1.997	1.66096
1.998	1.66286
1.999	1.66476
2	Indeterminado
2.001	1.66858
2.002	1.67049
2.003	1.67241

b. Calcule exactamente $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ usando la expresión algebraica de la función.
¿Cuál es la tercera cifra decimal exacta del valor del límite?

Ejercicios 3.2.1 *Álgebra de límites, página 13*

I.

1. 12.
2. -32.
3. No existe.
4. $-\frac{1}{2}$.
5. 0.
6. 0.
7. No existe.
8. 0.
9. -32.
10. No existe.

II.

1. $\lim_{x\to 4}(-x^2 - 9x - 8) = -60$.
2. $\lim_{x\to -2}\sqrt{x^4 - 2x + 1} = \sqrt{21}$.
3. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{x^2 - 3x + 1}{-x^2 + 8x - 3} = -\frac{1}{3}$.
4. $\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 = 32$.
5. $\lim_{x\to 6}\left[(x+4)^3(x-5)^2\right] = 1\,000$.
6. $\lim_{x\to -1}(4x^3 + 3x^2 - 2x - 1) = 0$.
7. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}(x^3 - x^2 - x + 1) = \frac{3}{8}$.
8. $\lim_{x\to \frac{2}{3}}(3 - 4x + 5x^2) = \frac{23}{9}$.
9. $\lim_{x\to 0}(3x^2 - 2)^5 = -32$.
10. $\lim_{x\to -3}(6 - x^2)^4 = 81$.
11. $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2 - 4x + 5}{6x^2 - 7x + 8} = \frac{5}{8}$.
12. $\lim_{x\to -2}\frac{3x + 2}{x^2 + 4} = -\frac{1}{2}$.
13. $\lim_{x\to -1}\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = 0$.
14. $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{(2x - 1)^3}{(4x^2 + 1)^5} = -\frac{1}{4}$.

III.

1. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = -2$.
2. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} = 0$.
3. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 25} = \frac{3}{10}$.
4. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3 - 8}{6x^2 - 3x^3} = -1$.
5. $\lim_{x\to a}\frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} = \frac{a - 1}{3a^2}$.
6. $\lim_{x\to 1}\frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^4 + 2x^2 - 3} = -\frac{1}{4}$.
7. $\lim_{x\to 1}\frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} = \frac{4}{3}$.
8. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1\,.$

10. $\lim_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = -\dfrac{1}{56}\,.$

11. $\lim_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = -\dfrac{1}{3}\,.$

12. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,.$

13. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} = -\dfrac{1}{3}$

14. $\lim_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = 12\,.$

15. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}\,.$

16. $\lim_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = 3\,.$

17. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \dfrac{4}{3}\,.$

18. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1}-2x}{x^2+2x-3} = -\dfrac{5}{16}\,.$

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3-3x^2-5x}{x^2-7x} = \dfrac{5}{7}\,.$

20. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2} = \dfrac{1}{2}\,.$

21. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right) = 1\,.$

22. $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x-\sqrt{-12x+40}}{3x^2+x-14} = \dfrac{7}{26}\,.$

23. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h+1}-1}{h} = \dfrac{1}{2}\,.$

24. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \dfrac{1}{4}\,.$

25. $\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right) = \dfrac{1}{2}\,.$

26. $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^3-16}{-3x^2+8x-4} = -6\,.$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,.$

28. $\lim_{x\to \frac{2}{3}} \dfrac{\sqrt{9x+19}-6x-1}{6x^2-19x+10} = \dfrac{51}{110}\,.$

29. $\lim_{x\to 1} \dfrac{4-\sqrt{x+15}}{x^2-1} = -\dfrac{1}{16}\,.$

30. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2+5x+6} = 12\,.$

31. $\lim_{x\to -3} \left(\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-2x-15}\right) = \dfrac{7}{8}\,.$

32. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,.$

33. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\,.$

34. $\lim_{x\to 1} \dfrac{3x^2+4x-7}{x^2-1} = 5\,.$

35. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{-\sqrt{x+4}+2}\right) = -2\,.$

36. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2+2x-1}{x-1} = 1\,.$

37. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{4}{x}-3\right)x = 4\,.$

38. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+25}-5} = 0\,.$

39.
   a. Se comprueba que $\lim_{x\to 2} f(x) = 1.66$;
   b. $\lim_{x\to 2} f(x) = 1.6667$;
   6 es la tercera cifra decimal del límite .

CAPÍTULO

3

Límite de una función

[1]

3.3 Límites laterales

- Supongamos que $f(x)$ está definida en un cierto intervalo (a, x_0). Si para números x del dominio de f suficientemente próximos a x_0 y menores que x_0, los valores correspondientes de $f(x)$ están tan próximos a α_1 como queramos, decimos que α_1 es el límite por la izquierda de $f(x)$, cuando x tiende a x_0. Lo anterior se denota mediante

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha_1;$$

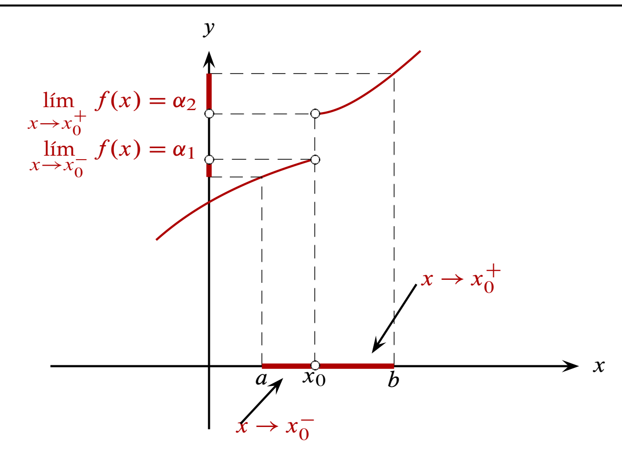
$x \to x_0^-$ se lee: x tiende a x_0 por la izquierda.

- Supongamos que $f(x)$ está definida en un cierto intervalo (x_0, b). Si para números x del dominio de f suficientemente próximos a x_0 y mayores que x_0, los valores correspondientes de $f(x)$ están tan próximos a α_2 como queramos, decimos que α_2 es el límite por la derecha de $f(x)$, cuando x tiende a x_0. Lo anterior se denota

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \alpha_2;$$

$x \to x_0^+$ se lee: x tiende a x_0 por la derecha.

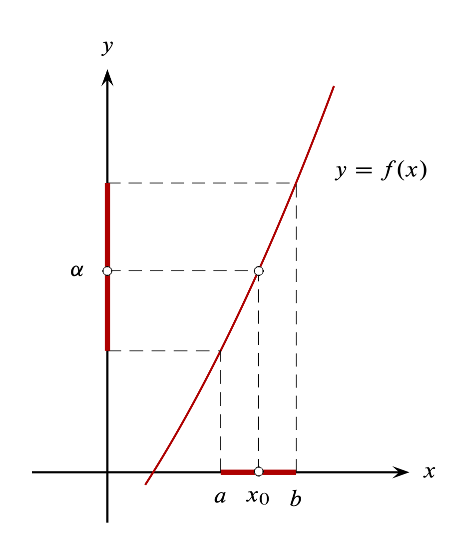
[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



A los límites $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ & $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ se les conoce como límites laterales.

Es claro que:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.



Este resultado se usa frecuentemente para probar la no existencia de un límite.

- Si no existe alguno de los límites laterales, el límite no existe.
- Si los límites laterales existen pero son diferentes, el límite no existe.

Observación: para los límites laterales $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ & $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ hallamos resultados análogos a los que hemos enlistado anteriormente para el límite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Ejemplo 3.3.1 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{|\,x - a\,|}{x - a}$*, calcular (en caso de existir) cada uno de los límites siguientes:*

1. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.
2. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

▼ Por definición de valor absoluto:

$$|\,x-a\,| = \begin{cases} x-a & \text{si } x-a \geq 0 \\ -(x-a) & \text{si } x-a < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-a & \text{si } x \geq a; \\ -(x-a) & \text{si } x < a. \end{cases}$$

Por lo tanto

1. Si $x \to a^-$, entonces $x < a$ & $x - a < 0$, por lo que

$$|\,x-a\,| = -(x-a) \;\&\; \frac{|\,x-a\,|}{x-a} = \frac{-(x-a)}{(x-a)} = -1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a^-} \frac{|\,x-a\,|}{x-a} = \lim_{x\to a} -1 = -1.$$

2. Si $x \to a^+$, entonces $x > a$ & $x - a > 0$, por lo que

$$|\,x-a\,| = x-a \;\&\; \frac{|\,x-a\,|}{x-a} = \frac{(x-a)}{(x-a)} = 1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{|\,x-a\,|}{x-a} = \lim_{x\to a} 1 = 1.$$

3. Ya que $\lim_{x\to a^-} f(x) = -1$ & $\lim_{x\to a^+} f(x) = 1$ entonces $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$ y por lo tanto $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe.

Observa que $f(x) = \dfrac{|\,x-a\,|}{x-a}$ se obtiene de la función $g(x) = \dfrac{|\,x\,|}{x}$ desplazándola a unidades.

□

Ejemplo 3.3.2 *Dada la función* $g(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x < -1; \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x < 2; \\ 6-x & \text{si } x > 2, \end{cases}$

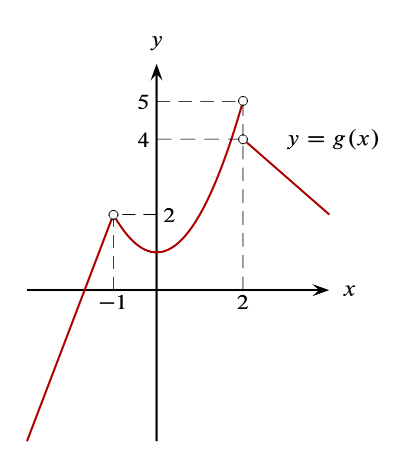
calcular (en caso de existir) cada uno de los límites siguientes:

1. $\lim_{x\to -1^-} g(x)$.
2. $\lim_{x\to -1^+} g(x)$.
3. $\lim_{x\to -1} g(x)$.
4. $\lim_{x\to 2^-} g(x)$.
5. $\lim_{x\to 2^+} g(x)$.
6. $\lim_{x\to 2} g(x)$.

▼

1. $\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^-} (3x+5) = 3(-1)+5 = -3+5 = 2$.
2. $\lim_{x\to -1^+} g(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2+1) = (-1)^2+1 = 1+1 = 2$.
3. Ya que $\lim_{x\to -1^-} g(x) = 2 = \lim_{x\to -1^+} g(x)$, entonces $\lim_{x\to -1} g(x) = 2$.
4. $\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2+1) = 2^2+1 = 4+1 = 5$.
5. $\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} (6-x) = 6-2 = 4$.

6. Ya que $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} g(x) = 5 \neq 4 = \lim_{x\to 2^+} g(x)$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 2} g(x)$ no existe.



□

Ejemplo 3.3.3 *Dada la función* $h(x) = \begin{cases} ax+5 & \text{si } x < -1; \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x < 2; \\ mx+6 & \text{si } x > 2, \end{cases}$

determinar los valores de las constantes a, m *que aseguran la existencia de los límites:* $\displaystyle\lim_{x\to -1} h(x)$ & $\displaystyle\lim_{x\to 2} h(x)$.

▼

1. $\displaystyle\lim_{x\to -1} h(x)$ existe si y sólo si

$$\lim_{x\to -1^-} h(x) = \lim_{x\to -1^+} h(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to -1}(ax+5) = \lim_{x\to -1}(x^2+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a(-1)+5 = (-1)^2+1 \Leftrightarrow -a+5 = 1+1 \Leftrightarrow -a = 2-5 = -3 \Leftrightarrow a = 3.$$

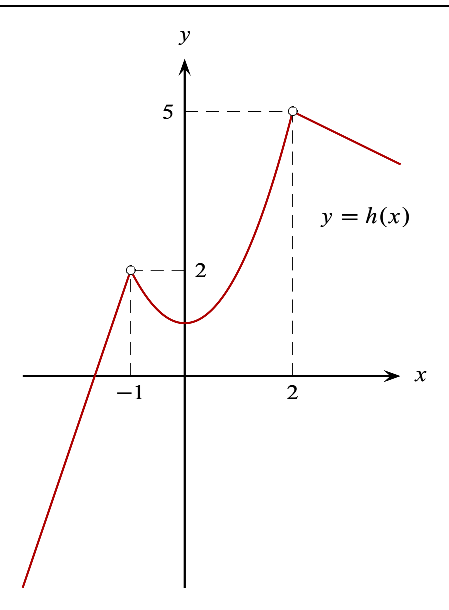
2. $\displaystyle\lim_{x\to 2} h(x)$ existe si y sólo si

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^+} h(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}(x^2+1) = \lim_{x\to 2}(mx+6) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^2+1 = m(2)+6 \Leftrightarrow 5 = 2m+6 \Leftrightarrow 2m = 5-6 = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

3. Resumiendo:

Con $a = 3$ y con $m = -\dfrac{1}{2}$ sucede que $\displaystyle\lim_{x\to -1} h(x) = 2$ & $\displaystyle\lim_{x\to 2} h(x) = 5$; $h(x)$ sería ahora

$$h(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x < -1; \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x < 2; \\ -\dfrac{x}{2}+6 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$



□

Ejemplo 3.3.4 *Dada la función* $\phi(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x < -1; \\ mx^2+n & \text{si } -1 < x < 2; \\ 6-\dfrac{x}{2} & \text{si } x > 2, \end{cases}$

determinar los valores de las constantes m, n *que aseguran la existencia de los límites:* $\lim\limits_{x\to -1} \phi(x)$ & $\lim\limits_{x\to 2} \phi(x)$.

▼

1. $\lim\limits_{x\to -1} \phi(x)$ existe si y sólo si

$$\lim_{x\to -1^-} \phi(x) = \lim_{x\to -1^+} \phi(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to -1} (3x+5) = \lim_{x\to -1} (mx^2+n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(-1)+5 = m(-1)^2+n \Leftrightarrow -3+5 = m(1)+n \Leftrightarrow m+n = 2.$$

2. $\lim\limits_{x\to 2} \phi(x)$ existe si y sólo si

$$\lim_{x\to 2^-} \phi(x) = \lim_{x\to 2^+} \phi(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2} (mx^2+n) = \lim_{x\to 2} \left(6-\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m(2)^2+n = 6-\frac{2}{2} \Leftrightarrow 4m+n = 5.$$

3. Debemos resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} m+n & = 2; \\ 4m+n & = 5. \end{cases}$

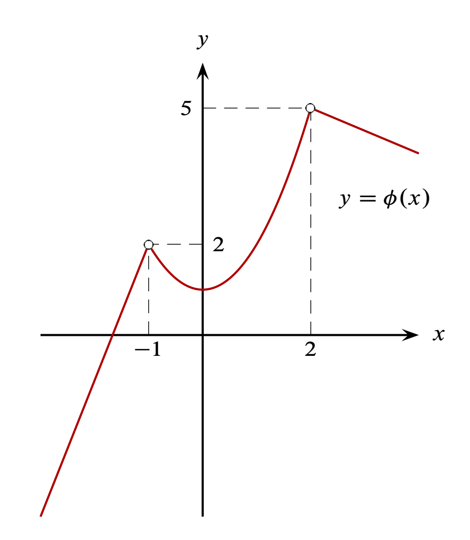
$$\begin{cases} 4m+n = 5; \\ \underline{-m-n = -2}. \end{cases}$$
$$3m = 3 \Rightarrow m = 1 \;\&\; m+n = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = 2-m = 2-1 = 1.$$

4. Con $m = 1$ y con $n = 1$ se cumple que

$$\lim_{x\to -1} \phi(x) = 2 \qquad \& \qquad \lim_{x\to 2} \phi(x) = 5,$$

donde ahora

$$\phi(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si } x < -1; \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2; \\ 6 - \dfrac{x}{2} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$



□

Ejercicios 3.3.1 *Soluciones en la página 8*

1. Dada $f(x) = \dfrac{|\,x\,|}{x}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; b. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; c. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Dada $f(x) = \dfrac{x - a}{|\,x - a\,|}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$; b. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$; c. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

3. Dada $g(x) = |\,x - 2\,| - x + 2$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$; b. $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$; c. $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

4. Dada $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1; \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 < x < 2; \\ 2 - x & \text{si } x > 2. \end{cases}$

   Calcular:

a. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$;
b. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$;
c. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$;
d. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$;
e. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$;
f. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

5. Dada $g(x) = \begin{cases} ax + 11 & \text{si } x < 3; \\ x^2 - 8x + 16 & \text{si } x > 3. \end{cases}$

   Determinar el valor de la constante a que asegura la existencia de $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$.

6. La expresión $L = L_o\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$ indica la longitud de un objeto en función de su velocidad v, donde L_o es la longitud del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz.

   ¿Qué pasa con la longitud del objeto cuando v se aproxima a la velocidad de la luz?

7. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\,x\,| - x}{x}$.

8. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{|\,x - 1\,|}$.

9. Sea la función definida por

   $$f(x) = n, \text{ para cada } x \in [n, n+1), \text{ donde } n \in \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}.$$

   a. Grafique esa función f.
   b. Calcular para $n \in \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}$.

   $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to n} f(x)$ & $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, donde $a \neq n$.

10. Considerar $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \le 1; \\ x + 1 & \text{si } x > 1; \end{cases}$ y considerar $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1; \\ 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

    Calcular

    a. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)g(x)$;
    b. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)g(x)$;
    c. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)g(x)$.

11. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3}}{x - 1}$.

12. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0} \left[|\,x\,|^3 \left(x + 1 - \dfrac{2}{x} \right) \right]$.

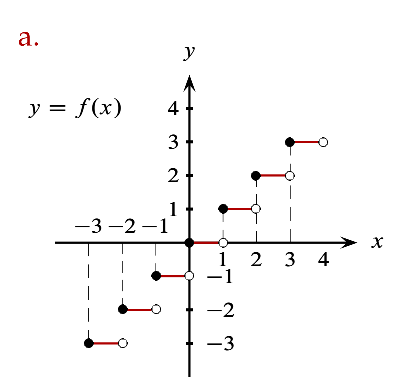
13. Calcular: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 1}{x^4 + 3} & \text{si } x < -1; \\ \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 6x + 5} & \text{si } x > -1. \end{cases}$

14. Calcular: $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2 - x}{|\,x - 2\,|}$.

15. Calcular: $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{|\,|\,2 + x\,| - 3\,| - 2}{x^2 - 9}$.

Ejercicios 3.3.1 *Límites laterales, página 6*

1. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1;$
   $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1;$
   $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.
2. $\lim_{x\to a^-} f(x) = -1;$
   $\lim_{x\to a^+} f(x) = 1;$
   $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe.
3. $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 0;$
   $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 0;$
   $\lim_{x\to 2} g(x) = 0\,.$
4. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -2;$
   $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -2;$
   $\lim_{x\to -1} f(x) = -2;$
   $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1;$
   $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0;$
   $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.
5. $a = -\dfrac{10}{3}\,.$
6. $\lim_{v\to c^-} L_o\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = 0\,.$
7. No existe $\lim_{x\to 0} \dfrac{|\,x\,| - x}{x}\,.$
8. No existe $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{|\,x-1\,|}\,.$
9.
   a.



   b. $\lim_{x\to n^-} f(x) = n-1;$
   $\lim_{x\to n^+} f(x) = n;$
   no existe $\lim_{x\to n} f(x);$
   $\lim_{x\to a} f(x) = n$ si $a \in [n, n+1)\,.$
10. $\lim_{x\to 1^-} [f(x)g(x)] = 4;$
    $\lim_{x\to 1^+} [f(x)g(x)] = 4;$
    $\lim_{x\to 1} [f(x)g(x)] = 4.$
11. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,.$
12. $\lim_{x\to 0} |\,x\,|^3\left(x+1-\dfrac{2}{x}\right) = 0\,.$
13. $\lim_{x\to -1} f(x) = \dfrac{3}{4}\,.$
14. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{2-x}{|\,x-2\,|} = -1\,.$
15. $\lim_{x\to -3^-} \dfrac{|\,|\,2+x\,|-3\,|-2}{x^2-9} = -\dfrac{1}{6}\,.$

CAPÍTULO

3

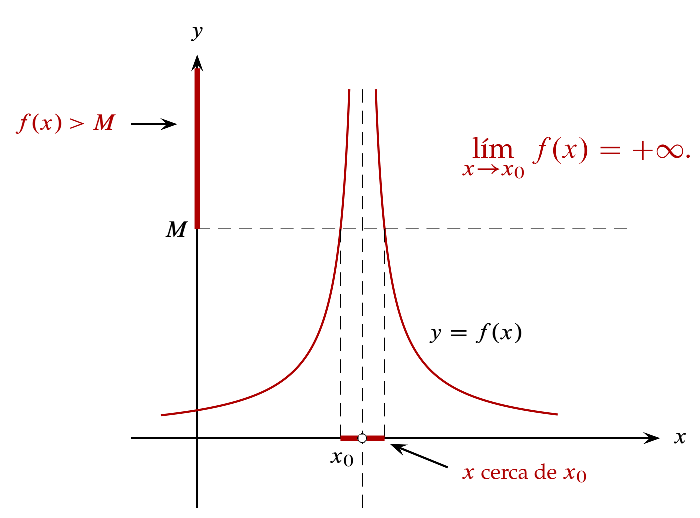
Límite de una función

[1]

3.4 Límites infinitos

- Si dado cualquier número $M > 0$, $f(x) > M$ con tal de tomar a x suficientemente cerca de x_0, diremos que $f(x)$ diverge a $+\infty$ (se lee "más infinito") y lo denotaremos así: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

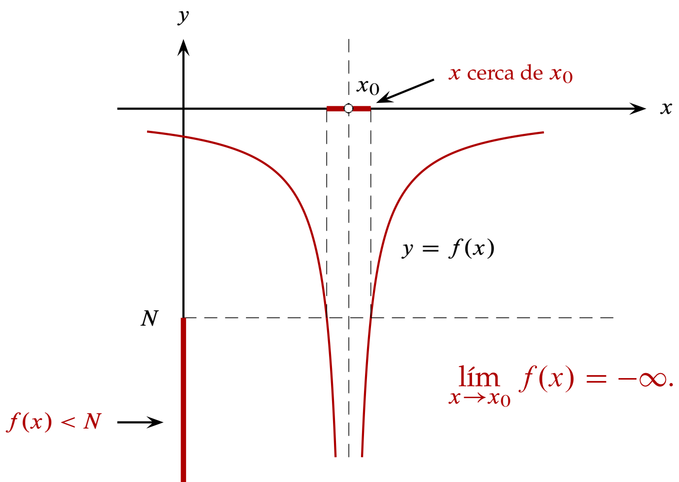
  Gráficamente $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ quiere decir que dada cualquier recta $y = M$ con $M > 0$, la gráfica de $f(x)$ en cierto intervalo con centro en x_0 está arriba de tal recta, exceptuando lo que ocurre en x_0.



- Si dado cualquier número $N < 0$, $f(x) < N$ con tal de tomar a x suficientemente cerca de x_0 diremos que $f(x)$ diverge a $-\infty$ (se lee "menos infinito") y lo denotaremos así: $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Gráficamente $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ quiere decir que dada cualquier recta $y = N$ con $N < 0$, la gráfica de $f(x)$ en cierto intervalo con centro en x_0 está abajo de tal recta, exceptuando lo que ocurre en x_0.



Las definiciones de $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ y de $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ son análogas.

Tenemos entonces:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty.$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty.$

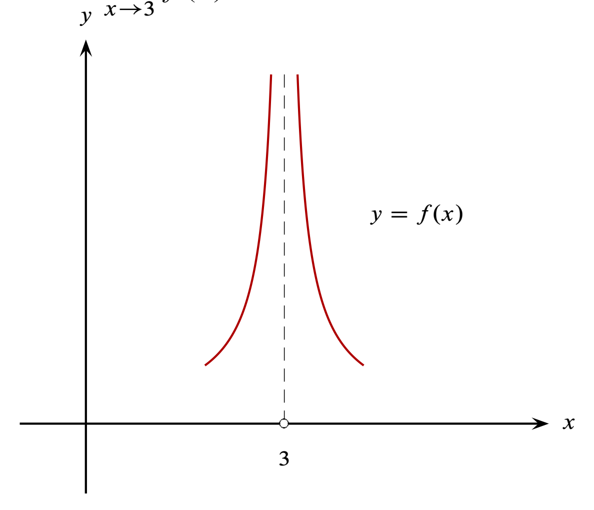
Ejemplo 3.4.1 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$, *mostrar numéricamente que* $\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$.

▼ Numéricamente podemos dar a la variable x valores cada vez más cercanos (por la izquierda o por la derecha) al número $x_0 = 3$; obtener las imágenes $f(x)$ correspondientes y observar su comportamiento.

x	$f(x)$
2.9	$\dfrac{1}{10^{-2}} = 10^2$
2.99	$\dfrac{1}{10^{-4}} = 10^4$
2.999	$\dfrac{1}{10^{-6}} = 10^6$
2.9999	$\dfrac{1}{10^{-8}} = 10^8$
$\downarrow$	$\downarrow$
3^-	$+\infty$

x	$f(x)$
3.1	$\dfrac{1}{10^{-2}} = 10^2$
3.01	$\dfrac{1}{10^{-4}} = 10^4$
3.001	$\dfrac{1}{10^{-6}} = 10^6$
3.0001	$\dfrac{1}{10^{-8}} = 10^8$
$\downarrow$	$\downarrow$
3^+	$+\infty$

Observamos aquí que, cuanto más se acerca x al número $x_0 = 3$, las imágenes $f(x)$ $(= 10^2, 10^4, 10^6, 10^8, ...)$ son cada vez más grandes. Este comportamiento es el que (intuitivamente) nos lleva a afirmar que $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to 3$. Es decir $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$. Gráficamente se ve así:



□

Ejemplo 3.4.2 *Dada* $f(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^4}$, *mostrar numéricamente que* $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$.

▼ Damos a x valores numéricos cada vez más cercanos al número $x_0 = 2$, primero por la izquierda $(x \to 2^-)$ y luego por la derecha $(x \to 2^+)$; obtenemos las imágenes $f(x)$ correspondientes y observamos su comportamiento.

1. Cuando $x \to 2^-$:

$$x = 1.9 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{(1.9-2)^4} = \frac{-1}{(-0.1)^4} = \frac{-1}{(-10^{-1})^4} = \frac{-1}{10^{-4}} = -10^4;$$
$$x = 1.99 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{(1.99-2)^4} = \frac{-1}{(-0.01)^4} = \frac{-1}{(-10^{-2})^4} = \frac{-1}{10^{-8}} = -10^8;$$
$$x = 1.999 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{(1.999-2)^4} = \frac{-1}{(-0.001)^4} = \frac{-1}{(-10^{-3})^4} = \frac{-1}{10^{-12}} = -10^{12}.$$

   Observamos aquí que las imágenes $f(x)$ son negativas y cada vez de mayor valor absoluto. Intuitivamente decimos que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$. Esto es $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$.

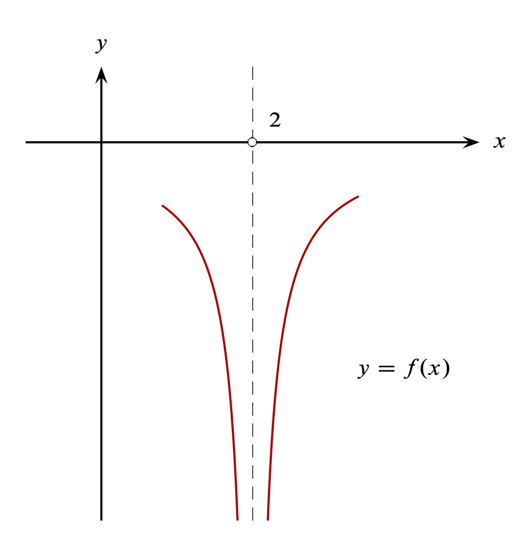
2. Cuando $x \to 2^+$:

$$x = 2.1 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{(2.1-2)^4} = \frac{-1}{(0.1)^4} = \frac{-1}{(10^{-1})^4} = \frac{-1}{10^{-4}} = -10^4;$$
$$x = 2.01 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{(2.01-2)^4} = \frac{-1}{(0.01)^4} = \frac{-1}{(10^{-2})^4} = \frac{-1}{10^{-8}} = -10^8;$$
$$x = 2.001 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{(2.001-2)^4} = \frac{-1}{(0.001)^4} = \frac{-1}{(10^{-3})^4} = \frac{-1}{10^{-12}} = -10^{12}.$$

   Aquí también observamos que las imágenes $f(x)$ son negativas y cada vez de mayor valor absoluto; por lo cual (intuitivamente) decimos que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^+$. Es decir, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$.

3. Ya que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ & $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, podemos afirmar que $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$.

Gráficamente se ve así:



□

Además tenemos en general

- Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y si $g(x) > 0$ cerca de x_0, entonces $\lim_{x\to x_0} \frac{c}{g(x)} = +\infty$ si $c > 0$;
- Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y si $g(x) < 0$ cerca de x_0, entonces $\lim_{x\to x_0} \frac{c}{g(x)} = -\infty$ si $c > 0$;
- Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y si $g(x) > 0$ cerca de x_0, entonces $\lim_{x\to x_0} \frac{c}{g(x)} = -\infty$ si $c < 0$;
- Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y si $g(x) < 0$ cerca de x_0, entonces $\lim_{x\to x_0} \frac{c}{g(x)} = +\infty$ si $c < 0$.

Algunos autores escriben

- "$\left(\frac{c}{0^+}\right)$" = "$\left(\frac{+}{0^+}\right)$" $= +\infty$ si $c > 0$;
- "$\left(\frac{c}{0^-}\right)$" = "$\left(\frac{+}{0^-}\right)$" $= -\infty$ si $c > 0$;
- "$\left(\frac{c}{0^+}\right)$" = "$\left(\frac{-}{0^+}\right)$" $= -\infty$ si $c < 0$;
- "$\left(\frac{c}{0^-}\right)$" = "$\left(\frac{-}{0^-}\right)$" $= +\infty$ si $c < 0$.

Ejemplo 3.4.3 *Calcular* $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$ & $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$.

▼

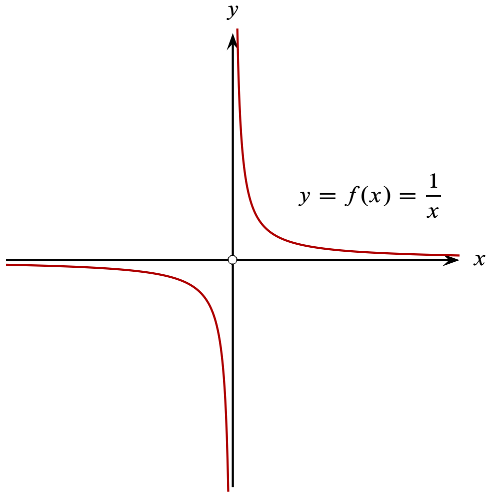
1. Si $x \to 0^-$, entonces $x < 0$ & $\dfrac{1}{x} < 0$.

   Como $\lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$ & $x < 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

2. Si $x \to 0^+$, entonces $x > 0$ & $\dfrac{1}{x} > 0$.

   Como $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ & $x > 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Recordemos que la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ es una hipérbola equilátera.



□

Ejemplo 3.4.4 *Calcular* $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-2}{x-1}$ & $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-2}{x-1}$.

▼

1. Si $x \to 1^-$, entonces $x < 1$ por lo que $x - 1 < 0$ & $\dfrac{-2}{x-1} > 0$.

   Como $\lim\limits_{x \to 1^-} (x-1) = 0$ & $x - 1 < 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-2}{x-1} = +\infty$.

2. Si $x \to 1^+$, entonces $x > 1$ por lo cual $x - 1 > 0$ & $\dfrac{-2}{x-1} < 0$.

   Como $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0$ & $x - 1 > 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-2}{x-1} = -\infty$.

Como consecuencia, no existe $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2}{x-1}$. No es $+\infty$ ni $-\infty$.

□

Ejemplo 3.4.5 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$, *calcular:*

$$\lim_{x \to -2^-} f(x), \quad \lim_{x \to -2^+} f(x), \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) \quad \& \quad \lim_{x \to 2^+} f(x).$$

▼ Notamos que

$$x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{2^2} \Leftrightarrow |\,x\,| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2\,;$$

De igual forma:

$$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |\,x\,| > 2 \Leftrightarrow x < -2 \text{ o bien } x > 2\,.$$

Por lo tanto:

1. Si $x \to -2^-$, entonces $x < -2$ por lo que $x^2 - 4 > 0$.

   Como $\lim\limits_{x \to -2^-} (x^2 - 4) = 0$ & $x^2 - 4 > 0$, entonces $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{3}{x^2 - 4} = +\infty$.

2. Si $x \to -2^+$, entonces $|\,x\,| < 2$ por lo que $x^2 - 4 < 0$.

   Como $\lim\limits_{x \to -2^+} (x^2 - 4) = 0$ & $x^2 - 4 < 0$, entonces $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{3}{x^2 - 4} = -\infty$.

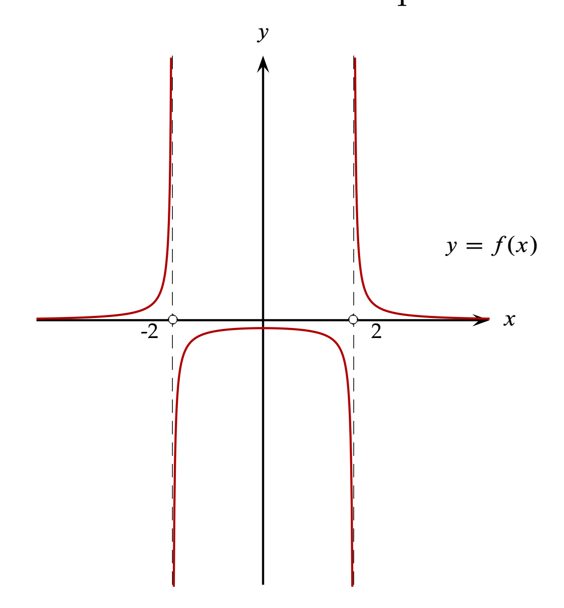
3. Si $x \to 2^-$, entonces $|\,x\,| < 2$ por lo cual $x^2 - 4 < 0$.

   Como $\lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 4) = 0$ & $x^2 - 4 < 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3}{x^2 - 4} = -\infty$.

4. Si $x \to 2^+$, entonces $x > 2$ por lo cual $x^2 > 4 \Rightarrow x^2 - 4 > 0$.

   Como $\lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 4) = 0$ & $x^2 - 4 > 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3}{x^2 - 4} = +\infty$.

Los resultados 1., 4., 2., 3. son consistentes con el hecho de que la función es par.



□

En general tenemos:

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, $g(x) > 0$ & $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ si $\alpha > 0$.

$$\text{“}\left(\frac{+}{0^+}\right)\text{”} = +\infty\,.$$

- Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, $g(x) > 0$ & $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \neq 0$, entonces $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ si $\alpha < 0$.

$$\text{“}\left(\frac{-}{0^+}\right)\text{”} = -\infty\,.$$

- Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, $g(x) < 0$ & $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \neq 0$, entonces $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ si $\alpha > 0$.

$$\text{“}\left(\frac{+}{0^-}\right)\text{”} = -\infty\,.$$

- Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, $g(x) < 0$ & $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \neq 0$, entonces $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ si $\alpha < 0$.

$$\text{“}\left(\frac{-}{0^-}\right)\text{”} = +\infty\,.$$

Ejemplo 3.4.6 *Calcular* $\lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{x-1}$ & $\lim_{x\to 1^+} \frac{x-3}{x-1}$.

▼ Notamos que $\lim_{x\to 1^-}(x-3) = \lim_{x\to 1^+}(x-3) = \lim_{x\to 1}(x-3) = 1-3 = -2$.

1. Si $x \to 1^-$, entonces $x < 1$ por lo cual $x - 1 < 0$.

   Como $\lim_{x\to 1^-}(x-1) = 0$, $x-1 < 0$ & $\lim_{x\to 1^-}(x-3) = -2 < 0$, entonces $\lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{x-1} = +\infty$.

2. Si $x \to 1^+$, entonces $x > 1$ por lo que $x - 1 > 0$.

   Como $\lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0$, $x-1 > 0$ & $\lim_{x\to 1^+}(x-3) = -2 < 0$ entonces, $\lim_{x\to 1^+} \frac{x-3}{x-1} = -\infty$;

$\lim_{x\to 1} \frac{x-3}{x-1}$ no diverge a $+\infty$ ni a $-\infty$.

□

Ejemplo 3.4.7 *Calcular* $\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+2}{x^3+8}$ & $\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+2}{x^3+8}$.

▼ Recordemos el comportamiento creciente de la función $y = x^3$.
Notemos además que

$$\lim_{x\to -2^-}(x^2+2) = \lim_{x\to -2^+}(x^2+2) = \lim_{x\to -2}(x^2+2) = (-2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6\,.$$

1. Si $x \to -2^-$, entonces $x < -2$ por lo cual $x^3 < (-2)^3 \Rightarrow x^3 < -8 \Rightarrow x^3 + 8 < 0$.

   Como $\lim_{x\to -2^-}(x^3+8) = 0$, $x^3+8 < 0$ & $\lim_{x\to -2^-}(x^2+2) = 6 > 0$, entonces $\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+2}{x^3+8} = -\infty$.

2. Si $x \to -2^+$, entonces $x > -2$ por lo que $x^3 > (-2)^3 \Rightarrow x^3 > -8 \Rightarrow x^3 + 8 > 0$.

   Como $\lim_{x\to -2^+}(x^3+8) = 0$, $x^3+8 > 0$ & $\lim_{x\to -2^+}(x^2+2) = 6 > 0$, entonces $\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+2}{x^3+8} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 2}{x^3 + 8}$ no diverge a $+\infty$ ni a $-\infty$.

□

Algunas afirmaciones interesantes que podemos hacer con límites infinitos son las siguientes:

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ y si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} [g(x) \pm f(x)] = \pm\infty$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \times g(x)] = +\infty$ si $\alpha > 0$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \times g(x)] = -\infty$ si $\alpha < 0$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ si $\alpha > 0$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ si $\alpha < 0$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0^+$ si $\alpha > 0$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0^-$ si $\alpha < 0$.

Hacemos notar que:

- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0^+$ quiere decir que $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$ y que $h(x) > 0$ cerca de x_0.
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0^-$ quiere decir que $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$ y que $h(x) < 0$ cerca de x_0.

Resultados análogos se obtienen cuando $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ y todos siguen siendo válidos si en lugar de x_0 ponemos x_0^- o bien x_0^+.

Ejemplo 3.4.8 *Dadas las funciones* $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ & $g(x) = \dfrac{1-x^2}{x-1}$, *obtener*

1. $\lim\limits_{x \to 1^-} [f(x) - g(x)]$.
2. $\lim\limits_{x \to 1^+} [f(x) \times g(x)]$.
3. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
4. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{g(x)}{f(x)}$.
5. $\lim\limits_{x \to 1^-} [g(x) - f(x)]$.
6. $\lim\limits_{x \to 1^+} [g(x) - f(x)]$.

▼ Sabemos que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.
Además:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{-(1-x)} = \lim_{x\to 1}[-(1+x)] = -2$$

por lo cual $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -2$.

1. Ya que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -2$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^-} [f(x) - g(x)] = +\infty$.
2. Ya que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -2$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^+} [f(x) \times g(x)] = +\infty$.
3. Ya que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -2$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^-} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = -\infty$.
4. Ya que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -2$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^+} \left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = 0^+$.
5. Ya que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -2$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^-} [g(x) - f(x)] = -\infty$.
6. Ya que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -2$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^+} [g(x) - f(x)] = +\infty$.

□

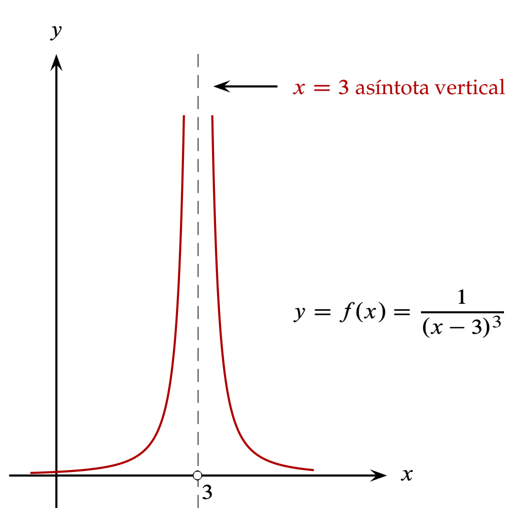
- La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función f o bien de la curva $y = f(x)$ si ocurre al menos una de las condiciones siguientes

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty\,.$$

Nota. Determinar las asíntotas verticales de una función resulta de mucha utilidad para realizar el bosquejo de la gráfica de una función.

Ejemplo 3.4.9 *Sea la función* $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$.

▼ Sabemos que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$. Por lo tanto la recta $x = 3$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$.

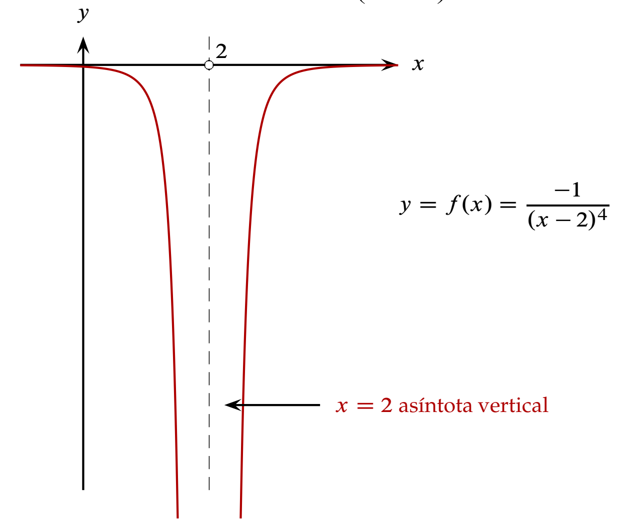


□

Ejemplo 3.4.10 *Sea la función* $f(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^4}$.

▼ Sabemos que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Luego la recta $x = 2$ es una asíntota verical de la curva $y = \dfrac{-1}{(x-2)^4}$.

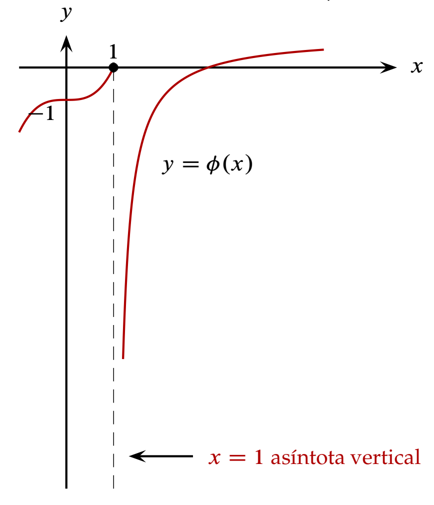


□

Ejemplo 3.4.11 *Sea la función* $\phi(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & si\ x \le 1\,; \\ \dfrac{x-3}{x-1} & si\ x > 1\,. \end{cases}$

▼ Se tiene que $\lim\limits_{x\to 1^+} \phi(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-3}{x-1} = -\infty$.

Luego la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función ϕ o bien de la curva $y = \phi(x)$.



Nótese que

$$\lim_{x\to 1^-} \phi(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^3 - 1) = 0\,.$$

□

Ejercicios 3.4.1 *Soluciones en la página 13*

I. Calcular los límites siguientes:

1. Para $f(x) = \dfrac{1}{x}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$,
   b. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,
   c. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Para $f(x) = \dfrac{-3}{x+2}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$,
   b. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$,
   c. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

3. Para $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$,
   b. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$,
   c. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

4. Para $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$,
   b. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$,
   c. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$,
   d. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

5. Para $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{|\,x\,|}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$,
   b. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,
   c. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

6. Para $f(x) = \dfrac{-5x}{(x^2-4)^2}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$,
   b. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$,
   c. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$,
   d. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$,
   e. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$,
   f. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

7. De acuerdo con la teoría de la relatividad, la masa m de un objeto que viaja a una velocidad v, está dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \ ,$$

   donde m_0 es la masa del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz.

   a. Explicar qué ocurre cuando v se acerca a la velocidad de la luz.

b. Explicar por qué sólo tiene sentido calcular $\lim\limits_{v \to c^-} m$.

8. Calcular: $\lim\limits_{s \to 2^+} \left(\dfrac{1}{s-2} - \dfrac{3}{s^2-4} \right)$.

9. Calcular: $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x^2}{x^2-1}$.

10. Calcular: $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-x^2}{4-x^2}$.

Ejercicios 3.4.1 *Límites infinitos, página 11*

1. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty;$

   $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty;$

   $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ no diverge ni a $+\infty$ ni a $-\infty$.

2. $\lim_{x\to -2^-} \dfrac{-3}{x+2} = +\infty;$

   $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{-3}{x+2} = -\infty;$

   $\lim_{x\to -2} \dfrac{-3}{x+2}$ no diverge ni a $+\infty$ ni a $-\infty$.

3. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x-1}{x-2} = -\infty;$

   $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x-1}{x-2} = +\infty;$

   $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x-2} = \pm\infty\,.$

4. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty;$

   $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty;$

   $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty;$

   $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty\,.$

5. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0;$

   $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty;$

   $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

6. $\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty;$

   $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty;$

   $\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty;$

   $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty;$

   $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty;$

   $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty.$

7. a. $\lim_{v\to c^-} m = \lim_{v\to c^-} \dfrac{cm_0}{\sqrt{c^2-v^2}} = +\infty;$

   b. puesto que $v < c$.

8. $\lim_{s\to 2^+} \left(\dfrac{1}{s-2} - \dfrac{3}{s^2-4}\right) = +\infty\,.$

9. $\lim_{x\to 1^-} \left(\dfrac{3x^2}{x^2-1}\right) = -\infty\,.$

10. $\lim_{x\to 2^+} \left(\dfrac{-x^2}{4-x^2}\right) = +\infty\,.$

CAPÍTULO

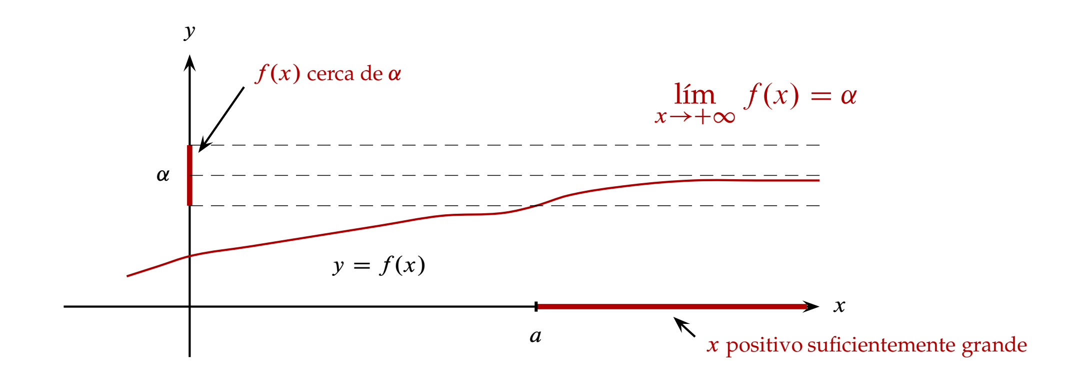
3

Límite de una función

[1]

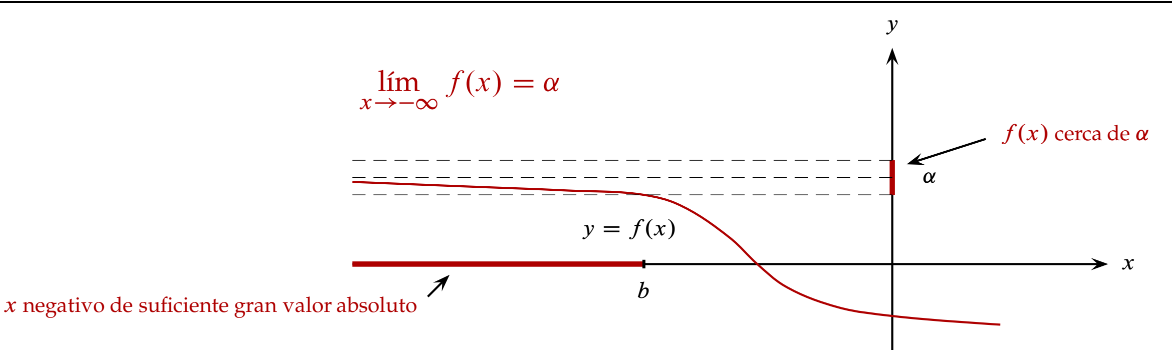
3.5 Límites en infinito

- Sea $f(x)$ una función. Supongamos que $(a, +\infty) \subset D_f$. Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende (o diverge) a $+\infty$ es α [notación $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$) si los valores de $f(x)$ están tan próximos a α como queramos con tal de tomar $x > a$ suficientemente grande.



- Sea $f(x)$ una función. Supongamos que $(-\infty, b) \subset D_f$. Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende (o diverge) a $-\infty$ es α (notación $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$) si los valores de $f(x)$ están tan próximos a α como queramos con tal de tomar $x < b$ negativo de suficiente gran valor absoluto.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



- En estos casos a la recta $y = \alpha$ se le llama asíntota horizontal. Esto es, se dice que la recta $y = \alpha$ es una asíntota horizontal de la función f o bien de la curva $y = f(x)$ si ocurre alguno de los hechos siguientes:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha \quad \text{o bien} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha\,.$$

En este contexto tenemos los siguientes comportamientos:

- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ con $n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n es par.
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n es impar.
- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{c}{x^{\frac{m}{n}}} = 0$ con $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ y c constante.

  En particular
- $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x^n} = 0.$

  Esto lo sintetizan algunos autores poniendo $\text{“}\left(\dfrac{c}{\pm\infty}\right)\text{”} = 0.$
- Si $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = x^n\left(a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \dfrac{a_n}{x^n}\right)$, entonces:

  1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si $a_0 > 0$.
  2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si $a_0 < 0$.
  3. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si $a_0 > 0$ y n es par.
  4. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si $a_0 > 0$ y n es impar.
  5. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si $a_0 < 0$ y n es par.
  6. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si $a_0 < 0$ y n es impar.

Obsérvese, por ejemplo, que una función polinomial no tiene asíntotas y que, si n es impar, $R_f = \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.5.1 *Dada la función polinomial $f(x) = -4x^3 + 5x^2 - 6x + 7$, calcular $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ & $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.*

▼ Ya que $f(x) = -4x^3 + 5x^2 - 6x + 7 = x^3\left(-4 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)$, entonces:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3\left(-4 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)\right] = +\infty$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3\left(-4 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)\right] = -\infty$.

□

Ejemplo 3.5.2 *Dada la función* $p(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 4x - 5$*, calcular* $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)$ & $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)$.

▼ Ya que $p(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 4x - 5 = x^6\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^5} - \frac{5}{x^6}\right)$, entonces

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^6\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^5} - \frac{5}{x^6}\right)\right] = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^6\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^5} - \frac{5}{x^6}\right)\right] = +\infty$.

□

Ejemplo 3.5.3 *Dada* $q(x) = -x^{10} + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$*, calcular* $\lim\limits_{x\to-\infty} q(x)$ & $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x)$.

▼

1. $$\lim_{x\to-\infty} q(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^{10} + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x^{10}\left(-1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^{10}}\right)\right] = -\infty\,.$$

2. $$\lim_{x\to+\infty} q(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^{10}\left(-1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^{10}}\right)\right] = -\infty\,.$$

□

- Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional con

  $P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$ y $Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$ polinomiales ($a_0 \neq 0$ & $b_0 \neq 0$), entonces:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n\,; \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{si } m = n\,; \\ \pm\infty & \text{si } m > n\,. \end{cases}$$

Este resultado es claro si ponemos

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^m\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_m}{x^m}\right)}{x^n\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_n}{x^n}\right)}=\frac{x^{m-n}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_m}{x^m}\right)}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_n}{x^n}}\,.$$

Una función racional tiene asíntotas horizontales $y=0$ si $m\le n$; $y=\frac{a_0}{b_0}$ si $m=n$; y además puede o no tener asíntotas verticales.

Ejemplo 3.5.4 *Dada* $f(x)=\frac{4x^2-5x+6}{2x^2-3x+4}$, *calcular* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ & $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

▼

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-5x+6}{2x^2-3x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{4-0+0}{2-0+0}=2\,.$$

De igual manera se obtiene que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.
Por lo tanto, la recta $y=2$ es una (y además la única) asíntota horizontal de la función f o bien de la curva $y=f(x)$.

□

Ejemplo 3.5.5 *Calcular* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{5x^2-6x+7}$.

▼

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{5x^2-6x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(5-\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{4}{x}}{x\left(5-\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}=\text{“}\left(\frac{3}{+\infty}\right)\text{”}=0^+\,.$$

Aquí la recta $y=0$ es una asíntota horizontal de la curva $y=\frac{3x-4}{5x^2-6x+7}$. Además también es la única pues de la misma manera

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-4}{5x^2-6x+7}=\text{“}\left(\frac{3}{-\infty}\right)\text{”}=0^-\,.$$

□

Ejemplo 3.5.6 *Calcular* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x+4}{5x-6}$.

▼

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-3x+4}{5x-6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(2-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}\right)}{x\left(5-\dfrac{6}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}\right)}{5-\dfrac{6}{x}}=$$
$$=\text{“}\left(\frac{+\infty}{5}\right)\text{”}=+\infty\,.$$

La función no tiene asíntotas horizontales pues de la misma manera se obtiene que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-3x+4}{5x-6}=\text{“}\left(\frac{+\infty}{5}\right)\text{”}=+\infty\,.$$

□

Ejemplo 3.5.7 *Calcular* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x-2)^2(2x+5)^4}{6x^6-7x^3+8}$.

▼

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x-2)^2(2x+5)^4}{6x^6-7x^3+8}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[x\left(3-\dfrac{2}{x}\right)\right]^2\left[x\left(2+\dfrac{5}{x}\right)\right]^4}{x^6\left(6-\dfrac{7}{x^3}+\dfrac{8}{x^6}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3-\dfrac{2}{x}\right)^2x^4\left(2+\dfrac{5}{x}\right)^4}{x^6\left(6-\dfrac{7}{x^3}+\dfrac{8}{x^6}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6\left(3-\dfrac{2}{x}\right)^2\left(2+\dfrac{5}{x}\right)^4}{x^6\left(6-\dfrac{7}{x^3}+\dfrac{8}{x^6}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3-\dfrac{2}{x}\right)^2\left(2+\dfrac{5}{x}\right)^4}{6-\dfrac{7}{x^3}+\dfrac{8}{x^6}}=$$
$$=\frac{(3)^2(2)^4}{6}=3(2)^3=24\,.$$

La recta $y=24$ es asíntota horizontal de la función $f(x)=\dfrac{(3x-2)^2(2x+5)^4}{6x^6-7x^3+8}$ y es la única pues análogamente $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=24$.

□

Ejemplo 3.5.8 *Calcular*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-5}{\sqrt{x^2+1}}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-5}{\sqrt{x^2+1}}$.

▼

1.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-5}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\dfrac{5}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{4}{1}=4\,.$$

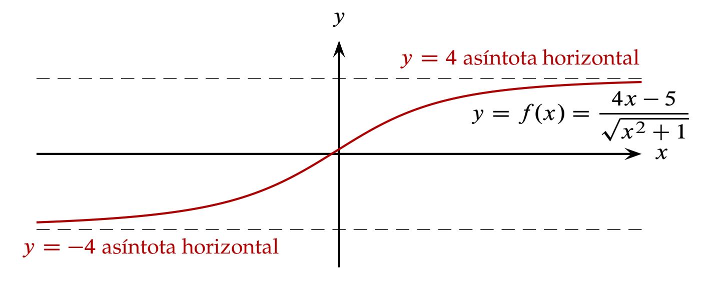
Nótese que, como $x\to+\infty$, podemos suponer que $x>0$ por lo que $|\,x\,|=x$.

La recta $y=4$ es una asíntota horizontal de la curva $y=\dfrac{4x-5}{\sqrt{x^2+1}}$.

2.
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-5}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\dfrac{5}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{4}{-1}=-4\,.$$

Ahora consideramos que $x<0$ pues $x\to-\infty$ por lo que $|\,x\,|=-x$.

La recta $y=-4$ es la otra asíntota horizontal de la curva $y=\dfrac{4x-5}{\sqrt{x^2+1}}$.

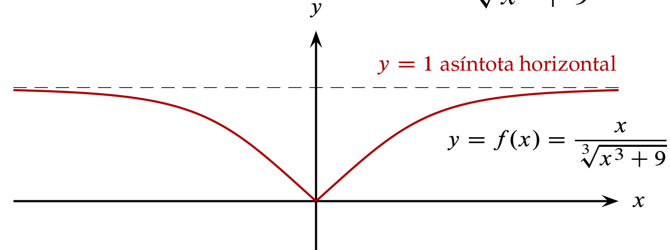


□

Ejemplo 3.5.9 *Calcular* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+9}}$.

▼
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+9}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3\left(1+\dfrac{9}{x^3}\right)}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{1+\dfrac{9}{x^3}}} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x\sqrt[3]{1+\dfrac{9}{x^3}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\dfrac{9}{x^3}}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

La recta $y = 1$ es la asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+9}}$.



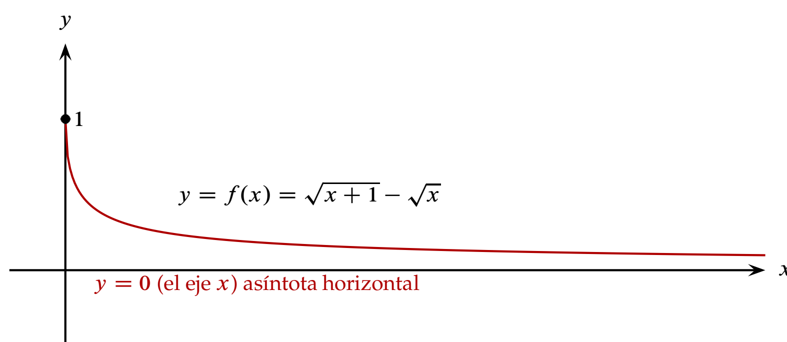
□

Ejemplo 3.5.10 *Calcular* $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

▼ Éste es un límite indeterminado "$(\infty - \infty)$". Hagamos un truco: racionalicemos el numerador de $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{1}$. Generamos primero una diferencia de cuadrados y hacemos luego lo que hemos venido haciendo:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \left[(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \text{"}\left(\frac{1}{+\infty}\right)\text{"} = 0^+\,.$$

La recta $y = 0$ (el eje de las abscisas) es la asíntota horizontal de la curva $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.



□

Ejemplo 3.5.11 *Calcular* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x+5}-x)$.

▼ Otro "$(\infty-\infty)$". Procedemos como el ejemplo anterior y algo más

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x+5}-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(\sqrt{x^2-3x+5}-x)\frac{\sqrt{x^2-3x+5}+x}{\sqrt{x^2-3x+5}+x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-3x+5})^2-x^2}{\sqrt{x^2-3x+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+5-x^2}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+5}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-3+\frac{5}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}=$$

(como $x\to+\infty$, $x>0$, entonces $|\,x\,|=x$)

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-3+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}=\frac{-3}{\sqrt{1}+1}=-\frac{3}{2}\,.$$

Por lo que la recta $y=-\dfrac{3}{2}$ es una asíntota horizontal de la curva $y=\sqrt{x^2-3x+5}-x$.
La otra asíntota es $y=\dfrac{3}{2}$ pues de la misma manera

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+5}-x)=\frac{3}{2}$$

ya que

$$\sqrt{x^2-3x+5}-x=\frac{x\left(-3+\frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}\,.$$

□

Ejercicios 3.5.1 *Soluciones en la página* **??**

Calcular los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-3}{4x}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3-5x+6}{2x^3-3x^2+8}$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^3+6x-7}{3x^5-2x+1}$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^5-2x+1}{5x^3+6x-7}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x+4}$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2x+6}}$.
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{\sqrt{(3x-2)^3}}$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^4-3x^2-1}}{x^2-1}$.
11. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x+2}{\sqrt{3x^2+2x+5}}$.
12. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x+1}{\sqrt{9x^2+5}}$
13. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x+6}{\sqrt{5x^2+6x-8}}$
14. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2+5}}$
15. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9+4x^2}}{3+2x}$
16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}+5x}{23x+4}$
17. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9+4x^2}}{3+x}$
18. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x}{\sqrt{x^2+4}}$
19. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x^2+1}}$.
20. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.
21. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+5\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$
22. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$
23. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+5}-x)$.
24. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-4x+3}-x)$.
25. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+5}-x)$.
26. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-4x+3}-x)$.
27. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-4x+3}+x)$.
28. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+5x}-x)$
29. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-2})$
30. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x)$
31. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$
32. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+6}+x\right)$
33. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+1})$
34. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-2x+5}-x)$
35. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-\sqrt{4x^2+5x-3})$

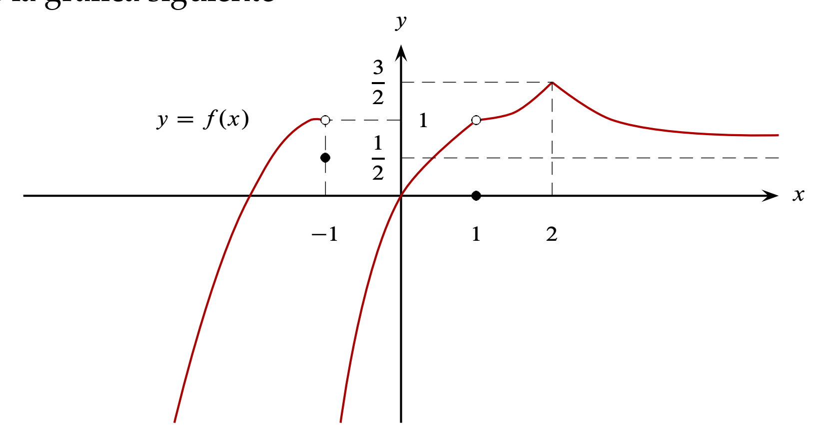
Ejercicios 3.5.2 *Soluciones en la página* **??**

Miscelánea de problemas sobre límites.

Un límite muy especial para una función f es $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Calcular este límite para:

1. $f(x)=c$ con c constante.
2. $f(x)=ax+b$ con a,b constantes.
3. $f(x)=ax^2+bx+c$ con a,b,c constantes.
4. $f(x)=ax^3$ con a constante.
5. $f(x)=\dfrac{c}{ax+b}$ con a,b,c constantes.
6. $f(x)=\sqrt{x}$.

7. La función f tiene la gráfica siguiente



   a. Determine:
      i. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$;
      ii. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$;
      iii. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$;
      iv. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$;
      v. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$;
      vi. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$;
      vii. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$;
      viii. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
   b. Calcule $f(1)$, $f(2)$ y también $f(-1)$.
   c. ¿Existen los límites $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

8. Considere la función: $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}-x} & \text{si } x\le -1\,;\\[2mm] \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} & \text{si } x>-1\,.\end{cases}$
   a. Calcule el $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$.
   b. ¿Existe $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$? Justifique su respuesta.

9. Grafique una función que cumpla con los siguientes requisitos:

a. $f(0) = 0$;

b. $f(5) = 1$;

c. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$;

d. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$;

e. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$;

f. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$;

g. $\lim_{x \to 5} f(x) = 4$.

10. Trace la gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

a. $\lim_{x \to -4} f(x) = 0$;

b. $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$;

c. $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 0$;

d. $\lim_{x \to 0} f(x) = -3$;

e. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$;

f. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$;

g. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$;

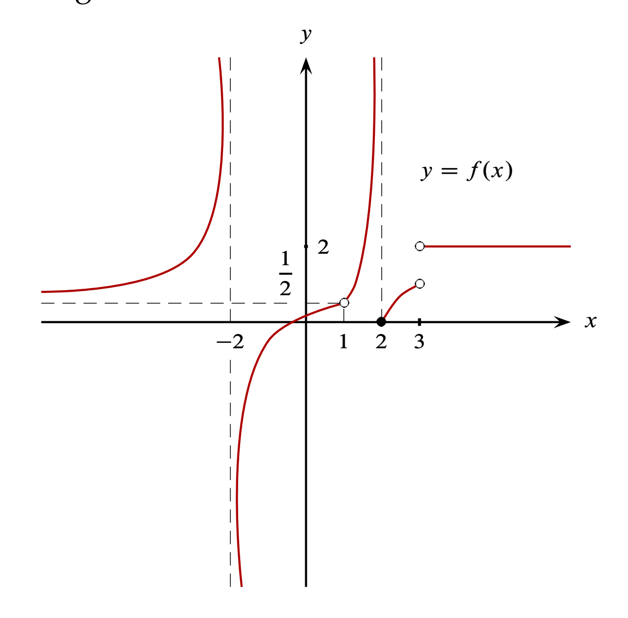
h. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$;

i. $\lim_{x \to 5} f(x) = 0$;

j. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$;

k. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$.

11. La función f tiene la gráfica siguiente:



a. De la gráfica determine:

i. $\lim_{x \to -2^-} f(x)$;

ii. $\lim_{x \to -2^+} f(x)$;

iii. $\lim_{x \to 2^-} f(x)$;

iv. $\lim_{x \to 2^+} f(x)$;

v. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$;

vi. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$;

vii. $\lim_{x \to 3^-} f(x)$;

viii. $\lim_{x \to 3^+} f(x)$;

ix. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$;

x. $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

b. Calcule $f(-2)$, $f(1)$ y $f(2)$.

c. ¿Existen o no los siguientes límites?: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

12. Considere la función $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x} & \text{si } x \le -8\,; \\ \dfrac{(x+3)\,|\,x+2\,|}{x+2} & \text{si } -8 < x < -2\,; \\ \sqrt{9-x^2} & \text{si } x \ge -2\,. \end{cases}$

   a. Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$.

   b. ¿Existe el $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$? Justifique su respuesta.

13. De la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5x^2+3x+1}}{\sqrt{2x^2-3}} & \text{si } x \le -4\,; \\ \dfrac{16-x^2}{5-\sqrt{x^2+9}} & \text{si } -4 < x < 1\,. \end{cases}$

   determinar los límites laterales en -4 y el límite en $-\infty$.

14. Para la función f definida por $f(x) = \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}}$, determine:

   a. Dominio y raíces.

   b. Asíntotas verticales y horizontales.

   c. Bosquejo gráfico.

15. Dar un bosquejo de la gráfica de una función f que cumpla los requisitos siguientes:
   Es continua en los intervalos $(-\infty,-2)$, $[-2,1)$, $[1,3]$ y en $(3,+\infty)$; y además:

   a. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -3$;

   b. $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = 0$;

   c. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$;

   d. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0$;

   e. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -3$;

   f. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$;

   g. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$;

   h. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 4$;

   i. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -1$;

   j. $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 0$;

   k. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

16. Dibuje una gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

   a. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -2$;

   b. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$;

   c. $f(0) = -1$;

   d. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \infty$;

   e. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$;

   f. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$;

   g. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 4$.

17. Bosquejar la gráfica de una función f que cumpla las condiciones siguientes:

   a. $f(-1) = 0$;
   b. $f(\frac{3}{2}) = -3$;
   c. $f(0) = \frac{1}{2}$;
   d. $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -1$;
   e. $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$;
   f. $\lim_{x\to 0} f(x) = -2$;
   g. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -1$;
   h. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$;
   i. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$;
   j. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

18. Bosqueje la gráfica de una función que cumpla las siguiente condiciones:

   a. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$;
   b. $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 5$;
   c. $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 4$;
   d. $f(0) = 0$;
   e. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$;
   f. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$;
   g. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$;
   h. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -1$.

19. Considere las funciones $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ & $g(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-x-2}$ con sus dominios naturales.

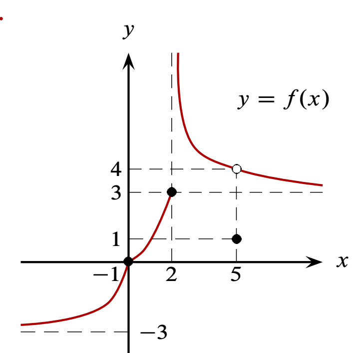
   a. Grafique las funciones f & g.
   b. Calcule $\lim_{x\to 1^+} (g\circ f)(x)$.
   c. Calcule $\lim_{x\to +\infty} (f\circ g)(x)$.

Ejercicios 3.5.1 *Límites en infinito, página* **??**

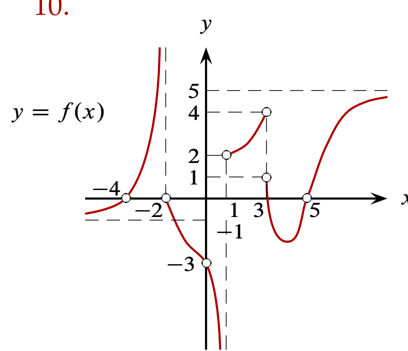
1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-3}{4x}\right)=\frac{1}{2}\,.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-5x+6}{2x^3-3x^2+8}=2\,.$
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3+6x-7}{3x^5-2x+1}=0^+\,.$
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5-2x+1}{5x^3+6x-7}=+\infty\,.$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1\,.$
6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-1\,.$
7. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-16}}{x+4}=-1\,.$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2x+6}}=\frac{5}{\sqrt{3}}\,.$
9. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{(3x-2)^3}}=0\,.$
10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4-3x^2-1}}{x^2-1}=1\,.$
11. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+2}{\sqrt{3x^2+2x+5}}=-\frac{5}{\sqrt{3}}\,.$
12. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{9x^2+5}}=-\frac{4}{3}\,.$
13. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+6}{\sqrt{5x^2+6x-8}}=-\frac{8}{\sqrt{5}}\,.$
14. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2+5}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}\,.$
15. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3+2x}\right)=-1\,.$
16. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+5x}{23x+4}=\frac{6}{23}\,.$
17. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3+x}=-2\,.$
18. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+4}}=-5\,.$
19. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x^2+1}}=1\,.$
20. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}=-1\,.$
21. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+5\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}=\frac{6}{\sqrt{2}}\,.$
22. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=\frac{1}{4}\,.$
23. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5}-x)=0^+\,.$
24. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}-x)=-2\,.$
25. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+5}-x)=+\infty\,.$
26. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}-x)=+\infty\,.$
27. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}+x)=2\,.$
28. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)=+\infty\,.$
29. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-2})=\frac{1}{4}\,.$
30. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x)=\frac{2}{3}\,.$
31. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\frac{1}{2}\,.$
32. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+6}+x\right)=-1\,.$
33. No tiene sentido.
34. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+5}-x)=-1\,.$
35. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{4x^2+5x-3})=-\frac{5}{4}\,.$

Ejercicios 3.5.2 *página* **??**

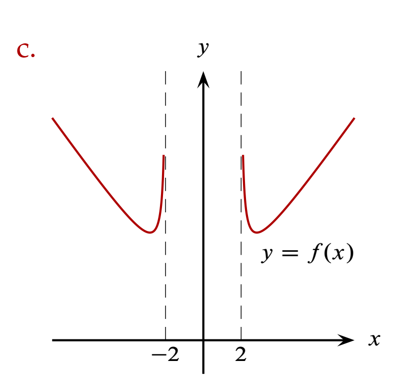
1. 0.
2. a.
3. $2ax + b$.
4. $3ax^2$.
5. $\dfrac{-ac}{(ax+b)^2}$.
6. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, si $x > 0$.
7. a. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$;
   $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$;
   $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \dfrac{3}{2}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{3}{2}$;
   $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$;
   b. $f(1) = 0$, $f(2) = \dfrac{3}{2}$, $f(-1) = \dfrac{1}{2}$;
   c. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ no existe;
   $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$;
   $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{3}{2}$.
8. a. $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = -\dfrac{1}{2}$;
   b. No existe $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$.
9.



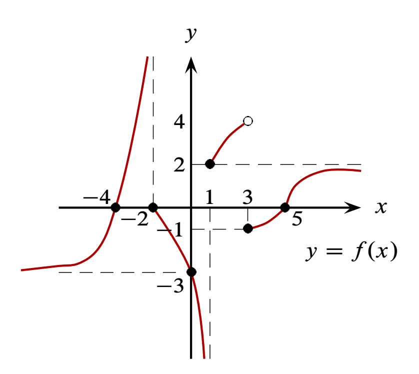
10.



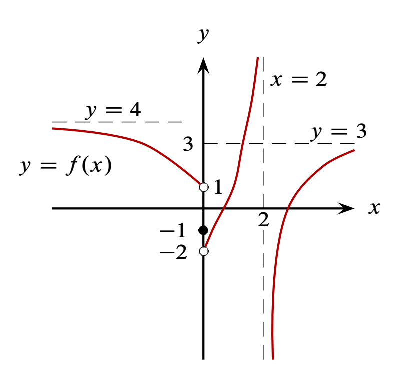
11. a. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$;
    $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$;
    $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$;
    $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$;
    $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 2$;
    b. $f(-2)$ no existe;
    $f(1)$ no existe;
    $f(2) = 0$;
    c. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ no existe;
    $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$;
    $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe;
    $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe.
12. $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -\dfrac{3}{2}$;
    $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$;
    $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ no existe.
13. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \approx 1.581$;
    $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) \approx 1.5425$;
    $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = 10$.
14. a. $D_f = (-\infty, -2) \bigcup (2, +\infty)$;
    no tiene raíces;
    b. $x = 2$ & $x = -2$ son asíntotas verticales;
    no tiene asíntotas horizontales.
    c.



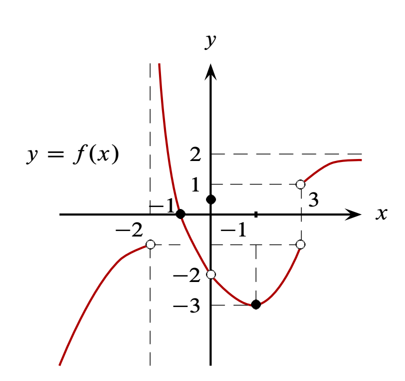
15.



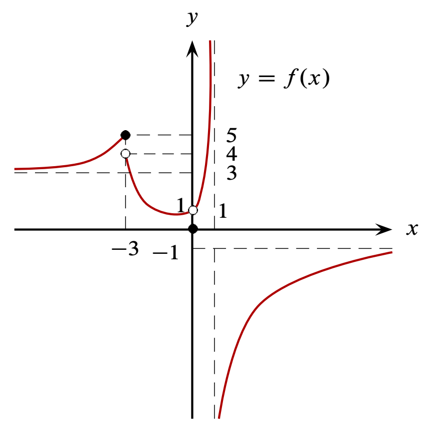
16.



17.

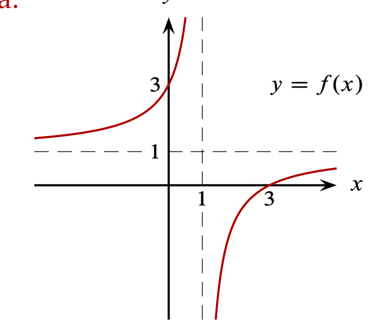


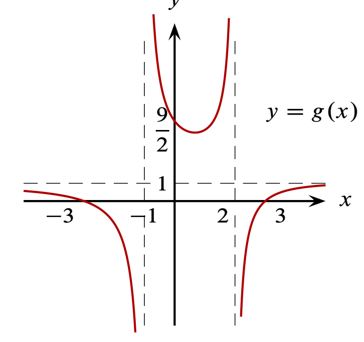
18.



19.







b. $\lim_{x \to 1^+} (g \circ f)(x) = 1;$

c. $\lim_{x \to +\infty} (f \circ g)(x) = +\infty.$

LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x+\tan x}{\operatorname{sen} x}$	**2.** $\lim_{x\to\pi/4}\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\tan x}$	**3.** $\lim_{x\to\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$
4. $\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$	**5.** $\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\operatorname{sen} x}{\frac{1}{2}\pi-x}$	**6.** $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{2}\pi-x}{\cos x}$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}$	**8.** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$	**9.** $\lim_{x\to 0} x\cot x$
10. $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{1-2^{2n}}$	**11.** $\lim_{h\to 2}\frac{h^3-8}{h^2-4}$	**12.** $\lim_{r\to 1}\frac{r^2-r}{2r^2+5r-7}$
13. $\lim_{k\to 4}\frac{k^2-16}{\sqrt{k}-2}$	**14.** $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$	**15.** $\lim_{x\to-\infty}\frac{4-7x}{2+3x}$
16. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x-1}$		

Soluciones

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x+\tan x}{\operatorname{sen} x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\tan x}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}+\frac{\tan x}{\operatorname{sen} x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}+\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\operatorname{sen} x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}+\frac{1}{\cos x}\right),$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{x+\tan x}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1}+\frac{1}{\cos 0}=1+\frac{1}{1}=2 \qquad \{\mathbf{TL10}\}.$$

2. $\lim_{x\to\pi/4}\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\tan x}$

Solución:

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\tan x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\dfrac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos x}}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-(\cos x-\operatorname{sen} x)}{\dfrac{(\cos x-\operatorname{sen} x)}{\cos x}},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\pi/4}\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\tan x}=\lim_{x\to\pi/4}(-\cos x)=-\cos\pi/4=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. $\lim_{x\to\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} \quad (\clubsuit)$$

Sea

$$t=\frac{1}{x}, \;\Rightarrow\; x\to\infty \Leftrightarrow t\to 0 \quad (1)$$

$$t=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{t} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\operatorname{sen} t=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}=1 \qquad \{\mathbf{TL10}\}.$$

4. $\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$

Solución:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi} \quad (\clubsuit)$$

Sea

$$t=x-\pi, \;\Rightarrow\; x\to\pi \Leftrightarrow t\to 0 \quad (1)$$

$$t=x-\pi\Leftrightarrow x=t+\pi \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t+\pi)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\operatorname{sen} t}{t}=-\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}=-1 \qquad \{\mathbf{TL10}\}.$$

5. $\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\operatorname{sen} x}{\frac{1}{2}\pi-x}$

Solución:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\operatorname{sen}x}{\frac{1}{2}\pi-x}\quad(♣)$$

Sea

$$t=\tfrac{1}{2}\pi-x,\ \Rightarrow\ x\to\tfrac{1}{2}\pi\Leftrightarrow t\to 0\quad(1)$$

$$t=\tfrac{1}{2}\pi-x\Leftrightarrow x=\tfrac{1}{2}\pi-t\quad(2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (♣), se obtiene:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\operatorname{sen}x}{\frac{1}{2}\pi-x}=\lim_{t\to0}\frac{1-\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi-t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1-\operatorname{sen}\left(-(t-\frac{1}{2}\pi)\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1-\left(-\operatorname{sen}(t-\frac{1}{2}\pi)\right)}{t},$$

$$\Rightarrow\quad\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\operatorname{sen}x}{\frac{1}{2}\pi-x}=\lim_{t\to0}\frac{1+\operatorname{sen}(t-\frac{1}{2}\pi)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t}=0\qquad\{\mathbf{TL11}\}.$$

6. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{2}\pi-x}{\cos x}$

Solución:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{2}\pi-x}{\cos x}\quad(♣)$$

Sea

$$t=\tfrac{1}{2}\pi-x,\ \Rightarrow\ x\to\tfrac{1}{2}\pi\Leftrightarrow t\to 0\quad(1)$$

$$t=\tfrac{1}{2}\pi-x\Leftrightarrow x=\tfrac{1}{2}\pi-t\quad(2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (♣), se obtiene:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{2}\pi-x}{\cos x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\cos(\frac{1}{2}\pi-t)}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\operatorname{sen}t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}t}{t}}=\frac{\lim\limits_{t\to0}1}{\lim\limits_{t\to0}\frac{\operatorname{sen}t}{t}},$$

$$\Rightarrow\quad\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{2}\pi-x}{\cos x}=\frac{1}{1}=1\qquad\{\mathbf{TL10}\}.$$

7. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{x}$

Solución:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}\right),$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}=1\cdot1=1\qquad\{\mathbf{TL10}\}.$$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x} = \frac{\cos 0}{1-\operatorname{sen} 0} = \frac{1}{1-0} = \frac{1}{1} = 1.$$

9. $\lim_{x\to 0} x\cot x$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} x\cot x = \lim_{x\to 0} x\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0} \cos x}{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \{\text{TL10}\}.$$

10. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{1-2^{2n}}$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{1-2^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{2^{2n}}}{\frac{1-2^{2n}}{2^{2n}}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}}}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{2n}}-1\right)} = \frac{0}{0-1} = 0 \qquad \left\{2^{2n} > 3^{n+1} \text{ para } n \text{ grandes}\right\}$$

11. $\lim_{h\to 2} \frac{h^3-8}{h^2-4}$

Solución:

$$\lim_{h\to 2} \frac{h^3-8}{h^2-4} = \lim_{h\to 2} \frac{(h-2)(h^2+2h+4)}{(h-2)(h+2)} \qquad \{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 2} \frac{h^3-8}{h^2-4} = \lim_{h\to 2} \frac{\cancel{(h-2)}(h^2+2h+4)}{\cancel{(h-2)}(h+2)} = \lim_{h\to 2} \frac{(h^2+2h+4)}{(h+2)} \qquad \{\text{simplificando}\},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 2} \frac{h^3-8}{h^2-4} = \frac{(2^2+2(2)+4)}{(2+2)} \qquad \{\text{aplicando el limite}\};$$

$$\therefore \quad \lim_{h\to 2} \frac{h^3-8}{h^2-4} = \frac{4+4+4}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

12. $\lim_{r\to 1} \frac{r^2-r}{2r^2+5r-7}$

Solución:

$$\lim_{r\to 1}\frac{r^2-r}{2r^2+5r-7}=\lim_{r\to 1}\frac{r(r-1)}{(2r+7)(r-1)} \qquad \{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{r\to 1}\frac{r^2-r}{2r^2+5r-7}=\lim_{r\to 1}\frac{r\cancel{(r-1)}}{(2r+7)\cancel{(r-1)}}=\lim_{r\to 1}\frac{r}{2r+7} \qquad \{\text{simplificando}\},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{r\to 1}\frac{r^2-r}{2r^2+5r-7}=\frac{1}{2(1)+7} \qquad \{\text{aplicando el límite}\};$$

$$\therefore \quad \lim_{r\to 1}\frac{r^2-r}{2r^2+5r-7}=\frac{1}{2+7}=\frac{1}{9}.$$

13. $\lim_{k\to 4}\frac{k^2-16}{\sqrt{k}-2}$

Solución:

$$\lim_{k\to 4}\frac{k^2-16}{\sqrt{k}-2}=\lim_{k\to 4}\frac{(k-4)(k+4)}{\sqrt{k}-2}=\lim_{k\to 4}\frac{(\sqrt{k}-2)(\sqrt{k}+2)(k+4)}{(\sqrt{k}-2)} \qquad \{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to 4}\frac{k^2-16}{\sqrt{k}-2}=\lim_{k\to 4}\frac{\cancel{(\sqrt{k}-2)}(\sqrt{k}+2)(k+4)}{\cancel{(\sqrt{k}-2)}}=\lim_{k\to 4}(\sqrt{k}+2)(k+4) \qquad \{\text{simplificando}\},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to 4}\frac{k^2-16}{\sqrt{k}-2}=(\sqrt{4}+2)(4+4) \qquad \{\text{aplicando el límite}\};$$

$$\therefore \quad \lim_{k\to 4}\frac{k^2-16}{\sqrt{k}-2}=(4)(8)=32.$$

14. $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

Solución:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} \qquad \{\text{expandiendo } (x+h)^2\},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2hx+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h} \qquad \{\text{reduciendo}\},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(2x+h)$$

$$\{\text{factorizando y, simplificando}\};$$

$$\therefore \quad \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x+0=2x \qquad \{\text{aplicando el límite}\}.$$

15. $\lim_{x\to -\infty}\frac{4-7x}{2+3x}$

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4-7x}{2+3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4}{x}-\frac{7x}{x}}{\frac{2}{x}+\frac{3x}{x}} \qquad \{\text{dividiendo cada término por } x\},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{4-7x}{2+3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4}{x}-7}{\frac{2}{x}+3} \qquad \{\text{simplificando}\},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{4-7x}{2+3x}=\frac{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{x}-7\right)}{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}+3\right)}=\frac{\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x}-\lim_{x\to-\infty}7}{\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to-\infty}3}=\frac{0-7}{0+3};$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{4-7x}{2+3x}=-\frac{7}{3}.$$

16. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x-1}$

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}} \qquad \{\text{dividiendo cada término por } x^2\},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} \qquad \{\text{simplificando}\},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x-1}=\frac{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{0};$$

El límite en el numerador es positivo, y el límite en el denominador es 0 y tiende a 0 a través de valores negativos, pués, para valores negativos de x, $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}<0$;

$$\therefore \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x-1}=-\infty.$$

Ejercicios resueltos

1. Calcular los siguientes límites algebraicos

   1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{2^2+1}{2^2-1} = \dfrac{5}{3}$

   2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \dfrac{1^2-21+1}{1^3-1} = \dfrac{0}{0}$ pero $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x(x^2-1)} =$
   $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)}{x(x+1)} = \dfrac{1-1}{1(2)} = \dfrac{0}{2} = 0$

   3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{1-x^2} = \dfrac{0}{0}$, pero $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{(1-x)(1+x)} =$
   $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(1-x)\sqrt{2-x}}{(1-x)(1+x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1\sqrt{2-x}}{1+x} = \dfrac{-1}{2}$

   4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} = \infty - \infty$ que es una forma indeterminada.
   Pero $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} =$
   $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1+x+x^2)}{1-x} - \dfrac{3)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1+x+x^2-3)}{(1-x)(1+x+x^2)} =$
   $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2+x-2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} =$
   $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x+2)}{(1+x+x^2)} = \dfrac{-3}{3} = -1$

   5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x^2-5x+4} + \dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{(x-4)(x-1)} + \dfrac{x-4}{3(x-2)(x-1)} =$
   $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3(x+2)(x-2)+(x-4)(x-4)}{3(x-4)(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3(x^2-4)+(x-4)^2)}{3(x-4)(x-2)(x-1)} =$
   $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-12+x^2-8x+16}{3(x-4)(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^2-8x+4}{3(x-4)(x-2)(x-1)} =$
   $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4(x^2-2x+1)}{3(x-4)(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4(x^2-2x+1)}{3(x-4)(x-2)(x-1)} =$
   $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4(x-1)^2}{3(x-4)(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4(x-1)}{3(x-4)(x-2)} = \dfrac{0}{-24} = 0$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+x-3x^3}{5-x^2+3x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2+x-3x^3}{x^3}}{\frac{5-x^2+3x^3}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{3x^3}{x^3}}{\frac{5}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}+\frac{3x^3}{x^3}} = \dfrac{0+0-3}{0-0+3} = -1$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} - x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-x(x^2+1)}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-x^3-x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x}{x^2+1} =$
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

8) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-3\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+5x}-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{\sqrt{x^2+1}-3\sqrt{x}}{x}}{\frac{\sqrt[4]{x^3+5x}-x}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\frac{3\sqrt{x}}{x}}{\frac{\sqrt[4]{x^3+5x}}{x}-\frac{x}{x}}$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}-\frac{3}{x^{1/2}}}{\sqrt[4]{\frac{x^3+5x}{x^4}}-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{3}{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}-1} = \dfrac{\sqrt{1+0}-0}{\sqrt[4]{0+0}-1} = -1$

9) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ Racionalizando obtenemos
$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} =$
$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1)} = \dfrac{0}{2} = 0$

10) $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ Racionalizando obtenemos
$\lim\limits_{x\to5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\dfrac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2} = \lim\limits_{x\to5} \dfrac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim\limits_{x\to5} \dfrac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} =$
$\lim\limits_{x\to5} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \dfrac{1}{4}$

11) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}+2-2}{x-1} =$
$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-2}{x-1} - \dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{x-1}$ Racionalizando cada fracción obtenemos:
$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-2}{x-1}\dfrac{\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+2\sqrt[3]{7+x^3}+4}{\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+2\sqrt[3]{7+x^3}+4} - \dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{x-1}\dfrac{\sqrt{3+x^2}+2}{\sqrt{3+x^2}+2} =$
$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{(7+x^3)-8}{(x-1)\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+2\sqrt[3]{7+x^3}+4)} - \dfrac{3+x^2-4}{(x-1)(\sqrt{3+x^2}+2)} =$
$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{(x-1)\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+2\sqrt[3]{7+x^3}+4)} - \dfrac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{3+x^2}+2)} =$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+2\sqrt[3]{7+x^3}+4)}-\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{3+x^2}+2)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{((x^2+x+1)}{\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+2\sqrt[3]{7+x^3}+4)}-\frac{(x+1)}{(\sqrt{3+x^2}+2)}=$$

$$\frac{1+1+1}{4+4+4}-\frac{2}{2+2}=\frac{3}{12}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}-\frac{2}{4}=-\frac{1}{4}$$

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{(x+m)(x+n)}-x$ Racionalizando queda:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{(x+m)(x+n)}-x\;\frac{\sqrt{(x+m)(x+n)}+x}{\sqrt{(x+m)(x+n)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+m)(x+n)-x^2}{\sqrt{(x+m)(x+n)}+x}=$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+(m+n)x+mn-x^2}{\sqrt{(x+m)(x+n)}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(m+n)x+mn}{\sqrt{x^2+(m+n)x+mn}+x}$ Dividiendo por la

potencia más grande de x, que es x^2 queda:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(m+n)+\frac{mn}{x}}{\sqrt{1+\frac{(m+n)}{x}+\frac{mn}{x^2}}+1}=\frac{(m+n)+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{m+n}{2}$$

13) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{(2-x)(4+2x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4+2x+x^2-3}{(2-x)(4+2x+x^2)}=$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+1}{(2-x)(4+2x+x^2)}=\frac{4+4+1}{0}=\infty$$

14) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^2-1}{6x^2-5x+1}=\dfrac{1}{0}=\infty$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^2-2x-1}{6x^2-5x+1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(4x+1)}{(3x-1)(2x-1)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x+1}{3x-1}=\frac{2+1}{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$$

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+6x-2}$ Dividiendo por la potencia más grande de x que es x^4 queda:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^3}-\frac{2}{x^4}}=\frac{3}{0}=\infty$$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}\;\dfrac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2}\;\dfrac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4-4)(\sqrt{x^2+9}+3)}{(x^2+9-9)(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2)(\sqrt{x^2+9}+3)}{(x^2)(\sqrt{x^2+4}+2)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{\sqrt{0+9}+3}{\sqrt{0+4}+2}=\frac{3+3}{2+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

17) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}\,\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}=\lim_{x\to 4}\frac{1+2x-9}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=$

$\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{1+2x}+3}=$
$\displaystyle\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

18) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+x}{3^x-2x}$ Primero calcularemos $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3^x}$ usando el teorema del Sandwich.

Sabemos que $3^x\geq x^3$ Para $x>3$ Por lo tanto $\dfrac{x}{3^x}\leq\dfrac{x}{x^3}$ además $\dfrac{x}{3^x}\geq\dfrac{1}{3^x}$ por lo que

podemos afirmar que: $\dfrac{1}{3^x}\leq\dfrac{x}{3^x}\leq\dfrac{x}{x^3}\Rightarrow\dfrac{1}{3^x}\leq\dfrac{x}{3^x}\leq\dfrac{1}{x^2}$ Aplicando límite

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3^x}\leq\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3^x}\leq\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\Rightarrow 0\leq\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3^x}\leq 0$ Por lo que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3^x}=0$

Dividiendo el limite que queremos calcular por 3^x queda:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+x}{3^x-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{x}{3^x}}{1-\frac{2x}{3^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{x}{3^x}}{1-2\frac{x}{3^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0}{1-2(0)}=1$$

19) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x-2}$ Dividiendo por la potencia más grande de x que es x queda:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{0}{1}=0$$

20) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{\sqrt[3]{x^7+2x}}$ Dividiendo por la potencia más grande de x que es $x^{7/3}$ queda:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^{7/3}}+\frac{1}{x^{7/3}}}{\sqrt[3]{\frac{x^7}{x^7}+\frac{2x}{x^7}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^{1/3}}+\frac{1}{x^{7/3}}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^6}}}=\frac{0}{1}=0$$

21) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}\,\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{\sqrt{x^2+a^2}+a}\,\frac{\sqrt{x^2+b^2}+b}{\sqrt{x^2+b^2}+b}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+a^2-a^2)(\sqrt{x^2+b^2}+b)}{(x^2+b^2-b^2)(\sqrt{x^2+a^2}+a)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+b^2}+b)}{x^2(\sqrt{x^2+a^2}+a)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+b^2}+b}{\sqrt{x^2+a^2}+a}=\frac{\sqrt{b^2}+b}{\sqrt{a^2}+a}=\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a}$$

22) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}$ Sea $u^6 = x$ Si $x \to 1$ entonces $u^6 = 1 \Rightarrow u \to 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}} = \lim_{u\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{u^6}}{1-\sqrt{u^6}} = \lim_{u\to 1} \frac{1-u^2}{1-u^3} = \lim_{u\to 1} \frac{(1-u)(1+u)}{(1-u)(1+u+u^2)} =$$

$$\lim_{u\to 1} \frac{1+u}{1+u+u^2} = \frac{2}{3}$$

2. Calcular los siguientes límites trigonométricos

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\,8x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\,8x}{x}\dfrac{8}{8} = \lim\limits_{x\to 0} 8\dfrac{sen\,8x}{8x} = (8)(1) = 8$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2sen\,(3x)}{5x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2sen\,(3x)}{5x}\dfrac{3}{3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\,(3x)}{3x}\dfrac{6}{5} = (1)\left(\dfrac{6}{5}\right) = \dfrac{6}{5}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\,(3x)}{sen\,(2x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\,(3x)}{sen\,(2x)}\dfrac{2x}{3x}\dfrac{3}{2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\,(3x)}{3x}\dfrac{2x}{sen\,(2x)}\dfrac{3}{2} = (1)(1)\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,(2x)}{sen\,(5x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,(2x)}{sen\,(5x)}\dfrac{5x}{2x}\dfrac{2}{5} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,(2x)}{2x}\dfrac{5x}{sen\,(5x)}\dfrac{2}{5} = (1)(1)\left(\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{2}{5}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{sen\,(9x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{sen\,(9x)}\dfrac{7}{7} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9x}{sen\,(9x)}\dfrac{2}{9} = (1)\left(\dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{2}{9}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\,(3x)}{2x} + \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\,(3x)}{2x}\dfrac{3}{3} + \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\,(3x)}{3x}\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = (1)\left(\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos\,(2x) - cos\,(5x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2sen\left(\frac{2x+5x}{2}\right)sen\left(\frac{2x-5x}{2}\right)}{x^2} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2sen\left(\frac{7x}{2}\right)sen\left(\frac{-3x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\left(\frac{7x}{2}\right)sen\left(\frac{-3x}{2}\right)}{\frac{-x^2}{2}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\left(\frac{7x}{2}\right)}{x}\frac{sen\left(\frac{-3x}{2}\right)}{\frac{-x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{7}{2}\frac{sen\left(\frac{7x}{2}\right)}{\frac{7x}{2}}\frac{3\,sen\left(\frac{-3x}{2}\right)}{\frac{-3x}{2}} = \frac{7}{2}(1)\,(3)(1) = \frac{21}{2}$$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+sen\,x} - \sqrt{1-tg\,x}}{sen\,(2x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+sen\,x} - \sqrt{1-tg\,x}}{sen\,(2x)}\dfrac{\sqrt{1+sen\,x} + \sqrt{1-tg\,x}}{\sqrt{1+sen\,x} + \sqrt{1-tg\,x}} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+sen\,x-(1-tg\,x)}{(sen\,(2x))(\sqrt{1+sen\,x} + \sqrt{1-tg\,x})} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x + tg\,x}{(sen\,(2x))(\sqrt{1+sen\,x} + \sqrt{1-tg\,x})} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x+\frac{sex\,x}{cos\,x}}{(sen\,(2x))(\sqrt{1+sen\,x}+\sqrt{1-tg\,x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen\,x\,cos\,x+sex\,x}{cos\,x}}{(sen\,(2x))(\sqrt{1+sen\,x}+\sqrt{1-tg\,x})}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen\,x\,(cos\,x+1)}{cos\,x}}{(2sen\,x\,cos\,x)(\sqrt{1+sen\,x}+\sqrt{1-tg\,x})}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x\,(cos\,x+1)}{(2sen\,x\,cos^2\,x)(\sqrt{1+sen\,x}+\sqrt{1-tg\,x})}=\lim_{x\to 0}\frac{cos\,x+1}{(2\,cos^2\,x)(\sqrt{1+sen\,x}+\sqrt{1-tg\,x})}=$$

$$\frac{cos\,0+1}{(2\,cos^2\,0)(\sqrt{1+sen\,0}+\sqrt{1-tg\,0})}=\frac{1+1}{2(1)(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0})}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

9) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{sen\,x}-\frac{1}{tg\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{sen\,x}-\frac{1}{\frac{sen\,x}{cos\,x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{sen\,x}-\frac{cos\,x}{sen\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{sen\,x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{sen\,x}\,\frac{1+cos\,x}{1+cos\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2\,x}{sen\,x(1+cos\,x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2\,x}{sen\,x(1+cos\,x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{1+cos\,x}=\frac{0}{2}=0$$

10) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tg\,x$$

Sea $u=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-u$. Si $x\to\frac{\pi}{2}$ entonces $u\to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tg\,x=\lim_{u\to 0}u\,tg\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\lim_{u\to 0}u\frac{sen\,(\frac{\pi}{2}-u)}{cos\,(\frac{\pi}{2}-u)}=$$

$$\lim_{u\to 0}u\,\frac{sen\frac{\pi}{2}\,cos\,u-sen\,u\,cos\frac{\pi}{2}}{cos\frac{\pi}{2}\,cos\,u+sen\frac{\pi}{2}\,sen\,u}=\lim_{u\to 0}u\,\frac{cos\,u}{sen\,u}=\lim_{u\to 0}cos\,u\,\frac{u}{sen\,u}=(1)(1)=1$$

11) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x-arcsen\,x}{3x+arctg\,x}$ Por infinitesimales sabemos que $arcsen\,x\approx x$ y $arctg\,x\approx x$ por lo que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-arcsen\,x}{3x+arctg\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-x}{3x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

12) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+cos\,x}}{sen^2\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+cos\,x}}{sen^2\,x}\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+cos\,x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+cos\,x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-(1+cos\,x)}{(sen^2\,x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+cos\,x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{(sen^2\,x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+cos\,x})}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{(sen^2\,x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+cos\,x})}\,\frac{1+cos\,x}{1+cos\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2\,x}{(1+cos\,x)(sen^2\,x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+cos\,x})}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{(1+cos\,x)(sen^2 x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+cos\,x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+cos\,x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+cos\,x})}=$$

$$\frac{1}{(2)(\sqrt{2}+\sqrt{2})}=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{cos\,(a+x)-cos\,(a-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2sen\,\left(\frac{(a+x)+(a-x)}{2}\right)\,sen\,\left(\frac{(a+x)-(a-x)}{2}\right)}{x}=$
$\lim_{x\to 0}\frac{-2sen\,\left(\frac{2a}{2}\right)\,sen\,\left(\frac{2x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2sen\,(a)\,sen\,(x)}{x}=\lim_{x\to 0}-2sen\,(a)\frac{sen\,(x)}{x}=$
$-2sen\,(a)$

14) $\lim_{x\to 0}cosec\,x-cotg\,x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{sen\,x}-\frac{1}{tg\,x}=0$ Resuelto con anterioridad.

15) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cotg\,x-tg\,x}{sen\,x-cos\,x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{cos\,x}{sen\,x}-\frac{sen\,x}{cos\,x}}{sen\,x-cos\,x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{cos^2 x-sen^2 x}{sen\,x\,cos\,x}}{sen\,x-cos\,x}=$
$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cos^2 x-sen^2 x}{(sen\,x-cos\,x)(sen\,x\,cos\,x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(cos\,x-sen\,x)(cos\,x-sen\,x)}{(sen\,x-cos\,x)(sen\,x\,cos\,x)}=$
$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-(cos\,x-sen\,x)}{sen\,x\,cos\,x}=\frac{-(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})}{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}=0$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{cos\,(2x)+cotg\,x+sen\,x}{cos\,x}$ Indeterminado. ¿Mal copiado?

17) $\lim_{x\to 0}\frac{cos\,(2x)-sen\,(\frac{\pi}{2}-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{cos\,(2x)-cos\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{cos^2 x-sen^2 x-cos\,x}{x}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{cos\,x(cos\,x-1)-sen^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{cos\,x(cos\,x-1)-sen^2 x}{x}\,\frac{cos\,x+1}{cos\,x+1}=$
$\lim_{x\to 0}\frac{cos\,x(cos^2 x-1)-(cos\,x+1)sen^2 x}{x(cos\,x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{cos\,x(sen^2 x)-(cos\,x+1)sen^2 x}{x(cos\,x+1)}=$
$\lim_{x\to 0}\frac{(sen^2 x)(cos\,x-(cos\,x+1)}{x(cos\,x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-(sen^2 x)}{x(cos\,x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen\,x}{x}\frac{sen\,x}{cos\,x+1}=$
$(-1)\left(\frac{0}{2}\right)=0$

18) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{cos\,x}-cotg\,x}{sen\,(2x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{cos\,x}-\frac{cos\,x}{sen\,x}}{sen\,(2x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{cos\,x}-\frac{cos\,x}{sen\,x}}{2\,sen\,x\,cos\,x}=$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{sen\,x\sqrt{cos\,x}-cos\,x}{sen\,x}}{2\,sen\,x\,cos\,x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sen\,x\sqrt{cos\,x}-cos\,x}{2\,sen^2\,x\,cos\,x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sen\,x\sqrt{cos\,x}}{2\,sen^2\,x\,cos\,x} - \frac{cos\,x}{2\,sen^2\,x\,cos\,x} =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\,sen\,x\,\sqrt{cos\,x}} - \frac{1}{2\,sen^2\,x} = \frac{1}{0} - \frac{1}{2} = \infty$$

19) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+tg\,x}-\sqrt{1-tg\,x}}{tg\,(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+tg\,x}-\sqrt{1-tg\,x}}{tg\,(2x)}\,\frac{\sqrt{1+tg\,x}+\sqrt{1-tg\,x}}{\sqrt{1+tg\,x}+\sqrt{1-tg\,x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+tg\,x-(1-tg\,x)}{(\sqrt{1+tg\,x}+\sqrt{1-tg\,x})tg\,(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2tg\,x}{(\sqrt{1+tg\,x}+\sqrt{1-tg\,x})tg\,(2x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+tg\,x}+\sqrt{1-tg\,x}}\frac{tg\,x}{tg\,(2x)}\,\frac{x}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+tg\,x}+\sqrt{1-tg\,x}}\frac{tg\,x}{x}\,\frac{2x}{tg\,(2x)} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}(1)(1) = \frac{1}{2}$$

20) $$\lim_{x\to 0} \frac{sen^2\,x-3tg^4\,x}{sen^3\,x-sen^2\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{(sen^2\,x)(1-3(tg^2\,x\,sec^2\,x))}{sen^2\,x(sen\,x-1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-3(tg^2\,x\,sec^2\,x)}{sen\,x-1} = \frac{1-3(0*1)}{0-1} = -1$$

3. Calcular los siguientes límites exponenciales y logarítmicos

1) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2 = e^2$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x} = 3\frac{e^{3x}-1}{3x} = 3(1) = 3$

3) $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+(-2x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}[(1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}}]^{-2} = e^{-2}$

4) $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0}[(1+3x)^{\frac{1}{x}}]^2 = \lim_{x\to 0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^6 = e^6$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^4 = e^4$

6) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{5x+3} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{5x+3}{2x}} =$$

$$\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{5x+3}{2x}} = e^{\frac{5}{2}}$$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tg\,x}-1}{tg\,x}$ Sea $u = tg\,x$ si $x \to 0$ entonces $u \to 0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tg\,x}-1}{tg\,x} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^{u}-1}{u} = 1$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{sen\,(3x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{sen\,(3x)}\;\dfrac{3x}{2x}\;\dfrac{2}{3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\;\dfrac{3x}{sen\,(3x)}\;\dfrac{2}{3} = (1)(1)\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{arctg\,x}$ Por infinitesimales sabemos que $arctg\,x \approx x$ entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{x}}{arctg\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1-(e^{x}-1)}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x} - \frac{e^{x}-1}{x} = 3\frac{e^{3x}-1}{3x} - \frac{e^{x}-1}{x} = 3(1) - 1 = 2$$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{arctg\,(3x) - arctg\,(2x)}$ Por infinitesimales $arctg\,(3x) \approx 3x$ y $arctg\,(2x) \approx 2x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{2x}}{3x-2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1-(e^{2x}+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x} - \frac{e^{2x}-1}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} 5\frac{e^{5x}-1}{5x} - 2\frac{e^{2x}-1}{2x} = 5(1) - 2(1) = 3$$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsen\,x - arctg\,x}{x^{3}}$

Sea $\alpha = arcsen\,x$, $\beta = arctg\,x$ y $t = arcsen\,x - arctg\,x \Rightarrow t = \alpha - \beta \Rightarrow$

$sen\,t = sen\,(\alpha-\beta) = sen\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sen\,\beta$

Como $\alpha = arcsen\,x \Rightarrow sen\,\alpha = x, cos\,\alpha = \sqrt{1-x^{2}}$ y

$\beta = arctg\,x \Rightarrow tg\,\beta = x \Rightarrow sen\,\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \wedge cos\,\beta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow$

$sen\,t = x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow t = arcsen\left(x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

Reemplazando:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\left(x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^3}\;\frac{x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\left(x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}\;\frac{x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^3} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\left(x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}\ \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(1-\sqrt{1-x^2})}{x^3}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\left(x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}\ \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(1-\sqrt{1-x^2})}{x^3}\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\left(x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}\ \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(x^2)}{x^3(1+\sqrt{1-x^2})}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\left(x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}\ \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{(1+\sqrt{1-x^2})}=(1)\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-\frac{1}{2^x}}{2^x+\frac{1}{2^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2^{2x}-1}{2^x}}{\frac{2^{2x}+1}{2^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1}=1$

13) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{-x}-2^x}{2^{-x}+2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=-1$ Resuelto con anterioridad.

14) $\lim\limits_{x\to 0}(cos\,x+sen\,x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-1+cos\,x+sen\,x)^{\frac{1}{x}}=$

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+cos\,x+sen\,x-1)^{\frac{1}{cos\,x+sen\,x-1}}\right]^{\frac{cos\,x+sen\,x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos\,x-1+sen\,x}{x}}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos\,x-1}{x}+\frac{sen\,x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos\,x-1}{x}\frac{cos\,x+1}{cos\,x+1}+\frac{sen\,x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos^2\,x-1}{x(cos\,x+1)}+\frac{sen\,x}{x}}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-sen^2\,x}{x(cos\,x+1)}+\frac{sen\,x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}\frac{-sen\,x}{cos\,x+1}+\frac{sen\,x}{x}}=e^{(1)(0)+1}=e$$

15) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{e^{2x^2+x-1}-e^{x^2+x+1}}{x^2-2}=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{e^x(e^{2x^2-1}-e^{x^2+1})}{x^2-2}$ Sea $u=x^2-2\Rightarrow x^2=u+2$

Si $x\to\sqrt{2}\Rightarrow u\to 0$ Reemplazando queda:

$$\lim_{u\to 0}\frac{e^{\sqrt{u+2}}(e^{2u+3}-e^{u+3})}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{e^{\sqrt{u+2}}e^3(e^{2u}-e^u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{e^{\sqrt{u+2}}e^3(e^{2u}-1-(e^u-1))}{u}=$$

$$\lim_{u\to 0}e^{\sqrt{u+2}}e^3\left(\frac{e^{2u}-1}{u}-\frac{e^u-1}{u}\right)=\lim_{u\to 0}e^{\sqrt{u+2}+3}\left(2\frac{e^{2u}-1}{2u}-\frac{e^u-1}{u}\right)=$$

$$e^{\sqrt{2}+3}(2(1)-(1))=e^{\sqrt{2}+3}$$

16) $\lim_{x\to 0}\dfrac{ln\,(1-x)+sen\,(3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{ln\,(1-x)}{x}+\dfrac{sen\,(3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{ln\,(1-x)}{x}+\lim_{x\to 0}3\dfrac{sen\,(3x)}{3x}=$

$3+\lim_{x\to 0}\dfrac{ln\,(1-x)}{x}$ Sea $u=ln\,(1-x)\Rightarrow e^u=1-x\Rightarrow x=1-e^u$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{ln\,(1-x)}{x}=\lim_{u\to 0}\dfrac{u}{1-e^u}=\lim_{u\to 0}-\dfrac{u}{e^u-1}=\lim_{u\to 0}-\left(\dfrac{e^u-1}{u}\right)^{-1}=-1\Rightarrow$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{ln\,(1-x)+sen\,(3x)}{x}=3+(-1)=2$

17) $\lim_{x\to 0}\dfrac{b^x-a^x}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{b^x-1-(a^x-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{b^x-1}{x}-\dfrac{a^x-1}{x}=ln\,b-ln\,a=ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$

18) $\lim_{x\to 0}\dfrac{8^x-e^x}{x}$ Usando el ejercicio anterior $\lim_{x\to 0}\dfrac{8^x-e^x}{x}=ln\,8-ln\,e=ln\,8-1$

4. Dada la función $f(x)$ calcular $f(x+h)$ y calcular el límite $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

1) $f(x)=\sqrt{x}\quad \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\;\dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $f(x)=\sqrt[3]{x}\quad \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}\;\dfrac{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}}=$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}=$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}=\dfrac{1}{(\sqrt[3]{(x+0)^2}+\sqrt[3]{x(x+0)}+\sqrt[3]{x^2})}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}\quad \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=\frac{-1}{x(x+0)}=\frac{-1}{x^2}$$

4) $f(x)=x^2+2x+6 \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+2(x+h)+6-(x^2+2x+6)}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+2x+2h+6-x^2-2x-6}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh+2h}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x+2)}{h}=\lim_{h\to 0}h+2x+2=2x+2$$

5) $f(x)=\frac{ax-b}{bx-a} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{a(x+h)-b}{b(x+h)-a}-\frac{ax-b}{bx-a}}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(bx-a)(a(x+h)-b)-(b(x+h)-a)(ax-b)}{(b(x+h)-a)(bx-a)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(bx-a)(ax+ah-b)-(bx+bh-a)(ax-b)}{h(bx+bh-a)(bx-a)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(abx^2+abhx-b^2x-a^2x-a^2h+ab)-(abx^2+abhx-a^x-b^2x-b^2h+ab)}{h(bx+bh-a)(bx-a)}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(-a^2h)-(-b^2h)}{h(bx+bh-a)(bx-a)}=\lim_{h\to 0}\frac{-a^2-(-b^2)}{(bx+bh-a)(bx-a)}=\frac{-a^2+b^2}{(bx-a)(bx-a)}=$$
$$-\frac{a^2-b^2}{(bx-a)^2}$$

6) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x(x+h)}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x(x+h)}}\ \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}=\lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{h\sqrt{x(x+h)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\sqrt{x(x+h)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{x(x+h)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}=$$

$$\frac{-1}{\sqrt{x(x+0)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+0})}=\frac{-1)}{\sqrt{x^2}(\sqrt{x}+\sqrt{x})}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

7) $f(x)=\sqrt{x+3} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3}}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3}}{h}\ \frac{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h+3-(x+3)}{h(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3})}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

8) $f(x)=\sqrt{2x^2-x}\quad \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2(x+h)^2-(x+h)}-\sqrt{2x^2-x}}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)^2-(x+h)}-\sqrt{2x^2-x}}{h}\;\frac{\sqrt{2(x+h)^2-(x+h)}+\sqrt{2x^2-x}}{\sqrt{2(x+h)^2-(x+h)}+\sqrt{2x^2-x}}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2-(x+h)-(2x^2-x)}{h(\sqrt{2(x+h)^2-(x+h)}+\sqrt{2x^2-x})}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x^2+2xh+h^2)-x-h-2x^2+x}{h(\sqrt{2(x+h)^2-(x+h)}+\sqrt{2x^2-x})}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{4xh+2h^2-h}{h(\sqrt{2(x+h)^2-(x+h)}+\sqrt{2x^2-x})}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4x+2h-1)}{h(\sqrt{2(x+h)^2-(x+h)}+\sqrt{2x^2-x})}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{4x+2h-1}{\sqrt{2(x+h)^2-(x+h)}+\sqrt{2x^2-x}}=\frac{4x+2(0)-1}{\sqrt{2(x+(0))^2-(x+(0))}+\sqrt{2x^2-x}}=$$

$$\frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{2x^2-x}}=\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}}$$

9) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}\quad \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2(x+h)-1}}-\frac{1}{\sqrt{2x-1}}}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2(x+h)-1}}{\sqrt{2(x+h)-1}\,\sqrt{2x-1}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2(x+h)-1}}{h\,\sqrt{2(x+h)-1}\,\sqrt{2x-1}}\;\frac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2(x+h)-1}}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2(x+h)-1}}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2x-1-(2(x+h)-1)}{h\,\sqrt{2(x+h)-1}\,\sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2(x+h)-1})}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2x-1-2x-2h+1}{h\,\sqrt{2(x+h)-1}\,\sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2(x+h)-1}}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h\,\sqrt{2(x+h)-1}\,\sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2(x+h)-1}}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-2}{\sqrt{2(x+h)-1}\,\sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2(x+h)-1})}=$$

$$\frac{-2}{\sqrt{2(x+0)-1}\,\sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2(x+0)-1})}=$$

$$\frac{-2}{\sqrt{2x-1}\,\sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-1})}=\frac{-2}{(2x-1)2\sqrt{2x-1}}=\frac{-1}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$$

10) $f(x)=sen\,x\quad \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{sen\,(x+h)-sen\,x}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen\,x\,cos\,h+sen\,h\,cos\,x-sen\,x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen\,x(\,cos\,h-1)+sen\,h\,cos\,x}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen\,x(\,cos\,h-1)}{h}+\frac{sen\,h\,cos\,x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen\,x(\,cos\,h-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{sen\,h\,cos\,x}{h}=$$
$$sen\,x\lim_{h\to 0}\frac{cos\,h-1}{h}+cos\,x\lim_{h\to 0}\frac{sen\,h}{h}=sen\,x(0)+cos\,x(1)=cos\,x$$

11) $f(x)=log\,x \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{log\,(x+h)-log\,x}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{log\,(\frac{x+h}{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,log\,\left(\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}log\,\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}log\,\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{h}}=$$

$$\lim_{h\to 0}log\,\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{h}\frac{x}{x}}=\lim_{h\to 0}log\,\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}}=log\,\lim_{h\to 0}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}}=$$
$$log\,e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\;\;log\,e$$

12) $f(x)=a^x \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^xa^h-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\;ln\,a$$

13) $f(x)=tg\,x \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{tg\,(x+h)-tg\,x}{h}$

Como $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\,tg\beta}\Rightarrow tg\alpha-tg\beta=(1+tg\alpha\,tg\beta)(tg(\alpha-\beta))$

$$\lim_{h\to 0}\frac{tg\,(x+h)-tg\,x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+tg(x+h)\,tg\,x)tg(x+h-x)}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+tg(x+h)\,tg\,x)\;tg\,h}{h}=\lim_{h\to 0}(1+tg\,(x+h)tg\,x)\;\frac{tg\,h}{h}=(1+tg^2x)(1)=$$
$$sec^2x$$

14) $f(x)=ln\,x \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ln\,(x+h)-ln\,x}{h}$

Por ejercicio resuelto con anterioridad $\lim_{h\to 0}\dfrac{ln\,(x+h)-ln\,x}{h}=\dfrac{1}{x}\;ln\,e=\dfrac{1}{x}(1)=$
$\dfrac{1}{x}$

15) $f(x)=ln\,(2x-1) \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ln\,(2(x+h)-1)-ln\,(2x-1)}{h}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{ln\,\left(\frac{2x+2h-1}{2x-1}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\; ln\,\left(\frac{2x-1+2h}{2x-1}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\; ln\,\left(1+\frac{2h}{2x-1}\right) =$$

$$\lim_{h\to 0}\; ln\,\left(1+\frac{2h}{2x-1}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0}\; ln\,\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{2h}}\right)^{\frac{2x-1}{2h}\,\frac{2}{2x-1}} = ln\; e^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{2}{2x-1}} =$$

$$ln\; e^{\frac{2}{2x-1}} = \frac{2}{2x-1}\; ln\; e = \frac{2}{2x-1}$$

16) $f(x) = sen\,(3x{+}c)\quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sen\,(3(x+h)+c) - sen\,(3x+c)}{h}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{sen\,(3(x+h)+c) - sen\,(3x+c)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\; sen\;\left(\frac{3(x+h)+c-(3x+c)}{2}\right)\; cos\;\left(\frac{3(x+h)+c+(3x+c)}{2}\right)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\; sen\;\left(\frac{3x+3h+c-3x-c)}{2}\right)\; cos\;\left(\frac{3x+3h+c+3x+c}{2}\right)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\; sen\;\left(\frac{3h}{2}\right)\; cos\;\left(\frac{6x+3h+2c}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sen\;\left(\frac{3h}{2}\right)\; cos\;\left(\frac{6x+3h+2c}{2}\right)}{\frac{h}{2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{3sen\;\left(\frac{3h}{2}\right)\; cos\;\left(\frac{6x+3h+2c}{2}\right)}{\frac{3h}{2}} = \lim_{h\to 0} 3\frac{sen\;\left(\frac{3h}{2}\right)}{\frac{3h}{2}}\;\; cos\;\left(\frac{6x+3h+2c}{2}\right) =$$

$$(3)\,(1)\,cos\;\left(\frac{6x+3(0)+2c}{2}\right) = (3)\,cos\;\left(\frac{6x+2c}{2}\right) = 3\,cos\,(3x+c)$$

17) $f(x) = arctg\,x\quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{arctg\,(x+h) - arctg\,x}{h}$

Sea $\alpha = arctg\,(x+h)$ y $\beta = arctg\,x \Rightarrow tg\;\alpha = x+h$ y $tg\,\beta = x$

Sea $\alpha - \beta = t \Rightarrow tg\;\, t = tg\;\, (\alpha - \beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta} = \dfrac{x+h-x}{1+(x+h)x} = \dfrac{h}{1+x^2+hx} \Rightarrow$

$$tg\; t = \frac{h}{1+x^2+hx} \Rightarrow t = arctg\;\left(\frac{h}{1+x^2+hx}\right)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{arctg\,(x+h) - arctg\,x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{arctg\;\left(\frac{h}{1+x^2+hx}\right)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{arctg\;\left(\frac{h}{1+x^2+hx}\right)}{\frac{h}{1+x^2+hx}}\;\; \frac{1}{1+x^2+hx} = (1)\;\lim_{h\to 0} \frac{1}{1+x^2+hx} = \frac{1}{1+x^2+0x} = \frac{1}{1+x^2}$$

18) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{\sqrt[3]{x+h}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{h}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+h}}{h\ \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+h}}{h\ \sqrt[3]{x^2+hx}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+h}}{h\ \sqrt[3]{x^2+hx}} \quad \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{(x+h)^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{(x+h)^2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x - x - h}{(h\ \sqrt[3]{x^2+hx})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x+h)}) + \sqrt[3]{(x+h)^2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-h}{(h\ \sqrt[3]{x^2+hx})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x+h)}) + \sqrt[3]{(x+h)^2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-1}{(\sqrt[3]{x^2+hx})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x+h)}) + \sqrt[3]{(x+h)^2}} = \frac{-1}{(\sqrt[3]{x^2})(3\sqrt[3]{x^2})} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

CAPÍTULO

3

Límite de una función

1

3.6 Apéndice

3.6.1 Criterio ϵ–δ para límite de una función

- La definición rigurosa de $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ con el criterio "ϵ–δ" es la siguiente:

  $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ si dado un $\epsilon > 0$ arbitrario existe un $\delta > 0$ tal que:

$$| f(x) - \alpha | < \epsilon \text{ si } 0 < | x - x_0 | < \delta .$$

  Esto es, la distancia de $f(x)$ a α es menor que cualquier número positivo ϵ si $x \neq x_0$ dista de x_0 menos que un cierto número positivo δ.

  Recordemos que:

$$\begin{aligned} | f(x) - \alpha | < \epsilon \; &\Leftrightarrow \; -\epsilon < f(x) - \alpha < \epsilon \; \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \; -\epsilon + \alpha < f(x) < \alpha + \epsilon \; \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \; f(x) \in (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon) \; . \end{aligned}$$

  Y que de la misma manera

$$\begin{aligned} 0 < | x - x_0 | < \delta \; &\Leftrightarrow \; -\delta < x - x_0 < \delta, \quad x \neq x_0 \; \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \; x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \quad x \neq x_0 \; \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \; x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\} \, . \end{aligned}$$

  Entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ significa que, dado cualquier intervalo abierto con centro en α, existe un intervalo abierto con centro en x_0 tal que a todos sus puntos x (con excepción posiblemente de x_0) f les hace corresponder puntos $f(x)$ del intervalo con centro en α.

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Ejemplo 3.6.1 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$*, usar el criterio* ϵ*–*δ *para demostrar que* $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$.

▼ Debemos demostrar que dado un número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que $|\, f(x) - 5\,| < \epsilon$ siempre que $0 < |\, x - 2\,| < \delta$.
Supongamos entonces que se da un $\epsilon > 0$.
Puesto que $3x^2 - 7x + 2 = (x - 2)(3x - 1)$ y que para $x \neq 2$:

$$|\, f(x) - 5\,| = \left| \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2} - 5 \right| = \left| \frac{(x - 2)(3x - 1)}{x - 2} - 5 \right| = |\,(3x - 1) - 5\,| =$$
$$= |\,3x - 6\,| = |\,3(x - 2)\,| = |\,3\,|\,|\,x - 2\,| = 3\,|\,x - 2\,|\,,$$

entonces

$$|\, f(x) - 5\,| < \epsilon \;\Leftrightarrow\; 3\,|\,x - 2\,| < \epsilon \;\Leftrightarrow\; |\,x - 2\,| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Notemos aquí que, considerando al número conocido $\dfrac{\epsilon}{3}$ como el número δ cuya existencia hemos demostratrado (es decir $\dfrac{\epsilon}{3} = \delta$), podemos afirmar que $|\, f(x) - 5\,| < \epsilon$ siempre que $0 < |\,x - 2\,| < \delta = \dfrac{\epsilon}{3}$.
Esto nos indica que, dado un número $\epsilon > 0$, no importando cuan pequeño sea, podemos encontrar un número $\delta > 0$ que permite afirmar que $|\, f(x) - 5\,| < \epsilon$ siempre que $0 < |\,x - 2\,| < \delta$.
Ilustramos un poco más:

1. Dado $\epsilon = 0.03$, se tiene $\delta = \dfrac{\epsilon}{3} = \dfrac{0.03}{3} = 0.01$ y se puede afirmar que

$$\begin{array}{lll} |\, f(x) - 5\,| < 0.03 & \text{siempre que} & 0 < |\,x - 2\,| < 0.01, \text{ o sea,} \\ -0.03 < f(x) - 5 < 0.03 & \text{siempre que} & -0.01 < x - 2 < 0.01,\ x \neq 2, \text{ esto es,} \\ 5 - 0.03 < f(x) < 5 + 0.03 & \text{siempre que} & 2 - 0.01 < x < 2 + 0.01,\ x \neq 2, \text{ es decir,} \\ 4.97 < f(x) < 5.03 & \text{siempre que} & 1.99 < x < 2.01. \end{array}$$

   Efectivamente si, por ejemplo, $x = 2.001$, $f(x) = 5.003$ con $4.97 < 5.003 < 5.03$.

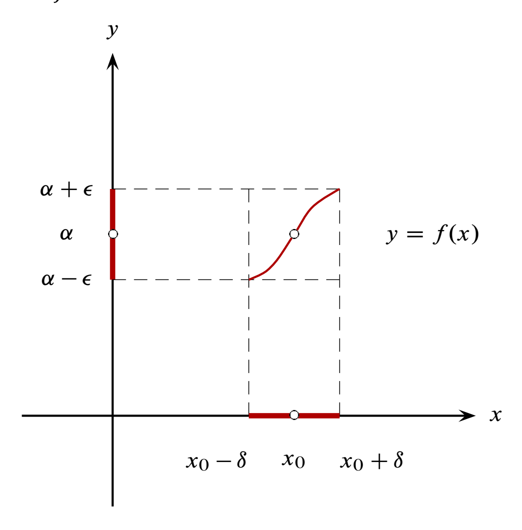
2. Dado $\epsilon = 0.0003$, se tiene que $\delta = \dfrac{\epsilon}{3} = 0.0001$ y se puede afirmar que

$$\begin{array}{ll} |\, f(x) - 5\,| < 0.0003 & \text{siempre que } 0 < |\,x - 2\,| < 0.0001, \text{ o sea,} \\ -0.0003 < f(x) - 5 < 0.0003 & \text{siempre que } -0.0001 < x - 2 < 0.0001, \text{ esto es,} \\ 5 - 0.0003 < f(x) < 5 + 0.0003 & \text{siempre que } 2 - 0.0001 < x < 2 + 0.0001, \text{ es decir,} \\ 4.9997 < f(x) < 5.0003 & \text{siempre que } 1.9999 < x < 2.0001,\ x \neq 2. \end{array}$$

Si $x = 2.00001 \Rightarrow f(x) = 5.00003$ que cumple con $4.9997 < 5.00003 < 5.0003$.

□

- Y ahora, gráficamente, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ significa que dada cualquier faja horizontal determinada por las rectas $y = \alpha - \epsilon$ & $y = \alpha + \epsilon$, existe un intervalo con centro en $x_0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que la gráfica de $f(x)$ entre las rectas $x = x_0 - \delta$ & $x = x_0 + \delta$ con excepción, posiblemente, de $[x_0, f(x_0)]$ está en esa misma franja horizontal.

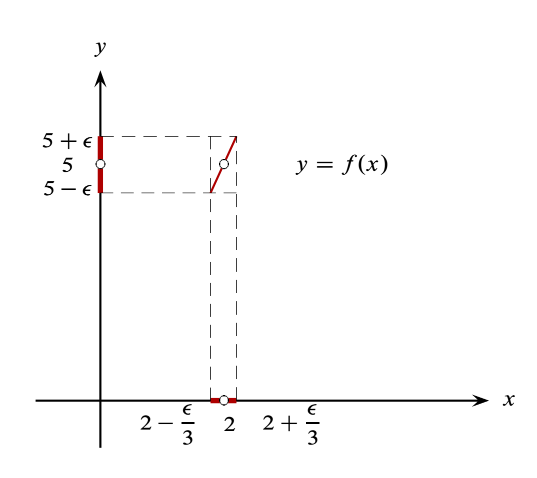


Ejemplo 3.6.2 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$*, ilustrar gráficamente la afirmación* $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$.

▼ Como vimos en el ejemplo 3.6.1 anterior, dado un número $\epsilon > 0$ podemos encontrar un número $\delta > 0$ (a saber $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$) tal que

$$
\begin{aligned}
|f(x) - 5| < \epsilon \quad & \text{siempre que} \quad 0 < |x - 2| < \delta, \text{ o sea,} \\
-\epsilon < f(x) - 5 < \epsilon \quad & \text{siempre que} \quad -\delta < x - 2 < \delta, \quad x \neq 2, \text{ es decir,} \\
5 - \epsilon < f(x) < 5 + \epsilon \quad & \text{siempre que} \quad 2 - \delta < x < 2 + \delta, \quad x \neq 2, \text{ esto es,} \\
5 - \epsilon < f(x) < 5 + \epsilon \quad & \text{siempre que} \quad 2 - \frac{\epsilon}{3} < x < 2 + \frac{\epsilon}{3}.
\end{aligned}
$$

Lo que gráficamente vemos así



□

3.6.2 Algo más sobre límites infinitos

Las definiciones rigurosas de límites infinitos en un punto son las siguientes:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ si dado un número $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ si $|\,x - x_0\,| < \delta$, con $x \neq x_0$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ si dado un número $N < 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$ si $|\,x - x_0\,| < \delta$, con $x \neq x_0$.

Ejemplo 3.6.3 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$*, demostrar que* $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$.

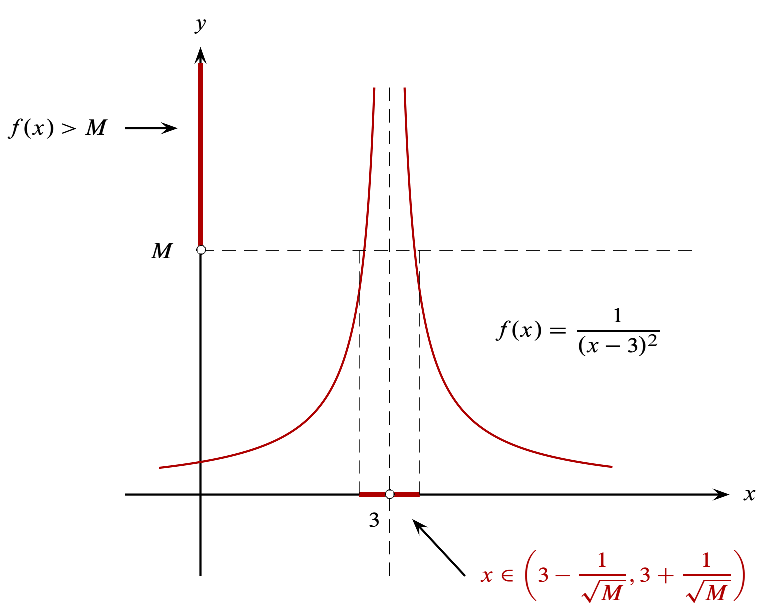
▼ Aquí debemos demostrar que, si damos un número $M > 0$ arbitrario (no importando su valor), podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que las imágenes $f(x)$ cumplan que $f(x) > M$ cuando x se encuentre en el intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta) - \{3\}$.
Es decir, debemos demostrar que dado un $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{(x-3)^2} > M \text{ siempre que } x \in (3 - \delta, 3 + \delta) - \{3\}\,.$$

En efecto suponiendo que $x \neq 3$:

$$f(x) > M \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{(x-3)^2} > M \;\Leftrightarrow\; 1 > M(x-3)^2 \;\Leftrightarrow\; (x-3)^2 < \frac{1}{M} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \sqrt{(x-3)^2} < \sqrt{\frac{1}{M}} \;\Leftrightarrow\; |\,x-3\,| < \frac{1}{\sqrt{M}} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; -\frac{1}{\sqrt{M}} < x - 3 < \frac{1}{\sqrt{M}} \;\Leftrightarrow\; 3 - \frac{1}{\sqrt{M}} < x < 3 + \frac{1}{\sqrt{M}}\,.$$

Si decidimos tomar $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$, podemos afirmar que $f(x) > M$ siempre que $3 - \delta < x < 3 + \delta$, con $x \neq 3$.
Hemos demostrado pues la existencia de un número $\delta > 0$ para cada número dado $M > 0$. Gráficamente se ve así:



□

Comentario adicional. Ilustremos la relación entre el $M > 0$ dado y el $\delta > 0$ encontrado ($\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$):

1. $M = 10^4 \;\Rightarrow\; \sqrt{M} = 10^2 \;\Rightarrow\; \delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}} = \dfrac{1}{10^2} = 10^{-2} = 0.01.$

   Luego, $f(x) > 10^4$ siempre que $x \in (3 - 0.01, 3 + 0.01) - \{3\}$. Esto es, $f(x) > 10^4$ siempre que $2.99 < x < 3.01$, con $x \neq 3$.

2. $M = 10^6 \;\Rightarrow\; \sqrt{M} = 10^3 \;\Rightarrow\; \delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}} = \dfrac{1}{10^3} = 10^{-3} = 0.001.$

   Luego, $f(x) > 10^6$ siempre que $x \in (3 - 0.001, 3 + 0.001) - \{3\}$. Esto es, $f(x) > 10^6$ siempre que $2.999 < x < 3.001$, con $x \neq 3$.

3. $M = 10^{12} \;\Rightarrow\; \sqrt{M} = 10^6 \;\Rightarrow\; \delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}} = \dfrac{1}{10^6} = 10^{-6} = 0.000001.$

   Luego, $f(x) > 10^{12}$ siempre que $x \in (3 - 0.000001, 3 + 0.000001) - \{3\}$. Esto es, $f(x) > 10^{12}$ siempre que $2.999999 < x < 3.000001$, con $x \neq 3$.

Claramente a medida que M es mayor hay que tomar un δ menor.

Ejemplo 3.6.4 *Dada* $f(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^4}$, *demostrar que* $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$.

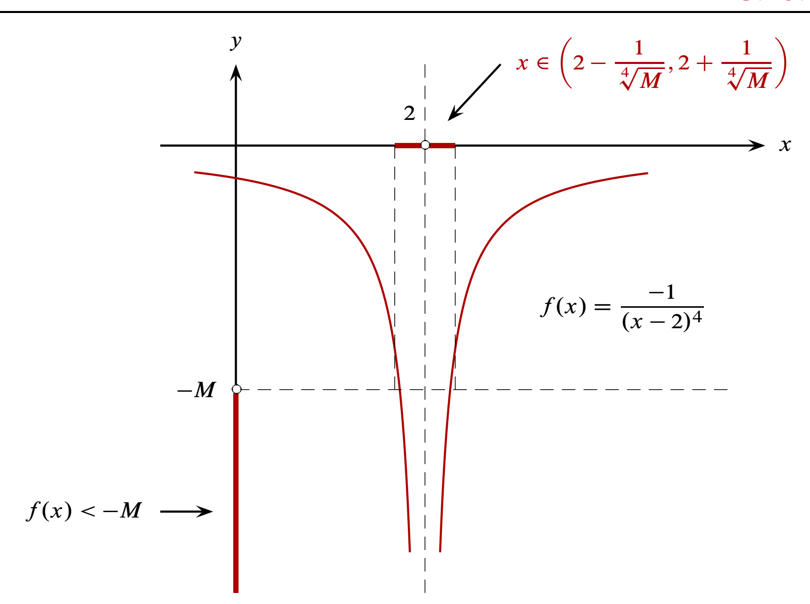
▼ Aquí debemos demostrar que, si damos un número $M > 0$ arbitrario (no importando su valor), podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < -M$ cuando $x \in (2 - \delta, 2 + \delta) - \{2\}$.
Es decir, debemos demostrar que dado un $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\frac{-1}{(x-2)^4} < -M \text{ siempre que } x \in (2 - \delta, 2 + \delta) - \{2\}\,.$$

En efecto suponiendo que $x \neq 2$:

$$f(x) < -M \;\Leftrightarrow\; \frac{-1}{(x-2)^4} < -M \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{(x-2)^4} > M \;\Leftrightarrow\; 1 > M(x-2)^4 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (x-2)^4 < \frac{1}{M} \;\Leftrightarrow\; \sqrt[4]{(x-2)^4} < \sqrt[4]{\frac{1}{M}} \;\Leftrightarrow\; |\,x-2\,| < \frac{1}{\sqrt[4]{M}} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; -\frac{1}{\sqrt[4]{M}} < x - 2 < \frac{1}{\sqrt[4]{M}} \;\Leftrightarrow\; 2 - \frac{1}{\sqrt[4]{M}} < x < 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{M}}\,.$$

Si aquí decidimos tomar $\delta = \dfrac{1}{\sqrt[4]{M}}$, podemos afirmar que $f(x) < -M$ siempre que $2 - \delta < x < 2 + \delta$, con $x \neq 2$.
Hemos demostrado pues la existencia de un número $\delta > 0$ para cada número $M > 0$ dado.
Gráficamente se ve así:



Comentario adicional. Ilustremos la relación entre el $M > 0$ dado y el $\delta > 0$ encontrado $\left(\delta = \frac{1}{\sqrt[4]{M}}\right)$:

1. $M = 10^8 \Rightarrow \sqrt[4]{M} = 10^2 \Rightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt[4]{M}} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2} = 0.01.$

   Luego, $f(x) < -10^8$ siempre que $x \in (2 - 0.01, 2 + 0.01) - \{2\}$.

   Es decir, $f(x) < -10^8$ siempre que $1.99 < x < 2.01$, con $x \neq 2$.

2. $M = 10^{12} \Rightarrow \sqrt[4]{M} = 10^3 \Rightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt[4]{M}} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} = 0.001.$

   Luego, $f(x) < -10^{12}$ siempre que $x \in (2 - 0.001, 2 + 0.001) - \{2\}$.

   Es decir, $f(x) < -10^{12}$ siempre que $1.999 < x < 2.001$, con $x \neq 2$.

3. $M = 10^{20} \Rightarrow \sqrt[4]{M} = 10^5 \Rightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt[4]{M}} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5} = 0.00001.$

   Luego, $f(x) < -10^{20}$ siempre que $x \in (2 - 0.00001, 2 + 0.00001) - \{2\}$.

   Esto es, $f(x) < -10^{20}$ siempre que $1.99999 < x < 2.00001$, con $x \neq 2$.

Observamos que a medida que $-M$ decrece también lo hace δ (y M crece).

□

CAPÍTULO

4

Continuidad

[1] OBJETIVOS PARTICULARES

1. Comprender el concepto de continuidad de una función en un punto.

2. Determinar y clasificar las discontinuidades de una función.

3. Bosquejar la gráfica de funciones continuas y discontinuas.

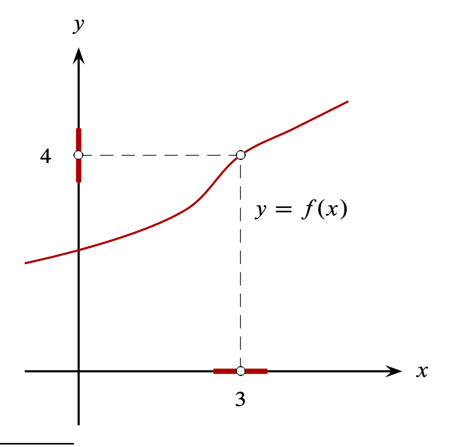
4. Determinar los valores apropiados de ciertos parámetros que aseguran la continuidad en un punto para una función definida por partes.

5. Comprender el concepto de continuidad de una función en intervalos.

6. Aplicar el teorema del Valor Intermedio para la existencia de raíces de una función continua.

4.1 Continuidad en un punto

Consideremos la gráfica de cierta función $y = f(x)$:



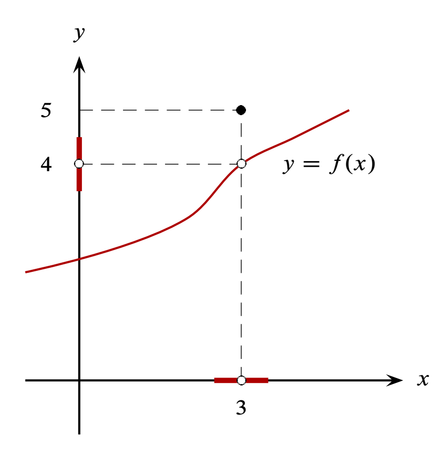
[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Obsérvese lo siguiente:

1. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$, por lo cual $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$. El límite existe.
2. $f(x)$ no está definida para $x = 3$. Esto es, $f(3)$ no existe.
3. La gráfica de f tiene una interrupción en el punto de abscisa $x = 3$.

   Decimos que la función no es continua en $x = 3$.

Consideremos ahora la siguiente gráfica:



Obsérvese lo siguiente:

1. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$, por lo cual $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$. El límite existe.
2. $f(x) = 5$ para $x = 3$. Esto es, $f(3) = 5$; $x = 3$ está en el dominio de $f(x)$.
3. La gráfica de f tiene una interrupción en el punto de abscisa $x = 3$. Decimos que la función no es continua en $x = 3$.

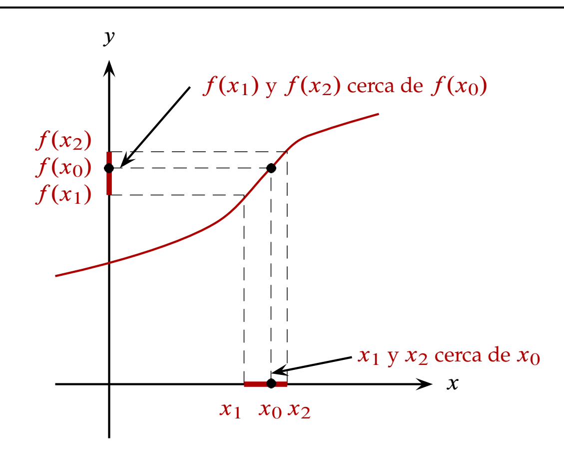
¿Cuando una función f es continua en un punto?

- Una función f es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$ si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

  Es decir, para que una función f sea continua en un punto x_0 necesariamente x_0 debe pertenecer al dominio de f, y debe existir el $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y precisamente tiene que ser $f(x_0)$.

Observemos que si una función f es continua en x_0 y tomamos $x_1, x_2 \in D_f$ cerca de x_0, entonces $f(x_1)$ y $f(x_2)$ están cerca de $f(x_0)$ y por lo tanto próximos entre sí, lo que se verbaliza diciendo: un cambio pequeño en x produce un cambio pequeño en $f(x)$.

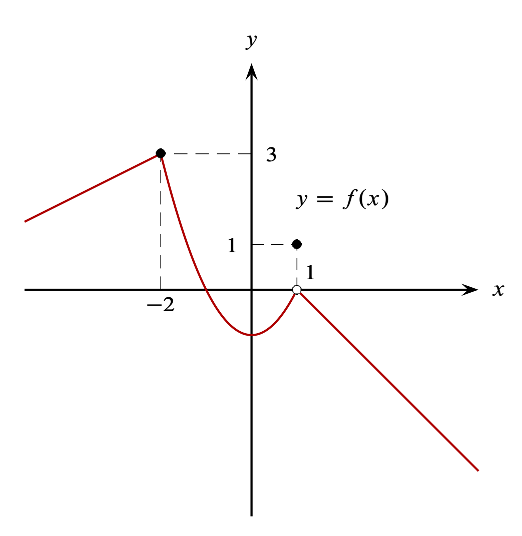


La continuidad es pues una ausencia de cambios bruscos. Como se dice tradicionalmente: una función es continua en un punto si en dicho punto la gráfica de la función no presenta interrupciones o saltos, esto es, cerca del punto se puede dibujar la gráfica de la función sin levantar el lápiz del papel.

Ejemplo 4.1.1 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 4 & \text{si } x < -2; \\ 3 & \text{si } x = -2; \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 < x < 1; \\ 1 & \text{si } x = 1; \\ 1 - x & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$

1. a. *¿Pertenece* $x_0 = -2$ *al dominio de* f*?*
   b. *¿Existe* $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$*?*
   c. *¿Es* $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$*? ¿Es* f *continua en* $x_0 = -2$*?*
2. a. *¿Pertenece* $x_0 = 1$ *al dominio de* f*?*
   b. *¿Existe* $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$*?*
   c. *¿Es* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$*? ¿Es* f *continua en* $x_0 = 1$*?*

▼ Graficamos primero la función



1. a. $f(-2) = 3$, por lo cual $x_0 = -2$ sí pertenece al dominio de f.
   b. Como la regla de correspondencia es distinta si $x < -2$ o bien si $x > -2$, calculamos los límites laterales en $x_0 = -2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x}{2}+4\right) = \dfrac{-2}{2}+4 = -1+4 = 3\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}(x^2-1) = (-2)^2-1 = 4-1 = 3\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2^-} f(x) = 3 = \lim_{x\to -2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to -2} f(x) = 3, \text{ el límite existe.}$$

   c. Como $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 3$ y como $f(-2) = 3$, entonces sí se cumple que

$$\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2).$$

   Por lo tanto f es continua en $x_0 = -2$.

2. a. $f(1) = 1$, por lo cual $x_0 = 1$ sí está en el dominio de f.
   b. Análogamente al inciso 1.(b) anterior, calculamos los límites laterales en $x_0 = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2-1) = 1^2-1 = 0\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(1-x) = 1-1 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 0, \text{ el límite existe.}$$

   c. Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ y como $f(1) = 1$, entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$. Por lo tanto la igualdad

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

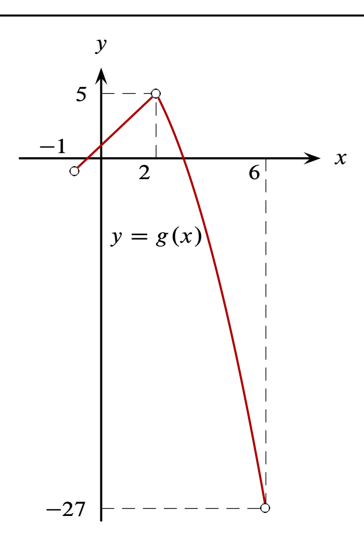
   no se cumple y por ende f no es continua en $x_0 = 1$.

□

Ejemplo 4.1.2 *Dada la función* $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ -1 < x < 2;\\ 9-x^2 & si\ 2 < x < 6\,. \end{cases}$

1. *¿Pertenece 2 al dominio de g?*
2. *¿Existe $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$?*
3. *¿Es g continua en $x_0 = 2$?*
4. *En caso de no ser continua g en $x_0 = 2$ ¿existe alguna manera de definir a la función g de manera que sea continua en $x_0 = 2$?*

▼ Graficamos primero la función



1. $g(x)$ sólo está definida para $x \in (-1,2)$ y para $x \in (2,6)$, por lo cual $g(x)$ no está definida para $x = 2$.

2. Calculamos los límites laterales en $x_0 = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 2(2)+1 = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}(9-x^2) = 9-(2)^2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} g(x) = 5 = \lim_{x\to 2^+} g(x) \Rightarrow \lim_{x\to 2} g(x) \text{ sí existe y } \lim_{x\to 2} g(x) = 5.$$

3. Como $g(2)$ no existe, entonces la igualdad $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = g(2)$ no se puede cumplir. Por lo tanto g no es continua en $x_0 = 2$.

4. Debido a la existencia de $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$, podemos definir a $g(2)$ de manera que se cumpla la igualdad
$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = g(2)$. ¿Cómo? Ya que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 5$, si definimos $g(2) = 5$, aseguramos el cumplimiento de la igualdad $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = g(2)$.

   Esto es, una nueva función $g(x)$ continua en $x = 2$ quedaría definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } -1 < x < 2; \\ 5 & \text{si } x = 2; \\ 9-x^2 & \text{si } 2 < x < 6\,. \end{cases}$$

□

Ejemplo 4.1.3 *Dada la función* $h(x) = \begin{cases} \dfrac{6-2x}{x^2-9} & \textit{si } x \neq \pm 3; \\ c & \textit{si } x = 3\,. \end{cases}$

1. *¿Pertenece 3 al dominio de h?*

2. *¿Existe $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$?*

3. *¿Cuánto debe valer c para que h sea continua en $x_0 = 3$?*

▼

1. Ya que $h(x) = c$ para $x = 3$, entonces $h(3) = c$ por lo que $3 \in D_f$.

   Observe que la ordenada c es arbitraria. Así el punto $(3, c)$ se puede situar en cualquier posición de la recta $x = 3$.

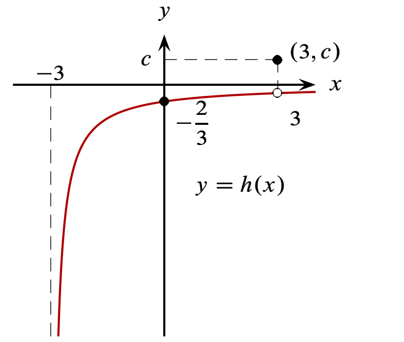
2. Calculamos $\lim h(x)$ cuando $x \to 3$.

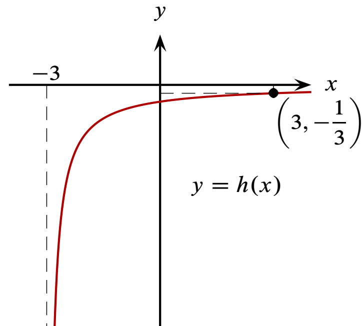
$$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3} \frac{6-2x}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{-2x+6}{x^2-3^2} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{-2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{-2}{x+3} = \frac{-2}{3+3} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}.$$

   Es decir, $\lim_{x\to 3} h(x) = -\frac{1}{3}$ sí existe.

3. La función h es continua en $x_0 = 3$ si y sólo si $\lim_{x\to 3} h(x) = h(3) \Leftrightarrow -\frac{1}{3} = c$.

   Por lo tanto, la función h es continua en $x_0 = 3$ si $c = -\frac{1}{3}$. Gráficamente:





□

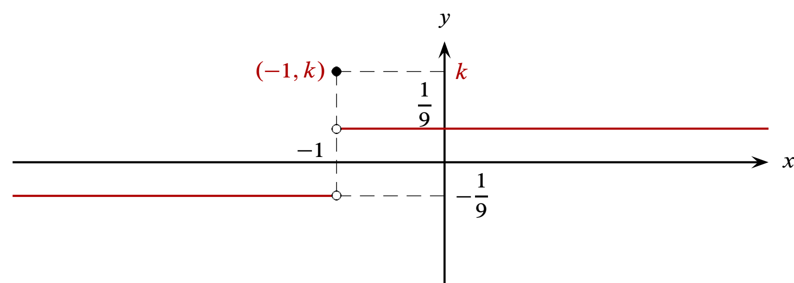
Ejemplo 4.1.4 *Dada la función* $\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{9(x+1)} & \text{si } x \neq -1; \\ k & \text{si } x = -1. \end{cases}$

1. *¿Pertenece -1 al dominio de ϕ?*

2. *¿Existe $\lim_{x\to -1} \phi(x)$?*

3. *¿Existe algún valor de k para el cual ϕ sea continua en $x_0 = -1$?*

▼ La gráfica de ϕ es:



1. Ya que $\phi(x) = k$ para $x = -1$, entonces $\phi(-1) = k$ & $-1 \in D_\phi$.

2. Por definición de valor absoluto se tiene que

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x+1 \geq 0; \\ -(x+1) & \text{si } x+1 < 0. \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1; \\ -(x+1) & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Entonces,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} \phi(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{|x+1|}{9(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-(x+1)}{9(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \left(-\dfrac{1}{9}\right) = -\dfrac{1}{9} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \phi(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{|x+1|}{9(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)}{9(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{1}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1^-} \phi(x) \neq \lim_{x\to -1^+} \phi(x) \Rightarrow \lim_{x\to -1} \phi(x) \text{ no existe.}$$

3. La función ϕ es continua en $x_0 = -1$ si y sólo si

$$\lim_{x\to -1} \phi(x) = \phi(-1) \Leftrightarrow \lim_{x\to -1} \phi(x) = k\,.$$

Debido a la no existencia de $\lim\limits_{x\to -1} \phi(x)$, podemos afirmar que no existe valor alguno de k que asegure el cumplimiento de la igualdad.

Esto es, no existe k para el cual ϕ sea continua en $x_0 = -1$.

□

Ejemplo 4.1.5 *Sea f la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & \text{si } x < 1; \\ 3 & \text{si } x = 1; \\ 4ax - b & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Determinar los valores de las constantes a, b para que la función f sea continua en $x = 1$.

▼ Para que f sea continua en $x = 1$, debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$; y como $f(1) = 3$, entonces se debe cumplir que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(ax^3 + bx) = a(1)^3 + b(1) = a + b;$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(4ax - b) = 4a(1) - b = 4a - b\,.$$

Para que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$, se debe cumplir que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, lo cual sucede si

$$\begin{cases} a + b &= 3; \\ 4a - b &= 3\,. \end{cases}$$

Lo anterior es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas. Operando tenemos:

$$5a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{5};$$
$$a + b = 3 \Rightarrow b = 3 - a = 3 - \frac{6}{5} = \frac{15-6}{5} = \frac{9}{5}.$$

Entonces, debe suceder que

$$a = \frac{6}{5} \text{ y que } b = \frac{9}{5} \text{ para que la función } f \text{ sea continua en } x = 1.$$

□

Ejemplo 4.1.6 *Se define la función*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si\ x < 1; \\ a & si\ x = 1; \\ bx^2 + 1 & si\ 1 < x < 3; \\ 2x & si\ 3 \le x\,. \end{cases}$$

1. *Determinar los valores de las constantes a, b que hacen de f una función continua en $x = 1$.*
2. *Reescriba la función f con los valores calculados de a, b. Estudie la continuidad o discontinuidad de f en $x = 3$.*

▼

1. Primero aseguramos la existencia de $\lim_{x\to 1} f(x)$ exigiendo la igualdad de los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x) = 2(1) = 2\,;$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(bx^2 + 1) = b(1) + 1 = b + 1\,;$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow 2 = b + 1 \Leftrightarrow b = 1\,.$$

   Entonces con $b = 1$ aseguramos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

   Luego exigimos que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ para asegurar la continuidad de f en $x = 1$.

   Ya que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ & $f(1) = a$, entonces $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2 = a$, es decir, $a = 2$.

   Luego con $a = 2$ & $b = 1$ aseguramos la continuidad de f en $x = 1$.

2. La función f con los valores a & b calculados, continua en $x = 1$ es

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1; \\ 2 & \text{si } x = 1; \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 < x < 3; \\ 2x & \text{si } 3 \le x\,. \end{cases}$$

¿Es continua f en $x = 3$? Veamos:

$$f(3) = 2(3) = 6\,;$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3}(x^2+1) = 3^2+1 = 10\,;$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3}(2x) = 2(3) = 6\,.$$

Nótese que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, por lo cual $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe.

Por lo tanto la función f no es continua en $x = 3$.

□

Ejemplo 4.1.7 *Determinar los valores de a, b para los cuales la siguiente función es continua en $x = -1$ y en $x = 1$. Bosquejar la gráfica.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & si\ x < -1; \\ ax+b & si\ -1 \le x \le 1; \\ 2x-4 & si\ x > 1\,. \end{cases}$$

▼ Para que la función sea continua en -1 se debe cumplir que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$.
En particular el límite debe existir y por lo tanto los límites laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(x^2+x+1) = (-1)^2+(-1)+1 = 1\,;$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(ax+b) = -a+b\,.$$

Igualando obtenemos

(*) $$-a+b = 1\,.$$

También para que la función sea continua en 1 se debe cumplir que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.
En particular el límite debe existir y por lo tanto los límites laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(ax+b) = a+b\,;$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x-4) = -2\,.$$

Igualando obtenemos

(**) $$a+b = -2\,.$$

Resolviendo el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, formado por $(*)$ y por $(**)$ obtenemos

$$a = -\frac{3}{2} \ \&\ b = -\frac{1}{2}\,.$$

Al sustituir estos valores, obtenemos la función de la que se nos pide bosquejar su gráfica

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x < -1; \\ -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 \le x \le 1; \\ 2x - 4 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

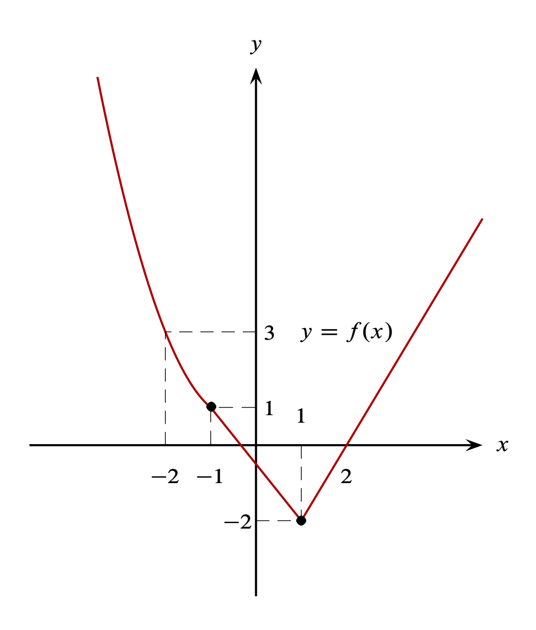
Esta función consta de tres partes:

1. La parábola $y = x^2 + x + 1$.
   Tenemos
   $$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\,.$$
   Es decir, es la parábola $y = x^2$ desplazada a la izquierda $\dfrac{1}{2}$ y levantada $\dfrac{3}{4}$.
   Pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(-2, 3)$.

2. La recta $y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.
   Ésta es una recta de pendiente $-\dfrac{3}{2}$ y ordenada en el origen $-\dfrac{1}{2}$.
   Pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(1, -2)$. Esta recta corta a la parábola en $(-1, 1)$.

3. La recta $y = 2x - 4$.
   Ésta es una recta de pendiente 2 y ordenada en el origen -4.
   Pasa por los puntos $(1, -2)$ y $(2, 0)$. Esta recta corta a la anterior en el punto $(1, -2)$.

Con esta información, un bosquejo de la gráfica de la función $f(x)$ es



Como vemos la función es continua en $x = -1$ y en $x = 1$. □

Ejemplo 4.1.8 *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \leq -3; \\ \dfrac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} & \text{si } -3 < x < 3; \\ d & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Encuentre los valores de c, d que hacen continua la función f en $x = -3$ y en $x = 3$.

▼ Para que la función sea continua en $x = -3$ se tiene que cumplir que $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3)$, esto es, que

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^+} f(x) = f(-3) = c.$$

Se sabe que

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} c = c.$$

Calculemos

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}}.$$

Racionalizando el denominador:

$$\frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} = \frac{(9 - x^2)(4 + \sqrt{x^2 + 7})}{(4 - \sqrt{x^2 + 7})(4 + \sqrt{x^2 + 7})} = \frac{(9 - x^2)(4 + \sqrt{x^2 + 7})}{16 - (x^2 + 7)} =$$
$$= \frac{(9 - x^2)(4 + \sqrt{x^2 + 7})}{9 - x^2} = 4 + \sqrt{x^2 + 7}.$$

Lo anterior si $9 - x^2 \neq 0$, es decir, si $9 \neq x^2$ o bien $|\,x\,| \neq 3$, esto es, $x \neq \pm 3$.
Entonces,

$$\lim_{x \to -3^\pm} \frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} = \lim_{x \to -3^\pm} (4 + \sqrt{x^2 + 7}) = 4 + \sqrt{9 + 7} = 4 + \sqrt{16} = 4 + 4 = 8.$$

Luego, la función $f(x)$ será continua en $x = -3$ si $c = 8$.
Análogamente para que $f(x)$ sea continua en $x = 3$ se requiere que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$, esto es, que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = d.$$

Se sabe que

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} d = d$$

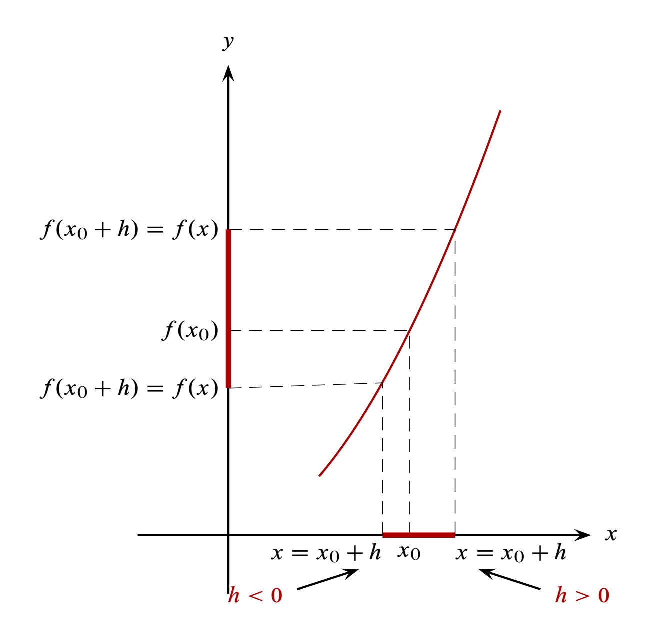
así como también que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (4 + \sqrt{x^2 + 7}) = 8.$$

Luego, $f(x)$ será continua en $x = 3$ si $d = 8$. □

Otra notación para la continuidad

- Es usual hacer $x = x_0 + h$ o bien $h = x - x_0$.



Nótese que x está cerca de x_0 $\Leftrightarrow$ h está cerca de 0.

Entonces la continuidad de la función f en el punto x_0 ocurre si:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ o bien si}$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)\,.$$

Ejemplo 4.1.9 *Utilizando la igualdad* $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, *verificar la continuidad de* $f(x) = 2x^3 - 3x - 4$ *en* $x_0 = -2$.

▼ Tenemos:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2) - 4 = \\ &= 2(-8) + 6 - 4 = -16 + 6 - 4 = -14\,; \\ f(x_0 + h) &= f(-2 + h) = f(h - 2) = 2(h - 2)^3 - 3(h - 2) - 4 = \\ &= 2(h^3 - 6h^2 + 12h - 8) - 3(h - 2) - 4 = \\ &= 2h^3 - 12h^2 + 24h - 16 - 3h + 6 - 4 = \\ &= 2h^3 - 12h^2 + 21h - 14\,. \end{aligned}$$

Vemos que

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0}(2h^3 - 12h^2 + 21h - 14) = -14 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)\,.$$

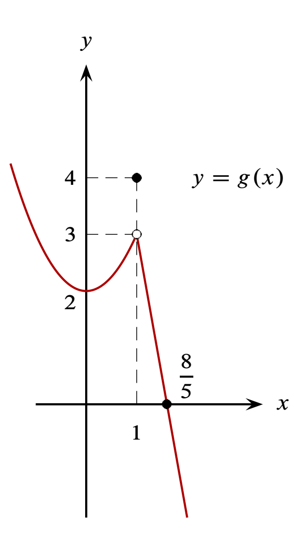
Entonces f es continua en $x_0 = -2$.

□

Ejemplo 4.1.10 *Dada la función* $g(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x < 1; \\ 4 & \text{si } x = 1; \\ 8-5x & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$

Utilizar la igualdad $\lim\limits_{h \to 0} g(x_0 + h) = g(x_0)$ *para mostrar que* g *no es continua en* $x_0 = 1$.

▼ La gráfica de g es:



$g(x_0) = g(1) = 4$.

Para calcular $\lim\limits_{h \to 0} g(x_0 + h)$ debemos notar que

$$h \to 0^- \;\Rightarrow\; h < 0 \;\Rightarrow\; x_0 + h < x_0 \;\Rightarrow\; x = 1 + h < 1 \;\Rightarrow\; g(x) = x^2 + 2;$$
$$h \to 0^+ \;\Rightarrow\; h > 0 \;\Rightarrow\; x_0 + h > x_0 \;\Rightarrow\; x = 1 + h > 1 \;\Rightarrow\; g(x) = 8 - 5x\,.$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h \to 0^-} g(x_0 + h) = \lim\limits_{h \to 0^-} g(1 + h) = \lim\limits_{h \to 0}[(1 + h)^2 + 2] = 1^2 + 2 = 3; \\ \lim\limits_{h \to 0^+} g(x_0 + h) = \lim\limits_{h \to 0^+} g(1 + h) = \lim\limits_{h \to 0}[8 - 5(1 + h)] = 8 - 5(1) = 3\,. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^-} g(x_0 + h) = 3 = \lim_{h \to 0^+} g(x_0 + h) \;\Rightarrow\; \lim_{h \to 0} g(x_0 + h) = 3\,;$$

y debido a que $g(x_0) = 4$:

$$\lim_{h \to 0} g(x_0 + h) \neq g(x_0)\,.$$

Por lo tanto no se cumple la igualdad $\lim\limits_{h \to 0} g(x_0 + h) = g(x_0)$, lo que permite afirmar que la función g no es continua en $x_0 = 1$.

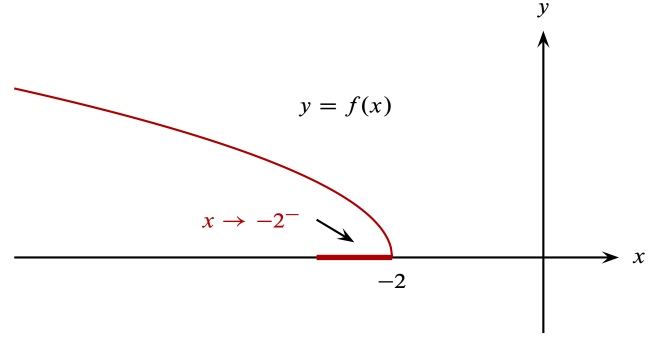
□

Continuidad lateral

- Una función es continua por la izquierda en x_0 si $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Una función es continua por la derecha en x_0 si $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- De aquí que una función sea continua en un punto x_0 si y solamente si es continua por la izquierda y por la derecha en x_0.

Ejemplo 4.1.11 *Sea la función* $f(x) = \sqrt{-2 - x}$.

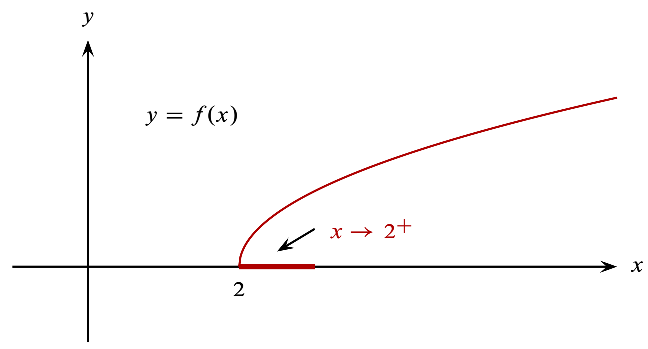
▼ Su dominio es $D_f = (-\infty, -2]$.
Se tiene $\displaystyle\lim_{x \to -2^-} f(x) = 0 = f(-2)$. Esto es, f es continua por la izquierda en $x_0 = -2$.



□

Ejemplo 4.1.12 *Sea la función* $f(x) = \sqrt{-2 + x}$.

▼ Su dominio es $D_f = [2, +\infty)$.
Se obtiene $\displaystyle\lim_{x \to 2t'^+} f(x) = 0 = f(2)$. Esto es f es continua por la derecha en $x_0 = 2$.



□

Ejemplo 4.1.13

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < \dfrac{2}{3}; \\ 4 & \text{si } x = \dfrac{2}{3}; \\ 9 - 6x & \text{si } x > \dfrac{2}{3}. \end{cases}$

1. *¿Es f continua por la izquierda en $x_0 = \dfrac{2}{3}$?*

2. *¿Es f continua por la derecha en $x_0 = \dfrac{2}{3}$?*

3. *¿Es f continua en $x_0 = \dfrac{2}{3}$?*

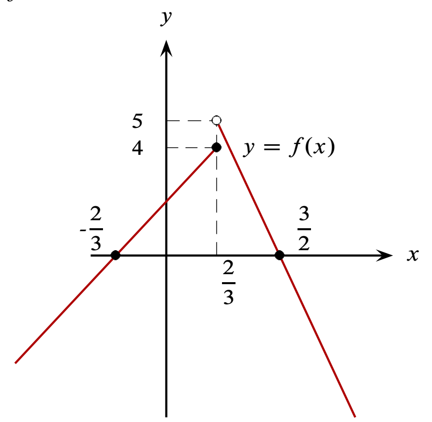
▼ Notamos que $f(x) = 4$ si $x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 4$.

1. $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} (3x + 2) = 3\left(\dfrac{2}{3}\right) + 2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^-} f(x) = f\left(\dfrac{2}{3}\right) \Rightarrow f$ es continua por la izquierda en $x_0 = \dfrac{2}{3}$.

2. $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} (9 - 6x) = 9 - 6\left(\dfrac{2}{3}\right) = 9 - 4 = 5 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^+} f(x) \neq f\left(\dfrac{2}{3}\right) \Rightarrow f$ no es continua por la derecha en $x_0 = \dfrac{2}{3}$.

3. Por no ser f continua por la derecha en $x_0 = \dfrac{2}{3}$, se comprueba que f no es continua en $x_0 = \dfrac{2}{3}$.

Lo anterior se ve en la gráfica de f:



□

Ejemplo 4.1.14 *Dada la función $g(x) = \sqrt{x - 5}$.*

1. *¿Es g continua por la izquierda en x_0=5?*

2. *¿Es g continua por la derecha en $x_0 = 5$?*

3. *¿Es g continua en $x_0 = 5$?*

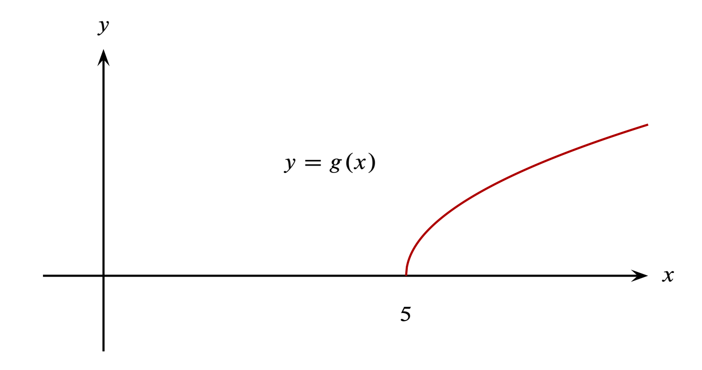
▼ Notamos que el dominio de g es

$$D_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid x - 5 \geq 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5 \} = [5, +\infty)$$

y además que $g(5) = \sqrt{5-5} = 0$.

1. Ya que $D_g = [5, +\infty)$, entonces g no está definida para $x < 5$. Por lo tanto no tiene sentido hablar de continuidad para g por la izquierda en $x_0 = 5$.

   Ésta es la gráfica de g:



2. Ya que $D_g = [5, +\infty)$, entonces g sí esta definida para $x \geq 5$. Ahora sí,

$$\lim_{x\to 5^+} g(x) = \lim_{x\to 5^+} \sqrt{x-5} = \sqrt{\lim_{x\to 5^+}(x-5)} = \sqrt{5-5} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 5^+} g(x) = g(5) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g \text{ es continua por la derecha en } x_0 = 5.$$

3. Por no ser g continua por la izquierda en $x_0 = 5$, sucede que g no es continua en $x_0 = 5$.

□

Ejemplo 4.1.15 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + a & \text{si } x < -1; \\ 1 & \text{si } x = -1; \\ \sqrt{k - 2x} & \text{si } x > -1. \end{cases}$

Determinar los valores de las constantes a, k que aseguren la continuidad de f en $x_0 = -1$.

▼ Para lograr la continuidad de f en $x_0 = -1$ debemos asegurar la continuidad por la izquierda así como por la derecha en $x_0 = -1$.

1. Continuidad por la izquierda.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow \lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x} + a\right) = 1 \Leftrightarrow -1 + a = 1 \Leftrightarrow a = 2.$$

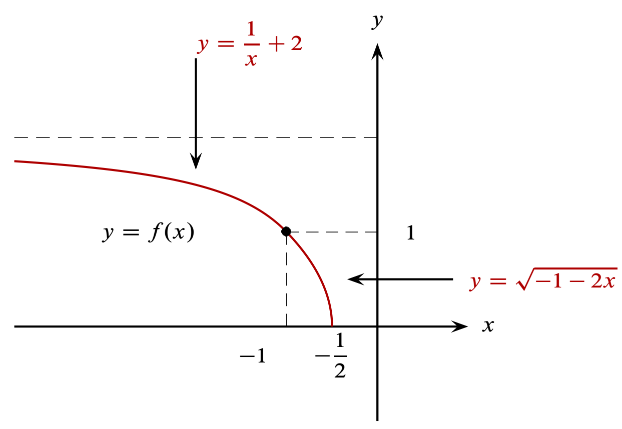
2. Continuidad por la derecha.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow \lim_{x\to -1}(\sqrt{k-2x}) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{k+2} = 1 \Leftrightarrow k + 2 = 1 \Leftrightarrow k = -1.$$

Luego f es continua en $x_0 = -1$ si y sólo si

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \,\&\, \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \;\Leftrightarrow\; a = 2 \,\&\, k = -1\,.$$

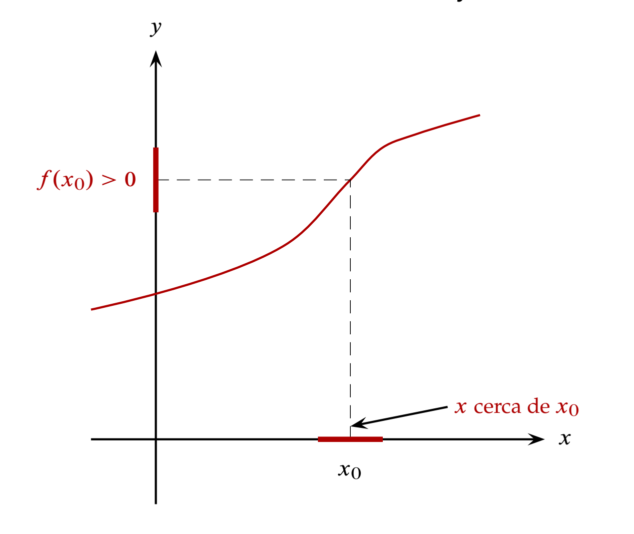
La gráfica de f con estos valores es:

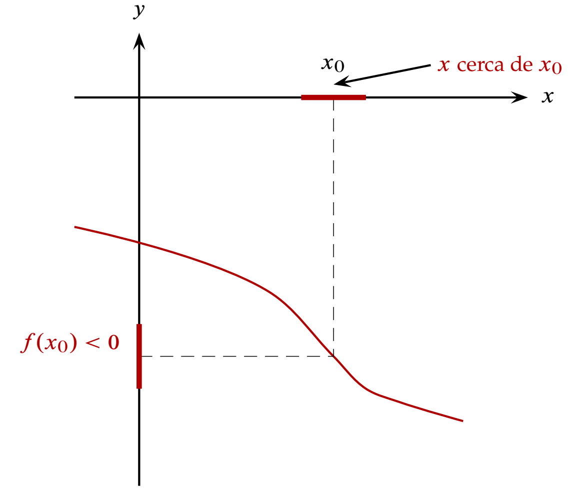


□

Como en la definición de continuidad aparece el límite de una función, todos los resultados anunciados para los límites generan resultados para las funciones continuas, por ejemplo:

- Si $f(x)$ es continua en x_0 y si $f(x_0) > 0$, entonces $f(x) > 0$ cuando x está cerca de x_0.
- Si $f(x)$ es continua en x_0 y si $f(x_0) < 0$, entonces $f(x) < 0$ cuando x está cerca de x_0.





Álgebra de funciones continuas

- La suma, diferencia, producto y cociente de funciones continuas en un punto x_0 es continua en dicho punto, exceptuando en el caso del cociente si x_0 es un cero o raíz del denominador.

Continuidad de la composición de funciones continuas

- Si la función f es continua en x_0 y la función g es continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0.

Ejercicios 4.1.1 *Soluciones en la página 22*

1. Considere la función
$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 - a & \text{si } x < 1\,; \\ b & \text{si } x = 1\,; \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$
Determinar los valores de a, b para que la función sea continua en $x = 1$.

2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto -4. Se define $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(2x-10) + \dfrac{x^2-2}{x+3}$. ¿Es g continua en $a = 3$? Diga por qué.

3. Dada la siguiente función
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 7 & \text{si } x < -2; \\ ax^2 - 3 & \text{si } -2 \le x < 2; \\ b & \text{si } x = 2; \\ -x + 7 & \text{si } 2 < x. \end{cases}$$
   a. Determinar los valores de las constantes a, b que hacen de f una función continua en $x = 2$.
   b. Reescriba la función f con los valores calculados de a, b. Estudie la continuidad o discontinuidad de f en $x = -2$.

4. Considere la función
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4\,|\,x\,|} & \text{si } x < 0; \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = 0; \\ \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x} & \text{si } x > 0\,, \end{cases}$$
y estudie su continuidad en $x = 0$.

5. Determinar los valores de a, b para que la siguiente función sea continua en $x = 0$ y en $x = 3$.
$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 0; \\ \dfrac{4-\sqrt{4x+4}}{x^2-2x-3} & \text{si } x \ge 0 \;\&\; x \ne 3; \\ b & \text{si } x = 3\,. \end{cases}$$

6. Calcule los valores de a & b de modo que la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1; \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \leq x < 2; \\ 3x & \text{si } x \geq 2\,, \end{cases}$$

sea continua en $x = 1$ y en $x = 2$.

7. Calcule los valores de a & b que hacen continua a la siguiente función en $x = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < -1; \\ a & \text{si } x = -1; \\ bx^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2\,. \end{cases}$$

8. Considere la función $g(x) = (x - 1)f(x)$ con $0 \leq x \leq 2$, donde f es la función máximo entero. Decida, señalando claramente sus argumentos, si g es continua o no en $x = 1$.

9. Determinar los valores de las constantes a, b & c que hacen continua en todo su dominio la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2; \\ ax^2 + b & \text{si } -2 \leq x < 1; \\ c & \text{si } x = 1; \\ 1 - x & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

10. Dada la función $f(x) = \dfrac{3x^3 + 14x^2 - 27x + 4}{3x - 4}$, encuentre el punto donde esa función no es continua.

    ¿Cómo definiría la función en ese punto para que ésta resultase continua?

11. Determine los valores de las constantes c & k que hacen continua la función en $x = 1$ y en $x = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1; \\ cx + k & \text{si } 1 < x < 4; \\ -2x & \text{si } 4 \leq x. \end{cases}$$

    Dar un bosquejo de la gráfica de esa función con los valores encontrados.

12. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & \text{si } x \leq -1; \\ 2ax + b & \text{si } -1 < x \leq 2; \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si } 2 < x\,. \end{cases}$$

    a. Encontrar los valores de a, b para que la función sea continua en $x = -1$ y en $x = 2$.
    b. Graficar la función con los valores encontrados.

13. Determine los valores de a, b para que la siguiente función sea continua en $x = -3$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = -3; \\ 9 - x^2 & \text{si } x \neq \pm 3; \\ b & \text{si } x = 3. \end{cases}$$

14. Determine los valores a, b para que la función $f(x)$ sea continua en $x = -2$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x \leq -2; \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 < x \leq 3; \\ x - b & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

15. Una legislación estatal sobre impuestos establece un impuesto exigible de 12% sobre los primeros \$20 000 de ganancias gravables y de 16% sobre el resto de las ganancias.
Calcular los valores de las constantes A y B para que la función de impuestos $T(x)$ sea continua para toda x.

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0; \\ A + 0.12x & \text{si } 0 < x \leq 20\,000; \\ B + 0.16(x - 20\,000) & \text{si } x > 20\,000. \end{cases}$$

16. Calcule los valores de a, b que hacen que la siguiente función sea continua en $x = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{2x} & \text{si } x < -1; \\ b & \text{si } x = -1; \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2. \end{cases}$$

17. a. Hallar los valores de las constantes a, b de modo que la siguiente función sea continua en $x = -1$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1; \\ ax + b & \text{si } -1 < x < 3; \\ -2 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

    b. Dibujar la gráfica de f con los valores obtenidos.

18. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 1} & \text{si } x < -2; \\ -ax + 2b & \text{si } |x| \leq 2; \\ 3 - x^2 & \text{si } x > 2\,. \end{cases}$$

    a. Encuentre valores de a, b para que esa función sea continua en $x = -2$ y en $x = 2$.
    b. Dar un bosquejo de la gráfica con estos valores.

19. Considere la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-\sqrt{40-12x}}{3x^2+x-14} & \text{si } |\,x\,|\leq 3, x\neq 2, x\neq -\dfrac{7}{3};\\ a & \text{si } x=2\,.\end{cases}$$

¿Para qué valores de a la función es continua en $x=2$?

20. Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}mx-n & \text{si } x<1;\\ 5 & \text{si } x=1;\\ 2mx+n & \text{si } x>1.\end{cases}$$

a. Encontrar los valores de m y de n de modo que la función sea continua en $x=1$. b. Graficar la función continua obtenida.

21. Sea la función

$$g(x)=\begin{cases}ax^2+1 & \text{si } x<-1;\\ c & \text{si } x\in[-1,1];\\ x+2 & \text{si } x>1\,.\end{cases}$$

a. Encontrar los valores de a & c que hacen que la función g sea continua en los puntos donde $|\,x\,|=1$.
b. Dar un bosquejo de la gráfica de g con los valores encontrados.

22. Sea la función

$$g(t)=\begin{cases}3 & \text{si } t\leq -1;\\ at^2+bt+1 & \text{si } -1<t<2;\\ \frac{3}{2}t & \text{si } t\geq 2\,.\end{cases}$$

a. Encontrar las valores de a, b para que la función g sea continua en $x=-1$ y en $x=2$.
b. Con los valores encontrados, gráficar la función.

Ejercicios 4.1.1 *Continuidad en un punto, página 18*

1. $a = \dfrac{1}{8}$; $b = \dfrac{23}{8}$.

2. g es continua en 3;

   la composición $f(2x - 10)$ es continua en $x = 3$.

3. a. $a = 2$; $b = 5$;

   b. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 7 & \text{si } x < -2; \\ 2x^2 - 3 & \text{si } -2 \le x < 2; \\ 5 & \text{si } x = 2; \\ -x + 7 & \text{si } 2 < x; \end{cases}$

   f no es continua en $x = -2$;

   en $x = -2$ f tiene una discontinuidad esencial de salto .

4. g es una función continua para $x < 0$;

   g es una función continua para $x > 0$;

   g es discontinua en $x = 0$.

5. $a = -\dfrac{2}{3}$; $b = -\dfrac{1}{8}$.

6. $a = \dfrac{4}{3}$; $b = \dfrac{2}{3}$.

7. $a = -5$; $b = -6$.

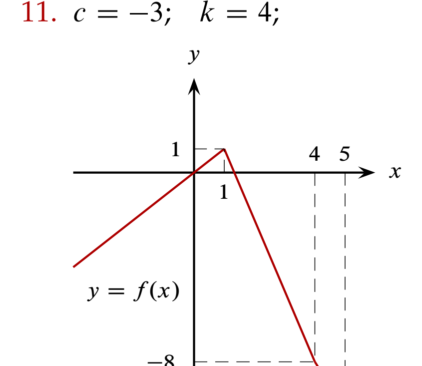
8. La función $g(x)$ es continua en $x = 1$.

9. $a = -1$; $b = 1$; $c = 0$.

10. $f(x)$ es continua excepto en $x = \dfrac{4}{3}$;

    definiendo $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{79}{9}$, $f(x)$ resultaría continua en $x = \dfrac{4}{3}$.

11. $c = -3$; $k = 4$;



12.

   a. $a = -\dfrac{1}{6}$; $b = \dfrac{2}{3}$;

   b.

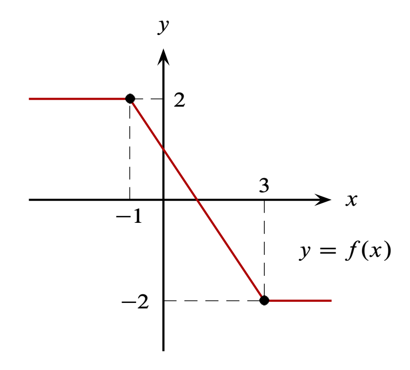
13. $a = 0$; $b = 0$.

14. $a = -1$; $b = -5$.

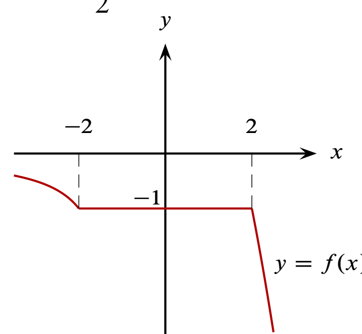
15. $A = 0$; $B = 2\,400$.

16. $a = -4$; $b = 2$.

17. $a = -1$; $b = 1$.

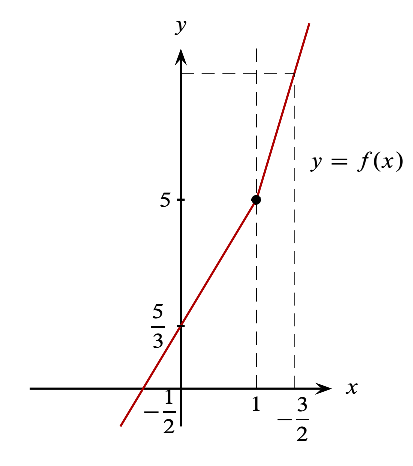


18. $b = -\dfrac{1}{2}$; $\quad a = 0.$

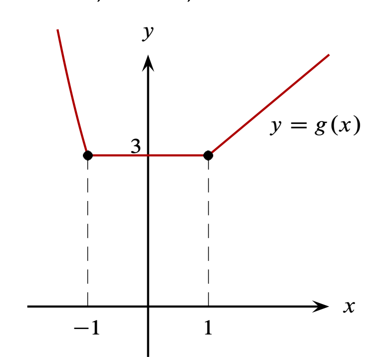


19. $\dfrac{7}{26} = f(2) = a\,.$

20. $m = \dfrac{10}{3}$ & $n = -\dfrac{5}{3}.$

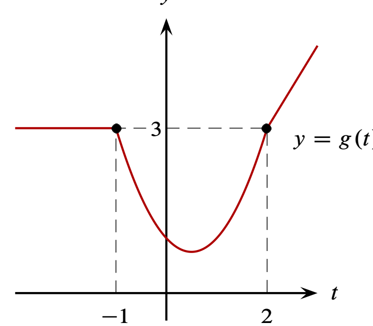


21. $c = 3; a = 2\,;$



22. a. $a = 1; b = -1\,;$

b.



CAPÍTULO

4

Continuidad

[1]

4.2 Tipos de discontinuidades

De una función que no es continua en un punto se dice que es discontinua en dicho punto.

Vamos a clasificar las discontinuidades de una función.

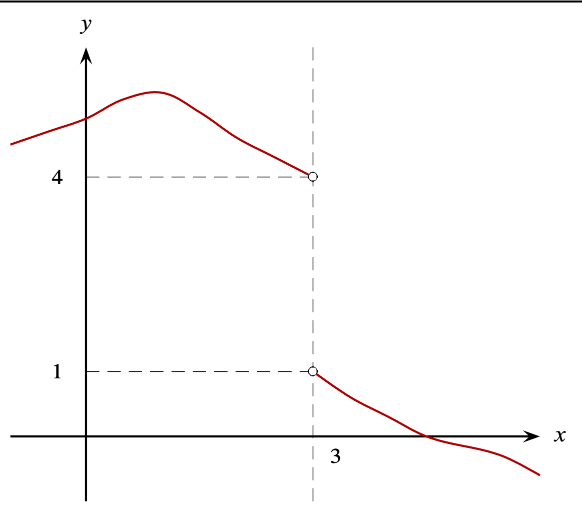
- Discontinuidad esencial: una función f tiene una discontinuidad esencial en x_0 si no existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

  Una discontinuidad esencial puede ser de salto o infinita.

  1. Discontinuidad esencial de salto: cuando existen $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, pero son diferentes.

     Ejemplo 4.2.1 *En la siguiente gráfica, existe una discontinuidad esencial de salto en* $x = 3$.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



▼ En efecto:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 4 \neq 1 = \lim_{x \to 3^+} f(x)\,.$$

□

2. Discontinuidad esencial infinita: cuando se cumple al menos uno de los límites siguientes:

a. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$;

b. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$;

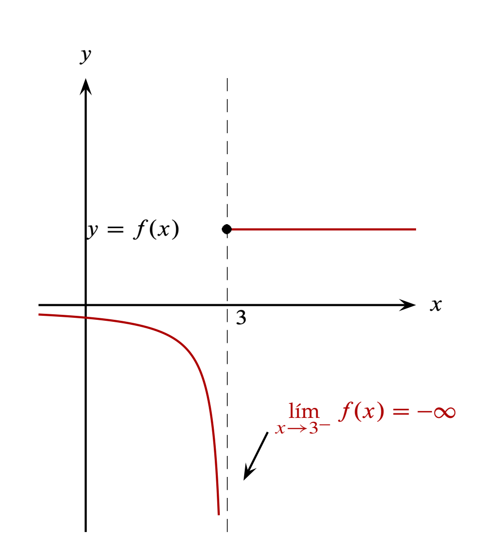
c. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$;

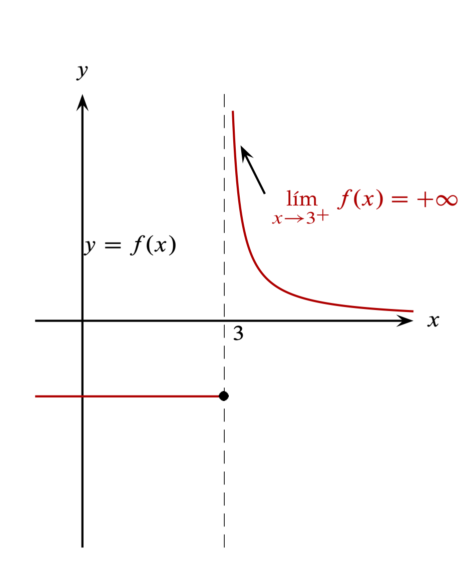
d. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

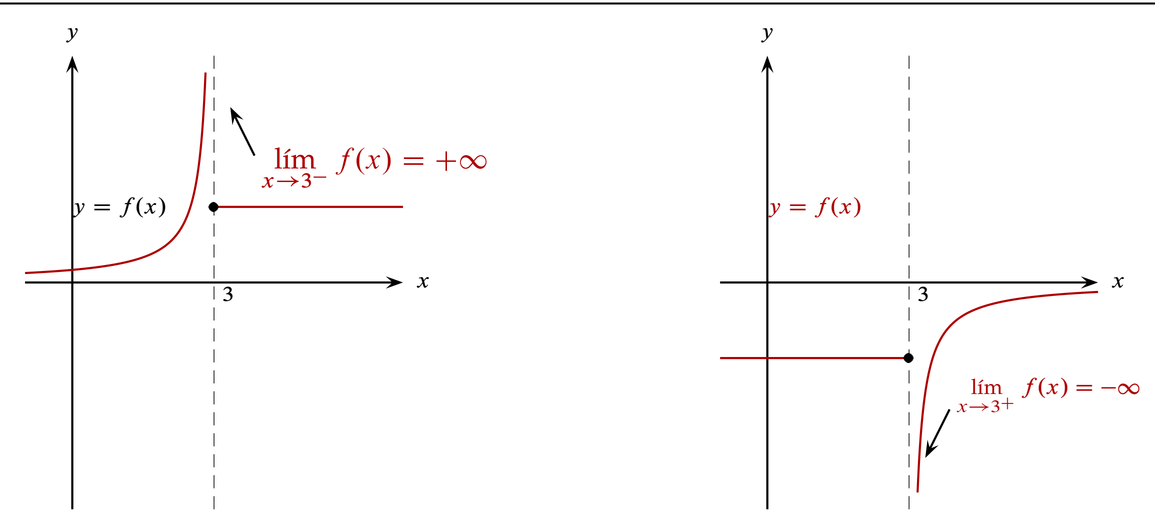
Ejemplo 4.2.2

Cuatro ejemplos de discontinuidad esencial infinita:

▼





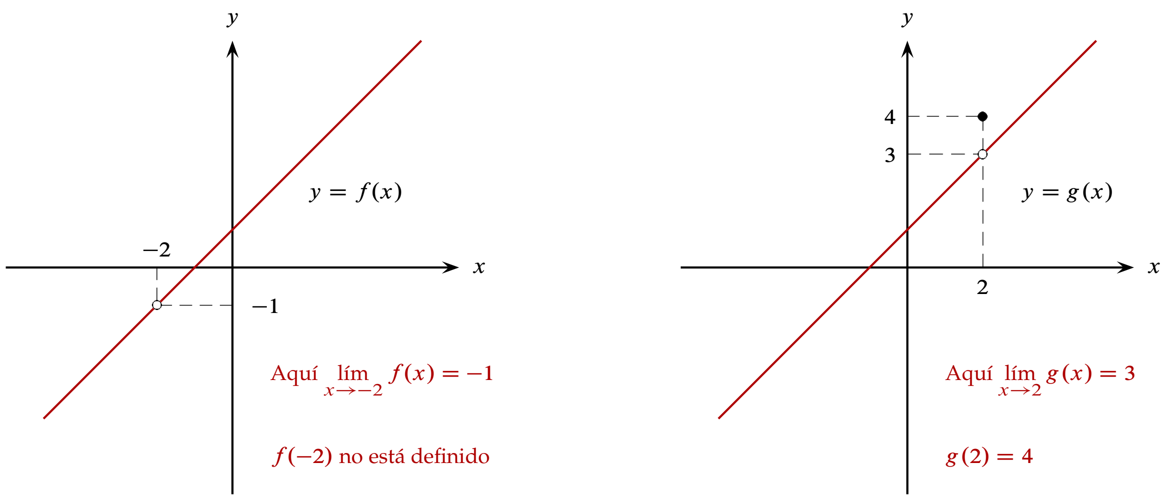


□

- Discontinuidades removibles o evitables: una función f tiene una discontinuidad removible o evitable en x_0 si existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$, pero o bien no es igual a $f(x_0)$, o bien f no está definida en x_0.

  En ambos casos si redefiniésemos $f(x_0)$ o definiésemos $f(x_0)$ como el valor de $\lim_{x \to x_0} f(x)$, la función f resultaría continua en x_0.

Ejemplo 4.2.3 *¿Cómo habría que definir f en $x = -2$ y redefinir g en $x = 2$ para que ambas funciones resultasen continuas en -2 y 2 respectivamente?*



▼ Claramente si definimos $f(-2) = -1$ y redefinimos $g(2) = 3$, las funciones f & g resultarían continuas en $x = -2$ y en $x = 2$ respectivamente.

□

Ejemplo 4.2.4 *La función $f(x) = \dfrac{2x + 6}{x^2 - 9}$ no está definida en $x = -3$ ni en $x = 3$, por lo cual es discontinua en dichos puntos.*

1. *¿Qué tipo de discontinuidad tiene f en $x_0 = -3$?*

2. *¿Qué tipo de discontinuidad tiene f en $x_0 = 3$?*

▼

1. Para decidir qué tipo de discontinuidad tiene f en $x_0 = -3$, debemos investigar la existencia de $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{2x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \to -3} \frac{2(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \lim_{x \to -3} \frac{2}{x - 3} =$$
$$= \frac{2}{-3 - 3} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to -3} f(x) \text{ sí existe.}$$

Entonces la discontinuidad que tiene f en $x_0 = -3$ es removible o evitable.

En esta discontinuidad observamos que $f(-3)$ no existe y que $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -\frac{1}{3}$. Podemos entonces remover o evitar esta discontinuidad definiendo l función f en $x_0 = -3$ como $f(-3) = -\frac{1}{3}$.

2. Para decidir qué tipo de discontinuidad tiene f en $x_0 = 3$, debemos investigar la existencia de $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{2x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{2}{x - 3}\,.$$

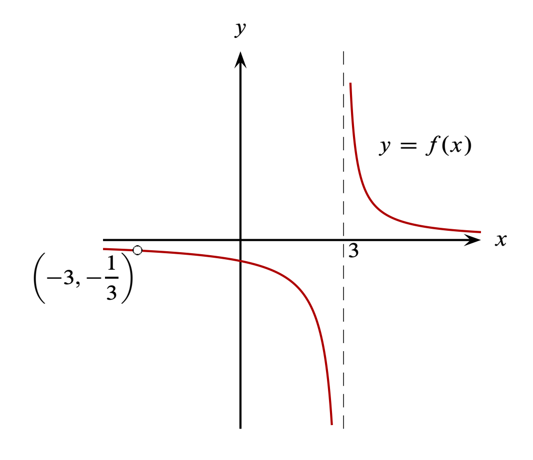
Por el lado izquierdo tenemos:

$$x \to 3^- \Rightarrow x - 3 \to 0 \;\&\; x < 3 \Rightarrow x - 3 \to 0 \;\&\; x - 3 < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - 3 \to 0^- \Rightarrow \frac{2}{x - 3} \to -\infty \Rightarrow \lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty\,.$$

Entonces la discontinuidad que tiene f en $x_0 = 3$ es esencial infinita.

Por el lado derecho, tenemos también:

$$x \to 3^+ \Rightarrow x - 3 \to 0 \;\&\; x > 3 \Rightarrow x - 3 \to 0 \;\&\; x - 3 > 0 \Rightarrow x - 3 \to 0^+ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2}{x - 3} \to +\infty \Rightarrow \lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty\,.$$



□

Ejemplo 4.2.5 *Dada la función* $g(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x < -2; \\ \dfrac{x}{|\,x\,|} & \text{si } |\,x\,| < 2 \text{ y si } x \neq 0; \\ 3 - x & \text{si } x \geq 2\,. \end{cases}$

Analizar la continuidad o discontinuidad en $x_0 = -2$, $x_0 = 0$ *y en* $x_0 = 2$. *Si existe discontinuidad en alguno de esos puntos, indicar su tipo.*

▼ Debemos indagar la existencia de $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

1. En $x_0 = -2$, $g(x)$ no está definida, por lo cual g es discontinua en $x_0 = -2$. Además,

$$\lim_{x \to -2^-} g(x) = \lim_{x \to -2}(x^2 - 5) = (-2)^2 - 5 = 4 - 5 = -1;$$

$$\lim_{x \to -2^+} g(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x}{|\,x\,|} = \frac{-2}{|-2|} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2^-} g(x) = -1 = \lim_{x \to -2^+} g(x) \Rightarrow \lim_{x \to -2} g(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \to -2} g(x) \text{ sí existe.}$$

Luego g tiene en $x_0 = -2$ una discontinuidad removible o evitable.

2. En $x_1 = 0$ tampoco está definida $g(x)$ por lo que g es discontinua en $x_1 = 0$. Además

$$x \to 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |\,x\,| = -x \Rightarrow \frac{x}{|\,x\,|} = \frac{x}{-x} = -1;$$

$$x \to 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |\,x\,| = x \Rightarrow \frac{x}{|\,x\,|} = \frac{x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|\,x\,|} = \lim_{x \to 0} -1 = -1;$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|\,x\,|} = \lim_{x \to 0} 1 = 1;$$

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) \neq \lim_{x \to 0^+} g(x) \Rightarrow \lim_{x \to 0} g(x) \text{ no existe.}$$

Entonces, g tiene en $x_1 = 0$ una discontinuidad esencial de salto.

3. En $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x}{|\,x\,|} = \frac{2}{|\,2\,|} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2}(3 - x) = 3 - 2 = 1;$$

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 1 = \lim_{x \to 2^+} g(x) \Rightarrow \lim_{x \to 2} g(x) = 1\,.$$

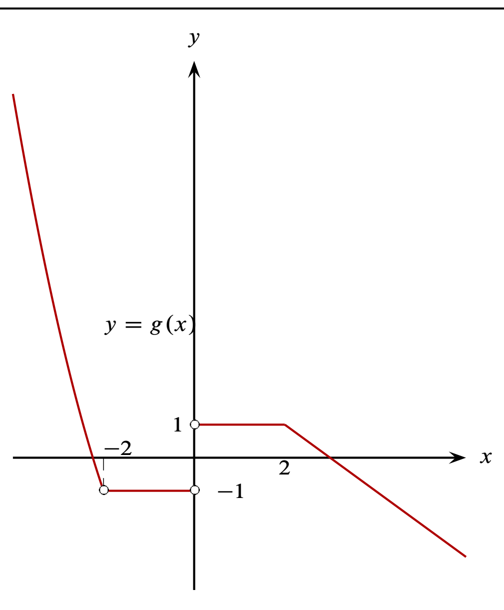
Pero, notando que $g(x) = 3 - x$ para $x \geq 2$, podemos afirmar que $g(2) = 3 - 2 = 1$.

Entonces

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 1 = g(2) \Rightarrow g \text{ es continua en } x_0 = 2\,.$$

Por lo tanto no hay discontinuidad en $x_0 = 2$.

Ésta es la gráfica de g:



□

Ejercicios 4.2.1 *Soluciones en la página 10*

1. Bosqueje la gráfica de una función f que cumpla las siguientes condiciones:

   a. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$;

   b. $\lim_{x\to3^-} f(x) = +\infty$;

   c. $f(1) = 0$;

   d. $\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$;

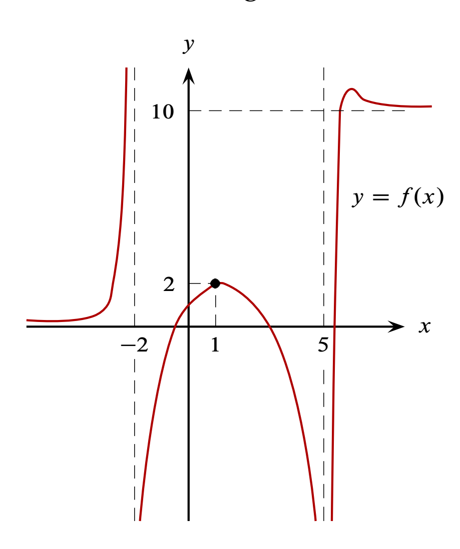
   e. $\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty$;

   f. $f(x)$ tiene discontinuidad removible en $x = 1$;

   g. $\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$;

   h. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$.

2. Considere la gráfica de la función f dada en la figura



De la gráfica determine los siguientes límites:

a. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$;

b. $\displaystyle\lim_{x\to 5^-} f(x)$;

c. $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$;

d. $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} f(x)$;

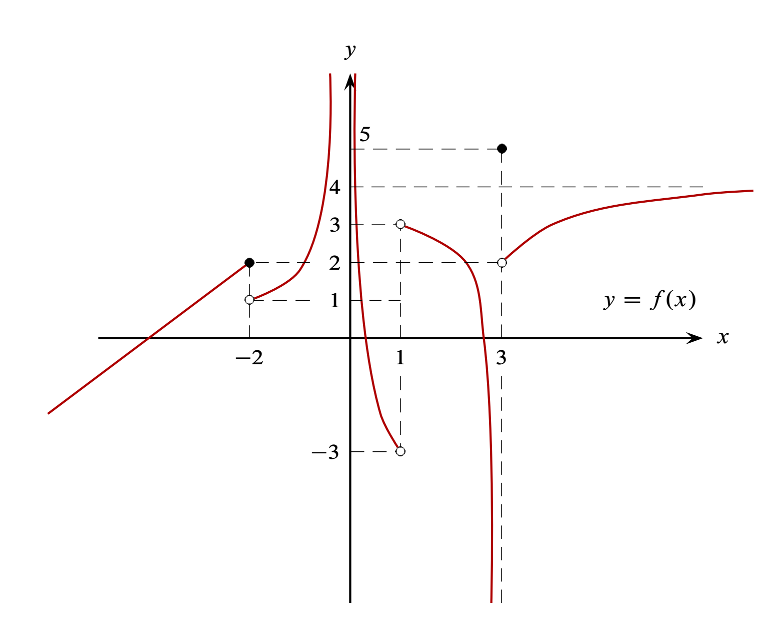
e. $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} f(x)$;

f. $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} f(x)$;

g. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Clasifique las discontinuidades.

3. La función f tiene la gráfica siguiente:



a. De la gráfica obtener

i. $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} f(x)$;

ii. $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} f(x)$;

iii. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)$;

iv. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$;

v. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$;

vi. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)$;

vii. $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x)$;

viii. $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x)$;

ix. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$;

x. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Del inciso anterior clasifique las discontinuidades de la función y escriba las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

4. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 1; \\ 4 & \text{si } x = 1; \\ x^2-2 & \text{si } 1 < x \le 2; \\ 3 & \text{si } 2 < x\,. \end{cases}$$

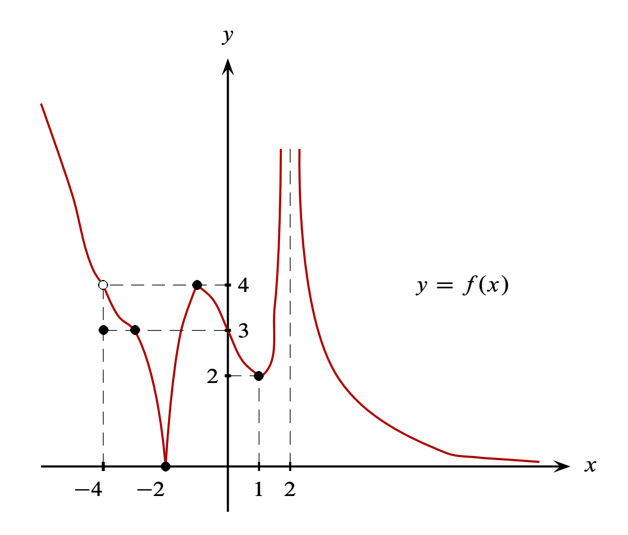
Analizar los tipos de discontinuidades en $x = 1$ y en $x = 2$.

5. Trace la gráfica de una función f que tenga una discontinuidad removible en $x = -2$ y que además satisfaga las condiciones siguientes:

a. $f(0) = 3$;
b. $f(4) = 0$;
c. $f(6) = 0$;
d. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$;
e. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$;
f. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$;
g. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

6. A partir de la gráfica de f, determine:

   a. Los puntos de discontinuidad y su clasificación.
   b. Las ecuaciones de las asíntotas verticales y las ecuaciones de las asíntotas horizontales.



7. Bosqueje una posible gráfica de una función f que cumpla con las siguientes condiciones:

   a. $f(x) = 1$ si $4 < x < 6$;
   b. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$;
   c. $f(-2) = 0$;
   d. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$;
   e. $\lim_{x\to 6} f(x) = 1$.

   Señale los puntos de discontinuidad esencial.

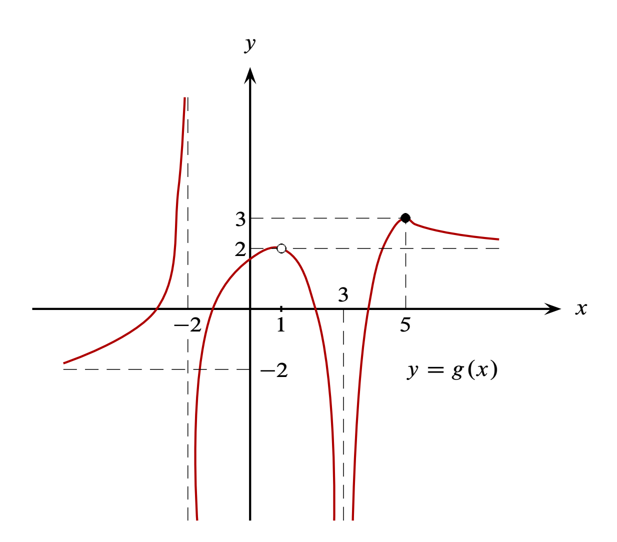
8. Si $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$, ¿qué tipo de discontinuidad hay en $x = 0$?; ¿esencial?; ¿removible? Justifique su respuesta.

9. Sea $(-\infty, 4) - \{-4\}$ el dominio de una función f. Trace una posible gráfica esa función que cumpla con las condiciones siguientes:

   a. Los puntos $(-3, 2)$, $(-5, 0)$, $(1, 0)$ & $(3, 0)$ están en su gráfica.
   b. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.
   c. $\lim_{x\to -4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -4^+} f(x) = +\infty$.
   d. $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -2$.

   A partir de la gráfica, determine y clasifique los puntos de discontinuidad de la función f.

10. A partir de la gráfica de la función g que observamos a continuación



determine:

a. $\lim\limits_{x \to -2^-} g(x)$;

b. $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x)$;

c. $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$;

d. $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$;

e. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$;

f. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Puntos de discontinuidad y su clasificación.

Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

11. Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8}.$$

Encontrar y clasificar las discontinuidades. Determinar las asíntotas verticales y horizontales.

12. Dada $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x^2 + 4x - 5}$, obtener:

a. Puntos de discontinuidad y su clasificación

b. Asíntotas verticales y horizontales.

c. Esbozo de la gráfica.

13. Dibujar la gráfica posible de función f que cumpla las condiciones siguientes:

a. $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$;

b. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty$;

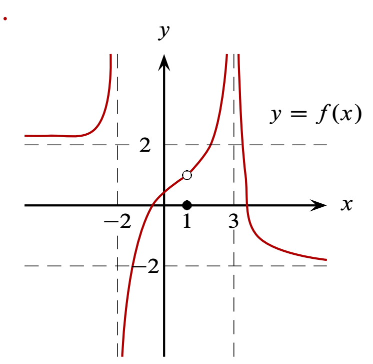
c. $f(x)$ tiene una discontinuidad removible en $x = 0$;

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$;

e. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$.

Ejercicios 4.2.1 *Tipos de discontinuidades, página 6*

1.



2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$;

   $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$;

   $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$;

   $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$;

   $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = -\infty$;

   dos discontinuidades esenciales (infinitas) en:

   $x = -2$ y en $x = 5$;

   $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$;

   $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

3. a. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 1$;

   $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$;

   $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$;

   $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$;

   $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 4$;

   b. En $x = -2$ y en $x = 1$ hay discontinuidad de salto, esencial;

   en $x = 0$ hay una discontinuidad infinita;

   en $x = 3$ hay una discontinuidad esencial, infinita;

   $y = 4$ es asíntota horizontal;

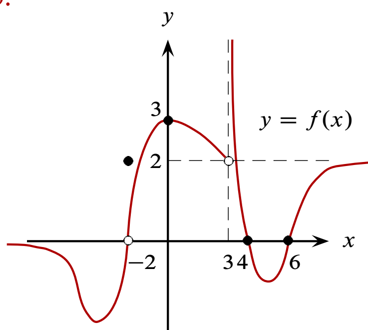
   $x = 0$ es asíntota vertical;

   $x = 3$ es asíntota vertical.

4. En $x = 1$ la función $g(x)$ tiene una discontinuidad removible;

   en $x = 2$ la función $g(x)$ tiene una discontinuidad esencial, de salto.

5.



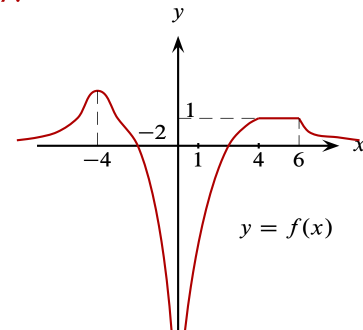
6. a. $f(x)$ tiene discontinuidad removible en $x = -4$;

   $f(x)$ es discontinua en $x = 2$ (discontinuidad infinita);

   b. $x = 2$ es la única asíntota vertical;

   $y = 0$ la única asíntota horizontal.

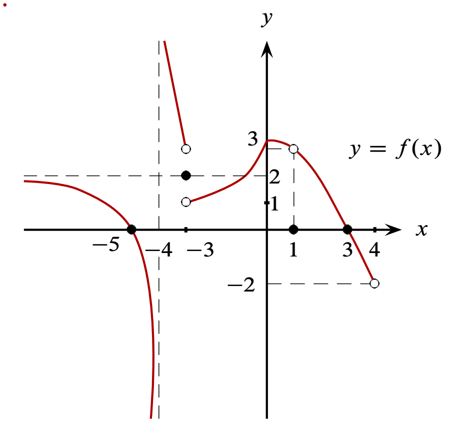
7.



   En $x = 0$ hay una discontinuidad infinita (esencial).

8. Si definimos $f(0) = 2$, f resultaría continua en 0, por lo que la discontinuidad es removible.

9.



f tiene discontinuidades en:

$x = -4$, que es infinita;

$x = -3$, que es esencial;

$x = 1$, que es removible .

10. $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ no existe ;

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -2$;

$\lim\limits_{x\to \infty} g(x) = 2$;

discontinuidades esenciales en $x = -2$ & $x = 3$;

discontinuidad removible en $x = 1$;

asíntotas verticales: las rectas $x = -2$ & $x = 3$;

asíntotas horizontales: las rectas $y = -2$ & $y = 2$,.

11. f es discontinua en $x = -4$ y en $x = 2$;

f tiene en $x = -4$ una discontinuidad removible;

f tiene en $x = 2$ una discontinuidad esencial;

$x = 2$ es una asíntota vertical de f y es la única;

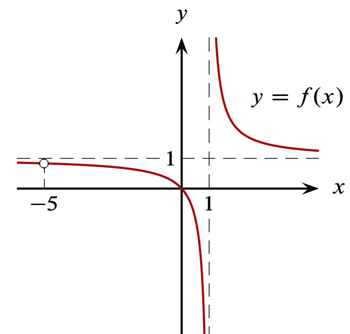
$y = 1$ es una asíntota horizontal y es la única.

12. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-5, 1\}$, donde f es continua; la discontinuidad en $x = -5$ es removible; la discontinuidad en $x = 1$ es esencial infinita;

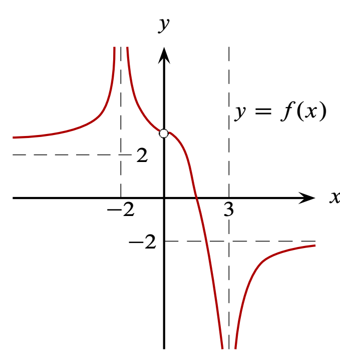
b. $x = 1$ es asíntota vertical;

$y = 1$ es asíntota horizontal.

c.



13.



CAPÍTULO

4

Continuidad

[1]

4.3 Continuidad en intervalos

- Una función es continua en un conjunto si es continua en cada punto del conjunto. Entonces, una función es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en cada $x \in (a, b)$.

- Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si es continua en el intervalo abierto (a, b), si en a es continua por la derecha y si en b es continua por la izquierda, o sea que $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y que $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

- Definiciones análogas se dan para la continuidad de funciones en intervalos de la forma $[a, +\infty)$ así como $(-\infty, b]$.

Resultados muy importantes son los siguientes:

- Una función polinomial es continua en todo $\mathbb{R}$.

- Una función racional es continua en todo su dominio.

- La composición de funciones continuas es continua.

Ejemplo 4.3.1 *Obtener los intervalos de continuidad de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = x^{10} - x^6 + x^2 - 1$.

2. $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

3. $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

4. $\beta(x) = \sqrt[3]{3x - 4}$.

5. $\gamma(x) = \sqrt{-x^3}$.

6. $\delta(x) = \dfrac{\sqrt{x + 5}}{x^3 - 4x}$.

▼

1. Por ser una función polinomial, f es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$.

2. Por ser una función racional, g es continua en todo su dominio que es $D_g = \mathbb{R}$.

3. Por ser una función racional, h es continua en todo su dominio, que es

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 1 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 \neq 1 \right\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\} .$$

Es decir, h es continua en los intervalos

$$(-\infty, -1) \;,\; (-1, 1) \;\text{ y }\; (1, +\infty) \;.$$

4. Si consideramos que $\beta_1(y) = \sqrt[3]{y}$ & $\beta_2(x) = 3x - 4$, podemos afirmar que $(\beta_1 \circ \beta_2)(x) = \beta(x)$. Y debido a que β_1 & β_2 son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$, entonces β (por ser una composición de funciones continuas) es continua en todo $\mathbb{R}$.

5. El dominio de $\gamma(x) = \sqrt{-x^3}$ es

$$D_\gamma = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -x^3 \geq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^3 \leq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leq 0 \right\} .$$

La función γ es continua en $D_\gamma = (-\infty, 0]$. Puede considerarse como una composición de funciones continuas: $-x^3$ compuesta con $\sqrt{x}$.

6. El dominio de la función $\delta(x) = \dfrac{\sqrt{x + 5}}{x^3 - 4x}$ es

$$\begin{aligned} D_\delta &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x + 5 \geq 0 \;\&\; x^3 - 4x \neq 0 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq -5 \;\&\; x(x + 2)(x - 2) \neq 0 \right\} = \\ &= [-5, +\infty) - \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x(x + 2)(x - 2) = 0 \right\} = \\ &= [-5, +\infty) - \{-2, 0, 2\} . \end{aligned}$$

La función δ es continua en los intervalos

$$[-5, -2) \,,\; (-2, 0) \,,\; (0, 2) \;\text{ y }\; (2, +\infty) \;.$$

□

Ejemplo 4.3.2 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$*, obtener:*

1. *Dominio, raíces e intervalos de continuidad.*
2. *Discontinuidades y su clasificación.*
3. *Asíntotas verticales y horizontales.*
4. *Un bosquejo de la gráfica.*

▼

1. Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio. Éste es:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 4 = 0 \right\} = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 = 4 \right\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}\,.$$

Es decir, f es continua en los intervalos

$$(-\infty, -2)\,,\; (-2, 2) \text{ y } (2, +\infty)\,.$$

Raíces:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-3)}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ o bien } x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ o bien } x = 3\,.$$

Pero debido a que $x = -2 \notin D_f$, entonces $x = -2$ no puede ser raíz. Por lo tanto f tiene sólo una raíz que es $x = 3$.

2. La función f es discontinua en $x_1 = -2$ y en $x_2 = 2$.

Para clasificar estan discontinuidades debemos indagar la existencia de los límites: $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ & $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

a. En $x_1 = -2$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} =$$
$$= \lim_{x \to -2} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-2-3}{-2-2} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} f(x) = \frac{5}{4} \Rightarrow \lim_{x \to -2} f(x) \text{ sí existe.}$$

Entonces f tiene en $x_1 = -2$ una discontinuidad removible o evitable.

¿Cómo remover o evitar la discontinuidad en $x_1 = -2$?

Obtenemos que $-2 \notin D_f$ y que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \dfrac{5}{4}$. Concluimos que la curva $y = f(x)$ tiene una interrupción en el punto $\left(-2, \dfrac{5}{4}\right)$. Es decir, el punto $\left(-2, \dfrac{5}{4}\right)$ no pertenece a la curva.

La discontinuidad se remueve o se evita definiendo $f(-2) = \dfrac{5}{4}$.

b. En $x_2 = 2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x-2}\,.$$

Como $\lim_{x\to 2}(x-2) = 2-2 = 0$ & $\lim_{x\to 2}(x-3) = 2-3 = -1$, podemos asegurar que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x-2} = \text{“}\left(\frac{-1}{0^-}\right)\text{”} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x-2} = \text{“}\left(\frac{-1}{0^+}\right)\text{”} = -\infty\,.$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.

Luego, f tiene en $x_2 = 2$ una discontinuidad esencial infinita.

3. Podemos asegurar entonces que la recta $x = 2$ es una asíntota vertical y además es la única.

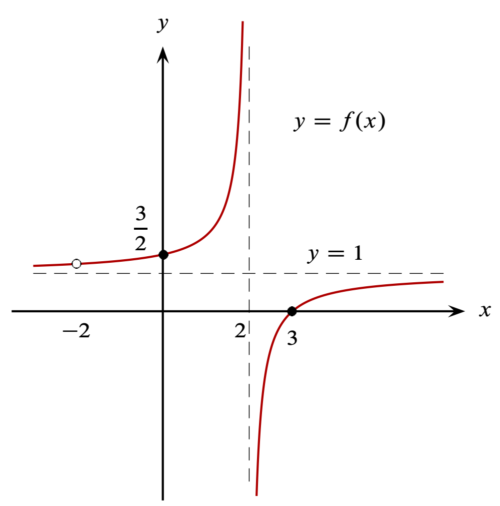
Para hallar las asíntotas horizontales calculamos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

Entonces, f tiene sólo una asíntota horizontal que es la recta $y = 1$.

4. Un bosquejo de la gráfica de f es



□

Ejemplo 4.3.3 *Dada la función*

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}\,.$$

1. *Obtenga su dominio y sus raíces.*
2. *Determinar los intervalos de continuidad y clasificar sus discontinuidades.*
3. *Dé las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.*
4. *En base a la información obtenida en los incisos anteriores haga un bosquejo de la gráfica de f.*

▼

1. Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x = 0\}$.

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0, x = \pm 1\,,$$

entonces

$$D_f = \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}\,.$$

Las raíces deberían ser los puntos donde

$$x^2 - 2x + 1 = 0\,,$$

sin embargo $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ es cero solamente si $x = 1$, pero $1 \notin D_f$.

Entonces, la función $f(x)$ no tiene raíces.

2. La función $f(x)$ es continua en todo su dominio.

En $x = 0$ tiene una discontinuidad infinita pues

$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{x-1}{x(x+1)} = \mp\infty\,.$$

Así $x = 0$ es una asíntota vertical.

En $x = -1$ también tiene una discontinuidad infinita, pues

$$\lim_{x \to -1^\pm} f(x) = \lim_{x \to -1^\pm} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to -1^\pm} \frac{x-1}{x(x+1)} = \pm\infty\text{; e igualmente}$$

$x = -1$ también es una asíntota vertical;

pero en $x = 1$ la discontinuidad es removible pues

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{0}{2} = 0\,.$$

Obsérvese que la función f podría ser continua en $x = 1$, al definir $f(1) = 0$.

3. En el inciso anterior vimos que $x = 0$ y que $x = -1$ son asíntotas verticales.

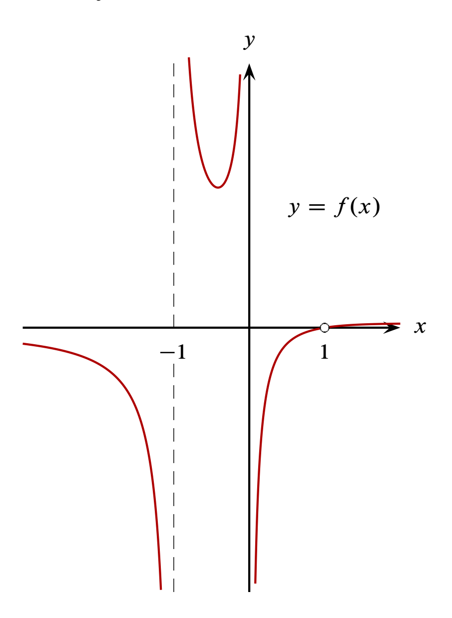
Para hallar las asíntotas horizontales calculamos

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{0-0+0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0\,.$$

Entonces $y=0$ es asíntota horizontal.

4. El bosquejo de la gráfica de la función f es:



□

Ejemplo 4.3.4 *Determinar los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función h definida por*

$$h(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x \notin [-2,2]; \\ ax^2+bx & si\ x \in [-2,2], \end{cases}$$

sea continua en todos los reales.

▼ La función $h(x)$ es continua en todos los reales excepto posiblemente en $x=-2$ & $x=2$. Para que la función sea continua en $x=-2$ se debe cumplir que:

$$\lim_{x\to-2} h(x) = h(-2),$$

por lo que

$$\lim_{x\to-2^-} h(x) = \lim_{x\to-2^+} h(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-2^-} (2x+1) = \lim_{x\to-2^+} (ax^2+bx) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4+1 = 4a-2b\,;$$

o sea,

$$4a - 2b = -3;$$

y para que sea continua en $x = 2$ se debe cumplir que:

$$\lim_{x \to 2} h(x) = h(2),$$

por lo que

$$\begin{gathered}\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^+} h(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \to 2^-} (ax^2 + bx) = \lim_{x \to 2^+} (2x + 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow 4a + 2b = 4 + 1\,,\end{gathered}$$

o sea,

$$4a + 2b = 5\,.$$

Así para que $h(x)$ tenga límite en $x = -2$ y en $x = 2$ se deben cumplir las condiciones

$$\begin{gathered}4a - 2b = -3\,; \\ 4a + 2b = 5\,.\end{gathered}$$

Éste es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sumando las ecuaciones obtenemos:

$$8a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}\,.$$

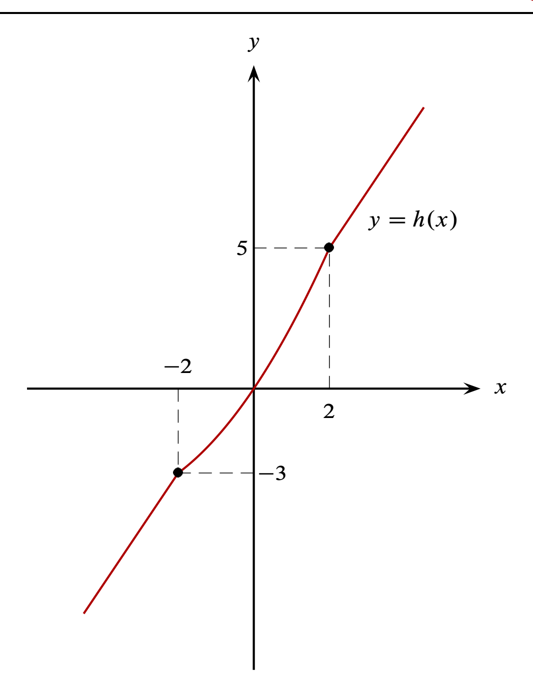
Sustituyendo este valor en la primera ecuación, tenemos

$$4\left(\frac{1}{4}\right) - 2b = 1 - 2b = -3 \Rightarrow 2b = 1 + 3 = 4 \Rightarrow b = 2\,.$$

Con estos valores de a, b la función que resulta es

$$h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2; \\ \dfrac{1}{4}x^2 + 2x & \text{si } x \in [-2, 2]; \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2\,, \end{cases}$$

cuya gráfica es



Por la forma en que ha sido construida la gráfica se cumple que:

$$\lim_{x \to -2} h(x) = -3 \ \& \ \lim_{x \to 2} h(x) = 5 \,.$$

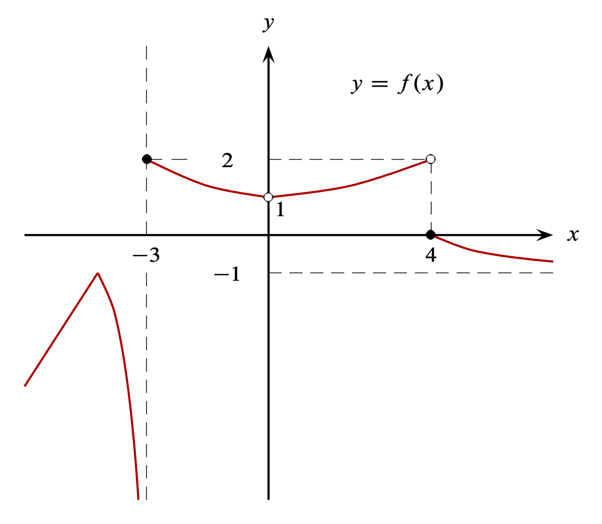
Además

$$h(-2) = \frac{1}{4}(-2)^2 + 2(-2) = 1 - 4 = -3 \ \& \ \lim_{x \to -2} h(x) = h(-2) \ \Rightarrow \ h(x) \text{ es continua en } x = -2 \,;$$

$$h(2) = \frac{1}{4}(2)^2 + 2(2) = 1 + 4 = 5 \ \& \ \lim_{x \to 2} h(x) = h(2) \ \Rightarrow \ h(x) \text{ es continua en } x = 2 \,.$$

□

Ejemplo 4.3.5 *A partir de la gráfica de una función f*



obtener lo que se solicita a continuación:

1. *Los intervalos de continuidad de la función f.*

2. *Las ecuaciones de las asíntotas de f.*

3. *Los límites siguientes:*

a. $\displaystyle\lim_{x\to -3^-} f(x)$;
b. $\displaystyle\lim_{x\to -3^+} f(x)$;
c. $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$;
d. $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} f(x)$;
e. $\displaystyle\lim_{x\to 4^+} f(x)$;
f. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x)$;
g. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} f(x)$.

▼

1. La función f es continua en: $(-\infty, -3)$, $[-3, 0)$, $(0, 4)$ y en $[4, \infty)$.
2. La asíntota vertical es $x = -3$ y la horizontal es $y = -1$.
3. a. $\displaystyle\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$;
   b. $\displaystyle\lim_{x\to -3^+} f(x) = 2$;
   c. $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1$;
   d. $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} f(x) = 2$;
   e. $\displaystyle\lim_{x\to 4^+} f(x) = 0$;
   f. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$;
   g. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} f(x) = -1$.

□

Ejemplo 4.3.6 *Para la curva* $y = f(x) = \dfrac{-3x^2}{x^2-4}$*, obtener: dominio, raíces y paridad; intervalos de continuidad, discontinuidades y su clasificación; asíntotas verticales y horizontales.*

▼ Dominio: $D_y = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 4 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x+2)(x-2) \neq 0 \right\} = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

Raíz: $x = 0$ cuando $-3x^2 = 0$.

Es par, pues $\dfrac{-3(-x)^2}{(-x^2)-4} = \dfrac{-3x^2}{x^2-4}$.

Como es una función racional es continua en todo su dominio y discontinua en $x = \pm 2$ donde tiene discontinuidades infinitas ya que:

$$\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \lim_{x\to 2^\pm} \frac{-3x^2}{(x+2)(x-2)} = \mp\infty \;\&\; \lim_{x\to -2^\pm} \frac{-3x^2}{(x+2)(x-2)} = \pm\infty\,.$$

Comprobamos por esto que $x = \pm 2$ son asíntotas verticales y como

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{1-\dfrac{4}{x^2}} = \frac{-3}{1} = -3,$$

tenemos que $y = -3$ es asíntota horizontal.

□

Funciones continuas en intervalos cerrados

Las funciones continuas en intervalos cerrados tienen algunas propiedades importantes las cuales iremos viendo paulatinamente.

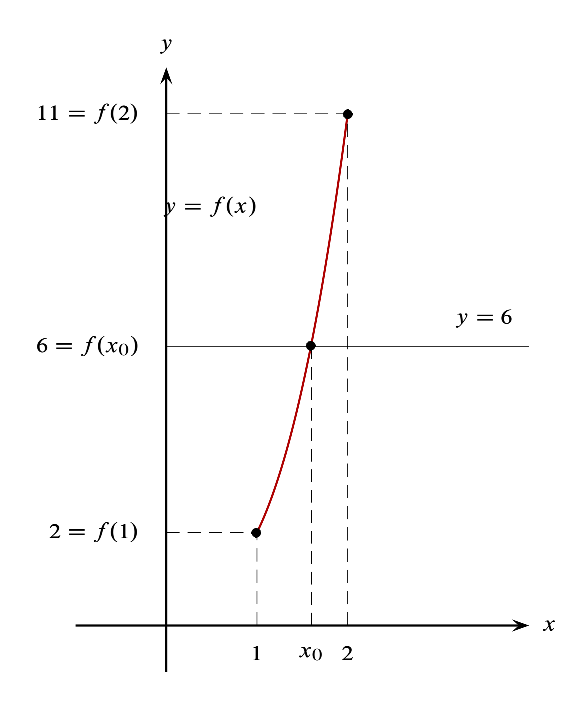
- **Teorema del Valor Intermedio.** Sea f una función continua en cierto intervalo I y sean a, b números en I. Si y_0 es un número que está entre $f(a)$ & $f(b)$ entonces existe al menos un x_0 entre a & b tal que $f(x_0) = y_0$.

Ejemplo 4.3.7 *Usar el teorema del Valor Intermedio para probar que la curva* $y = x^3 + x^2 - x + 1$ *se interseca con la recta* $y = 6$ *en el intervalo* $[1, 2]$.

▼ La función polinomial $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto es continua en el intervalo $[1, 2]$. Además,

$$f(1) = 1^3 + 1^2 - 1 + 1 = 2 \quad \text{y también} \quad f(2) = 2^3 + 2^2 - 2 + 1 = 11\,.$$

Como $y_0 = 6$ está entre $2 = f(1)$ & $11 = f(2)$, entonces, por el teorema del Valor Intermedio, existe al menos un $x_0 \in (1, 2)$ tal que $f(x_0) = 6$. Como esto sucede, las curvas $y = x^3 + x^2 - x + 1$ & $y = 6$ se intersecan.



Nota: al intersecarse las curvas $y = x^3 + x^2 - x + 1$ & $y = 6$ sucede que

$$x^3 + x^2 - x + 1 = 6 \;\Leftrightarrow\; x^3 + x^2 - x + 1 - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 + x^2 - x - 5 = 0\,.$$

Igualdad que se cumple cuando x es solución de la ecuación $x^3 + x^2 - x - 5 = 0$ o bien cuando x es raíz de la función $g(x) = x^3 + x^2 - x - 5$.

□

- El teorema de Valor Intermedio garantiza la existencia de ceros o raíces de funciones continuas:

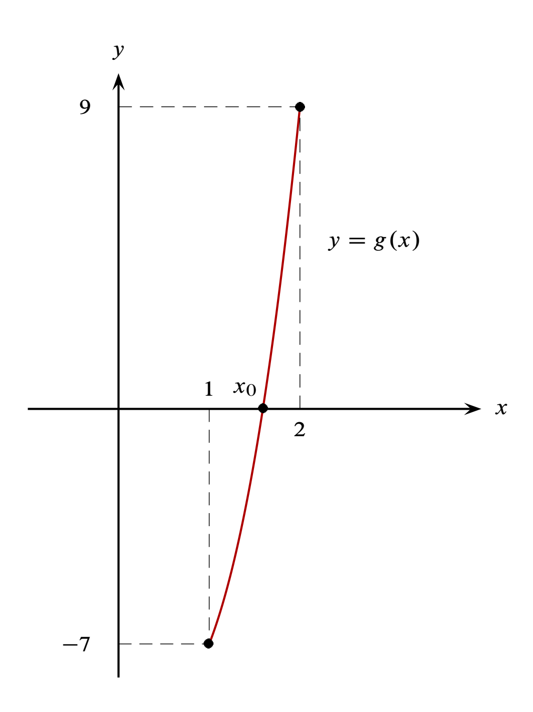
  Si f es continua en $[a, b]$ & $f(a) \times f(b) < 0$, es decir, si $f(a)$ & $f(b)$ tienen signos diferentes [0 está entonces entre $f(a)$ y $f(b)$], existe una raíz $c \in (a, b)$ de f, esto es, $f(c) = 0$.

Ejemplo 4.3.8 *Mostrar que la ecuación* $2x^3+x^2-x-9=0$ *tiene al menos una solución en el intervalo* $[1,2]$.

▼ La función polinomial $g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 9$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y por lo tanto es continua en el intervalo $[1,2]$.

$$g(1) = 2(1)^3 + 1^2 - 1 - 9 = -7 \quad \& \quad g(2) = 2(2)^3 + 2^2 - 2 - 9 = 9 .$$

Como $g(1) = -7 < 0$ y como $g(2) = 9 > 0$, entonces $y_0 = 0$ está entre $g(1)$ & $g(2)$. Por lo tanto por el teorema del Valor Intermedio existe al menos un $x_0 \in (1,2)$ tal que $g(x_0) = 0$. Entonces, en el intervalo $(1,2)$ existe al menos una solución de la ecuación: $2x^3 + x^2 - x - 9 = 0$.



□

- También, por el teorema del Valor Intermedio, si una función continua en un intervalo cerrado no tiene raíces en él, entonces $f(x) > 0$ para toda x en el intervalo o bien $f(x) < 0$ para toda x en el intervalo.

Ejemplo 4.3.9 *Aplicación del teorema del Valor Intermedio a la función* $f(x) = ax^2 + bx + c$.

▼ La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es continua en $\mathbb{R}$.

Si $b^2 - 4ac < 0$, la función no tiene raíces en $\mathbb{R}$, luego $f(x) > 0$ o bien $f(x) < 0$ en $\mathbb{R}$, como habíamos adelantado ya.

Basta evaluar la cuadráticas en un punto, para conocer su signo en todos los reales. Por ejemplo en $x = 0$.

1. $f(0) = c > 0$, entonces $f(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}$.

2. $f(0) = c < 0$, entonces $f(x) < 0$ para $x \in \mathbb{R}$.

□

- Asimismo entre dos raíces consecutivas de una función polinomial la función es positiva siempre o bien es negativa siempre.

- Igualmente, una función polinomial de grado impar tiene al menos una raíz real.

  En efecto:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right).$$

  Cuando $x \to +\infty$ o bien $x \to -\infty$, el segundo factor tiende a $a_0 \neq 0$.

  Tenemos que:

  1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ tiene el mismo signo que a_0, luego hay puntos donde $f(x)$ tiene el mismo signo que a_0.
  2. Por otro lado, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ tiene el signo contrario al de a_0, luego también hay puntos donde $f(x)$ tiene el signo contrario al de a_0.

  Por lo que entre ambos tipos de puntos por lo menos hay una raíz real.

Ejemplo 4.3.10 *Demostrar que la ecuación $3x^5 - 4x^2 + 5x - 6 = 0$ tiene al menos una solución real.*

▼ La función polinomial $g(x) = 3x^5 - 4x^2 + 5x - 6$ es continua en toda la recta real.
Y considerando que

$$g(x) = 3x^5 - 4x^2 + 5x - 6 = x^5\left(3 - \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right);$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty \;\&\; \lim_{x\to-\infty}\left(3 - \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right) = 3 > 0;$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^5 = +\infty \;\&\; \lim_{x\to+\infty}\left(3 - \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right) = 3 > 0.$$

Podemos afirmar lo que sigue:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^5\left(3 - \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right)\right] = -\infty.$

   Y se puede asegurar entonces la existencia de un número $a < 0$ tal que $g(a) < 0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^5\left(3 - \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right)\right] = +\infty.$

   Existe entonces un número $b > 0$ tal que $g(b) > 0$.

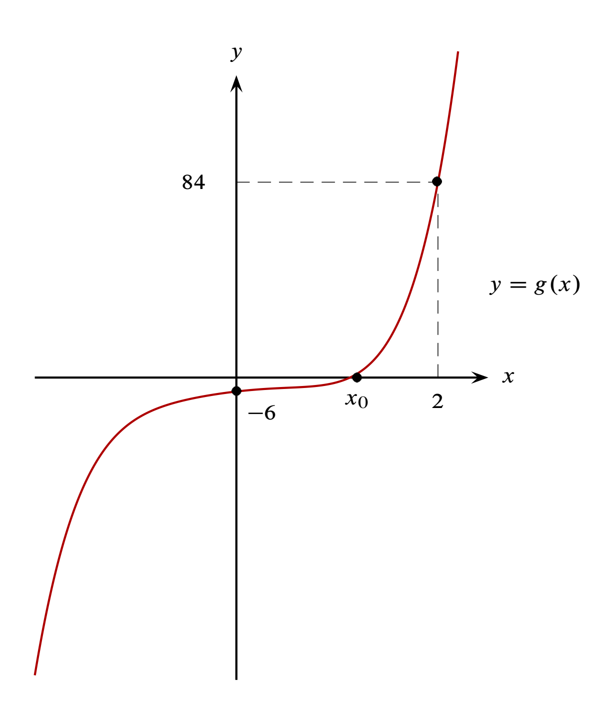
3. Como $g(a) < 0$ y como $g(b) > 0$, entonces $y_0 = 0$ está entre $g(a)$ & $g(b)$. Por lo tanto, por el teorema del Valor Intermedio, existe al menos un $a < x_0 < b$ tal que $g(x_0) = 0$.

   Entonces, existe al menos una solución real de la ecuación $3x^5 - 4x^2 + 5x - 6 = 0$.

   Este mismo resultado también se puede obtener directamente observando que:

$$g(0) = -6 < 0 \;\&\; g(2) = 84 > 0\,;$$

   luego, $3x^5 - 4x^2 + 5x - 6 = 0$ tiene al menos una solución x_0 entre 0 y 2.



□

Ejemplo 4.3.11 *Verifique que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una raíz entre 0 y 1. Proporcione un intervalo de longitud 1/4 que contenga dicha raíz.*

▼ La función $f(x) = x^3 + x - 1$ es continua en $\mathbb{R}$ y en particular en $[0, 1]$.
Se tiene que $f(0) = -1 < 0$ y que $f(1) = 1 > 0$, por lo que en el intervalo $(0, 1)$ la función f tiene al menos una raíz, según el teorema del Valor Intermedio.
Además

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{8} < 0.$$

Por lo que $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.
Por otro lado

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{3}{4} - 1 = \frac{27}{64} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{11}{64} > 0.$$

Por lo tanto $f(x)$ tiene una raíz c en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ que es de longitud $\frac{1}{4}$.

□

Ejemplo 4.3.12 *Sea* $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ *la función definida por*

$$f(x) = 48 - 98x - 343x^2 + 287x^3 - 343x^4 + 287x^5 - 391x^6 + 385x^7 .$$

Evalúe $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.
¿Cuántas raíces reales tiene al menos el polinomio $f(x)$ *en el intervalo* $[-3, 3]$*?*

▼ Evaluando tenemos que

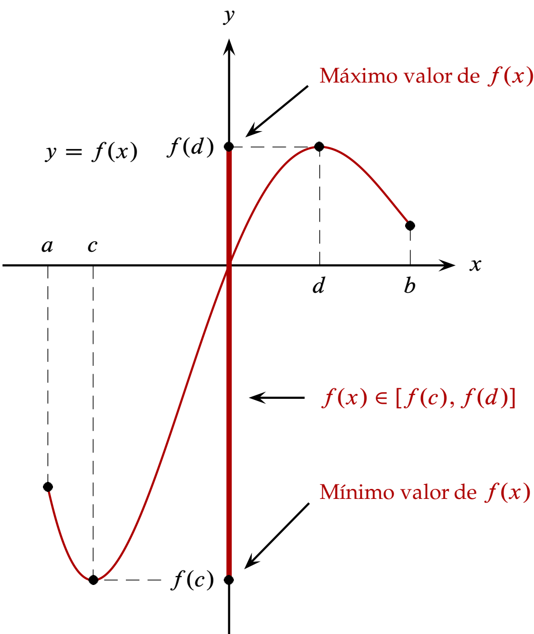
1. $f(-2) = -92\,400$;
2. $f(-1) = -1\,890$;
3. $f(0) = 48$;
4. $f(1) = -168$;
5. $f(2) = 28\,728$.

Ya que f es una función continua en todo $\mathbb{R}$, por ser polinomial, entonces f es continua en el intervalo $[-3, 3]$.
Por ser $f(-2) < 0$, $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, $f(1) < 0$ & $f(2) > 0$, según el teorema del Valor Intermedio, la función f tiene al menos una raíz en los intervalos $(-1, 0)$, $(0, 1)$ & $(1, 2)$.
Luego la función f tiene al menos 3 raíces reales en el intervalo $[-3, 3]$.

□

- **Teorema de los Valores Extremos.** Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces:
  Existen c & $d \in [a, b]$ tales que $f(c) \le f(x) \le f(d)$ para $x \in [a, b]$.

- Por el teorema de los Valores Extremos y el teorema del Valor Intermedio, tenemos que el rango de una función continua definida en un intervalo cerrado es otro intervalo cerrado, a saber, $[f(c), f(d)]$.



Ejercicios 4.3.1 *Soluciones en la página* **??**

1. Sea $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$; demuestre que hay, al menos, un número a entre 0 & 10 tal que $f(a) = 500$.

2. El costo de fabricación de q automóviles eléctricos, en miles de pesos, es de

$$C(q) = 5q^3 + 13q^2 + 14\,;$$

mientras que el ingreso, también en miles de pesos, es de

$$I(q) = q^4 - 5q\,.$$

Demostrar que existe un valor entre 2 & 10, de la variable q, donde la fábrica ni gana ni pierde.

3. Sea $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 - 10x$. ¿Existe un punto $a \in [1,3]$ tal que $f(a) = -15$? Justifique su respuesta.

4. La temperatura T (en °C) a la que el agua hierve está dada por la fórmula

$$T(h) = 100.862 - 0.0415\sqrt{h + 431.03}\,,$$

donde h es la altura sobre el nivel del mar (medida en metros).

Use el teorema del Valor Intermedio y diga si entre los 4 000 y 4 500 metros sobre el nivel del mar hay una altitud a la cual hierve a 98°C. Justifique su respuesta.

5. Verifique que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una raíz entre 0 & 1. Dé un intervalo de longitud $\dfrac{1}{4}$ que contenga a dicha raíz.

6. Determinar un intervalo de longitud 0.5 que contenga a una raíz de la ecuación $x^3 + 2x + 4 = 0$.

7. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } -2 \le x < 0; \\ -(x^2 + 2) & \text{si } 0 \le x \le 2\,. \end{cases}$$

   a. Calcular $f(-2)$ & $f(2)$.
   b. ¿Existe $c \in (-2,2)$ tal que $f(c) = 0$?

8. Sea el polinomio $p(x) = x^3 - 4x + 2$. Aproxime en el intervalo $[1,2]$ una raíz del polinomio con error menor que $\dfrac{1}{4}$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(-10) = -4$, $f(-3) = 2$, $f(1) = 0$, $f(2) = 8$ y que $f(4) = -5$.

   Determine el número de raíces que, al menos, tiene la función f y en qué intervalos se encuentran.

10. Verifique que la ecuación $x^3 - 4x - 2 = 0$ tiene una raíz real en el intervalo $[2,3]$ y determine un intervalo de longitud $1/4$ que contenga a dicha raíz.

11. Determine un intervalo de longitud $1/4$ en el que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tenga una raíz.

12. Considere la función $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{x^4}{4}-x^2-1$. Pruebe que esa función tiene al menos una raíz positiva y otra negativa.

13. Encuentre un intervalo en donde la función $h(x)=-2x^5-7x+1$ tiene una raíz.

14. Un polinomio pasa por los puntos $(-5,10)$, $(2,3)$ y $(17,-1)$.
¿Cuántas raíces tiene como mínimo? Justifique su respuesta.

15. Muestre que la función $h(x)=x^5+x-5$ tiene al menos una raíz en los números reales.

16. Halle un intervalo de longitud no mayor que 0.1 donde se encuentre una raíz del polinomio:
$$\rho(x)=-x^4+16x^3-60x^2+1.$$

17. Dada la función $f(x)=x^5+x-1$, verifique que existe un número c tal que $f(c)=0$. Es decir, justifique que la función tiene una raíz.

18. Dada la función $f(x)=-x^3+4x+2$, obtener un intervalo en donde la función tenga al menos una raíz. Justifique su respuesta.

19. Considere la función
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-6x+8} & \text{si } x\neq 2 \text{ y } x\neq 4;\\ 1 & \text{si } x=2\,;\end{cases}$$
determinar:
   a. Dominio y raíces.
   b. Intervalos de continuidad y clasificación de discontinuidades.
   c. Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.
   d. Bosquejo gráfico.

20. Considere la función:
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-4}{2-x} & \text{si } x\neq 2;\\ 3 & \text{si } x=2\,;\end{cases}$$
determine:
   a. Dominio y raíces.
   b. Intervalos de continuidad y clasificación de sus discontinuidades.
   c. Ecuaciones de sus asíntotas verticales y horizontales.
   d. Bosquejo gráfico.

21. Para la función $f(x)=\dfrac{3x^2-12}{x^2+x-2}$, determine:
   a. Los puntos de discontinuidad y su clasificación.
   b. Los intervalos de continuidad.

c. Las asíntotas verticales y horizontales.

d. Por último esboce su gráfica.

22. Considere la función $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-4}$.

a. Obtener las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de esta función g.

b. Encontrar el dominio, las raíces y los intervalos de continuidad de la función.

c. Bosquejar su gráfica.

23. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x^2+x-2}$.

a. Determinar dominio y raíces.

b. Hallar intervalos de continuidad y clasificar las discontinuidades.

c. Encontrar las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

d. En base a lo anterior, hacer el esbozo gráfico de f.

24. Sea la función $g(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x^2-8x+15}$. Encuentre: raíces, discontinuidades y su clasificación, asíntotas e intervalos de continuidad. Bosqueje su gráfica.

25. Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x^2+7x+12}$.

a. Proporcione dominio, raíces e intervalos de continuidad.

b. Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

c. Haga un esbozo gráfico de la función f.

26. Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$.

a. Proporcione dominio, raíces e intervalos de continuidad de la función f.

b. Obtenga las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la función f.

c. Dibuje la gráfica y halle el rango de la función f.

27. Sea $f(x) = \dfrac{6x^3+3x^2-3x}{2x^3+3x^2-2x}$, hallar:

a. Dominio y raíces.

b. Intervalos de continuidad, clasificando las discontinuidades.

c. Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

d. Esbozo gráfico de f.

28. Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{9-x^2}$.

a. Proporcione dominio, raíces e intervalos de continuidad de la función f.

b. Obtenga las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la función f.

c. Dibuje la gráfica y halle la imagen de la función f.

29. Considere la función $h(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{x^2 - 25}$.

a. Obtener el dominio, raíces e intervalos de continuidad.

b. Hallar las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

c. Bosquejar la gráfica de la función h.

30. De la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 7x + 10}$, encontrar:

a. Dominio, raíces, puntos de discontinuidad y su clasificación.

b. Las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

c. El bosquejo de su gráfica.

31. De la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2}$, encontrar:

a. Dominio, raíces, puntos de discontinuidad y su clasificación.

b. Las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

c. El bosquejo de su gráfica.

32. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 2}$, determinar:

a. Dominio, raíces e intervalos de continuidad.

b. Discontinuidades y su clasificación.

c. Asíntotas verticales y horizontales.

d. Un esbozo de la gráfica.

33. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$, determine:

a. Dominio, raíces y paridad.

b. Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales.

c. Discontinuidades y su clasificación.

d. Esbozo gráfico y rango.

34. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x}$, determine:

a. Los puntos de discontinuidad y su clasificación.

b. Las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

c. Un esbozo de la gráfica.

35. Dada $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2}$.

a. Determinar su dominio y sus raíces.
b. Clasifique sus puntos de discontinuidad.
c. Encuentre las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.
d. Haga un bosquejo de su gráfica.

36. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4 - x^2}$, obtener:

a. Dominio y puntos de intersección con el eje x.
b. Intervalos de continuidad.
c. Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.
d. Bosquejo gráfico.

37. Sea la función $f(x) = \dfrac{3x^3 - 3x}{x^4 + x^3}$.

Encontrar el dominio y las raíces, clasificar sus discontinuidades, encontrar sus asíntotas verticales y horizontales y hacer un bosquejo de la gráfica.

38. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4x + 3}$, determine:

a. Dominio y raíces.
b. Intervalos de continuidad. Puntos de discontinuidad y su clasificación.
c. Asíntotas verticales y horizontales.
d. Esbozo gráfico y rango.

39. Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 - 4}$, determine:

a. Dominio y raíces.
b. Puntos de discontinuidad y su clasificación.
c. Asíntotas verticales y horizontales.
d. Esbozo gráfico de f.

40. Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6x}{x^2 + 5x + 6}$, determinar:

Dominio y raíces; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; dibujar la gráfica.

41. Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$, determine:

a. Dominio, raíces y paridad.

b. Clasificación de discontinuidades.

c. Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

d. Esbozo gráfico y rango de f.

42. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$, determinar: dominio y raíces; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; su gráfica.

43. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^3 - x^2}$. Encontrar el dominio y las raíces; clasificar sus discontinuidades, encontrar sus asíntotas verticales y horizontales; además hacer un bosquejo de la gráfica.

44. Para la función $f(x) = \dfrac{4x^2 - 8x}{x^2 - 4}$, realice lo siguiente:

a. Determine su dominio y raíces.

b. Mencione sus tipos de discontinuidad.

c. Encuentre las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

d. Haga un esbozo de la gráfica de f.

45. Para la curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$, obtener: dominio, raíces y paridad; intervalos de continuidad, discontinuidades y su clasificación; asíntotas verticales y horizontales.

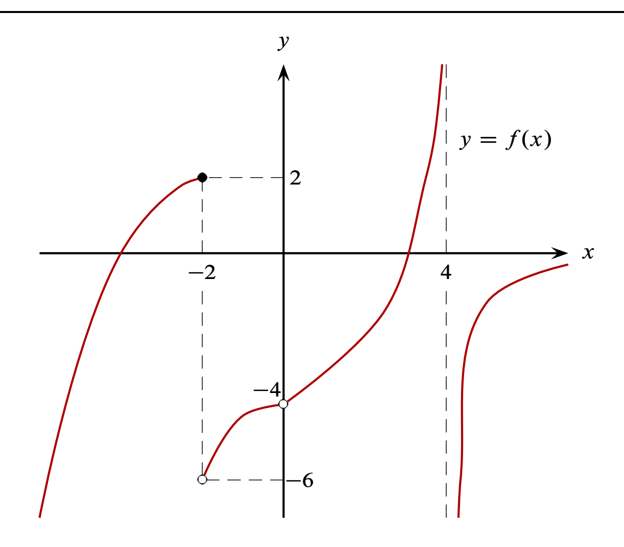
46. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 6}{2x^2 + x - 3}$, obtenga:

Dominio y raíces; intervalos de continuidad y puntos de discontinuidad (clasificados); asíntotas verticales y horizontales.

47. Hallar dónde es continua la función

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2\sqrt{x} + 3x - 2x\sqrt{x} - 3}{x - 1} & \text{si } x \neq 1, x \geq 0; \\ 5 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

48. Si la representación gráfica de una función f es:



a. Hallar su dominio.

b. Encontrar además los siguientes límites:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

iii. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$;

iv. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$;

v. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Para $a = -2$, 0 y 4.

c. Obtener las asíntotas horizontales y verticales, los intervalos de continuidad y la clasificación de las discontinuidades

49. a. Dar una posible gráfica para una función f que sea continua en su dominio $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ y que satisfaga las condiciones:

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$;

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

iii. $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = 1$;

iv. $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 3$;

v. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$;

vi. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$;

vii. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$;

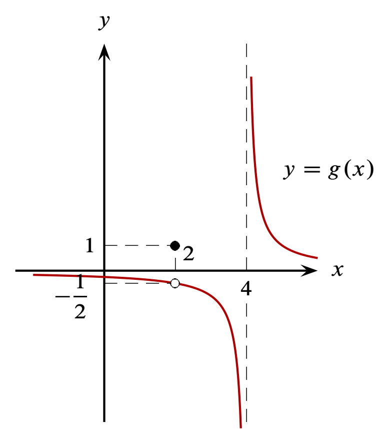
viii. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$;

ix. $f(1) = 0$.

b. Clasifique sus discontinuidades.

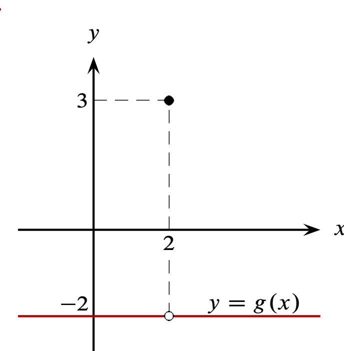
Ejercicios 4.3.1 *Continuidad en intervalos, página* **??**

1. $f(0) = -9 \quad ; f(10) = 561$;
   existe $a \in (0, 10)$, tal que $f(a) = 500$.
2. La ganancia de la fábrica cuando se fabrican q automóviles:
   $G(q) = q^4 - 5q^3 - 13q^2 - 5q - 14$;
   $G(2) = -100 \quad G(10) = 3\,636$;
   existe $q \in [2, 10]$ tal que $G(q) = 0$.
3. Existe al menos un punto $a \in (1, 3)$
   tal que $f(a) = -15$.
4. Existe $h \in (4\,000, 4\,500)$ tal que $T(h) = 98\,°C$.
5. La raíz podría estar en $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$;
   este intervalo tiene longitud $= \frac{1}{4}$.
6. $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$.
7. a. $f(-2) = 6; \quad f(2) = -6$;
   b. no existe tal c.
8. Éste es uno de los posibles intervalos: $[1.6, 1.8]$.
9. La función f tiene al menos tres raíces en $(-10, 4)$.
10. $f(2) < 0$ y $f(3) > 0$, existe al menos un $c \in (2, 3)$ tal que $f(c) = 0$;
    en $\left[2, \frac{9}{4}\right]$ de longitud $\frac{1}{4}$ existe al menos una raíz.
11. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.
12. $f(0) = -1 < 0; \quad f(2) = \frac{32-3}{3} > 0$;
    entre 0 y 2 existe una raíz;
    entre -2 y 0 hay otra raíz .
13. Entre 0 y 1 existe una raíz de la función.
14. Entre 2 y 17 la función tiene al menos una raíz.
15. Existe una valor $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.
16. $\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{16}\right)$.
17. $(0, 1)$.
18. $[-1, 0]$.
19. a. $D_g = \mathbb{R} - \{4\}$. No tiene raíces;
    b. en $x = 2$ $g(x)$ tiene una discontinuidad removible;
       en $x = 4$ $g(x)$ tiene una discontinuidad esencial infinita;
       $g(x)$ es continua en
       $\mathbb{R} - \{2, 4\} = (-\infty, 2) \bigcup (2, 4) \bigcup (4, +\infty)$;
    c. $x = 4$ es una asíntota vertical;
       $y = 0$ es una asíntota horizontal.
    d.



20. a. $D_g = \mathbb{R}$; $g(x)$ no tiene raíces;
    b. hay una discontinuidad removible en $x = 2$;
       la función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$;
    c. la función no tiene asíntotas verticales;
       $y = -2$ es asíntota horizontal.

d.



21. a. $f(x)$ no es continua en $x = 1$ ni en $x = -2$;

en $x = 1$ hay una discontinuidad esencial;

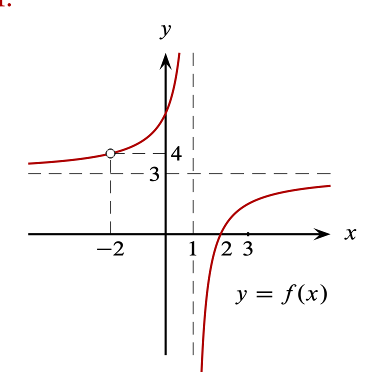
en $x = -2$ hay una discontinuidad removible;

b. $f(x)$ es continua en $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$;

c. $y = 3$ es una asíntota horizontal;

$x = 1$ es una asíntota vertical.

d.



22. a. La recta $y = 2$ es asíntota horizontal;

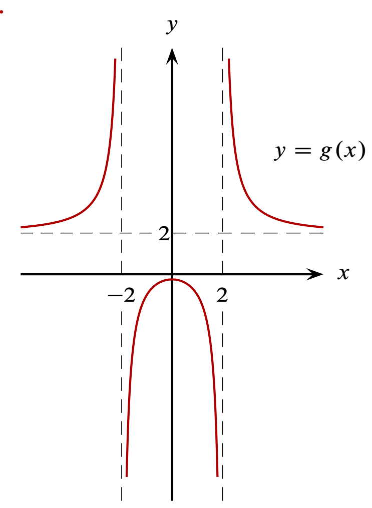
las rectas $x = 2$ & $x = -2$ son asíntotas verticales;

b. $D_g = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$;

no tiene raíces;

g es continua en $(-\infty, -2) \bigcup (-2, 2) \bigcup (2, +\infty)$.

c.



23. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$;

f tiene sólo una raíz, que es $x = 4$;

b. f es continua en $(-\infty, -2) \bigcup (-2, 1) \bigcup (1, +\infty)$;

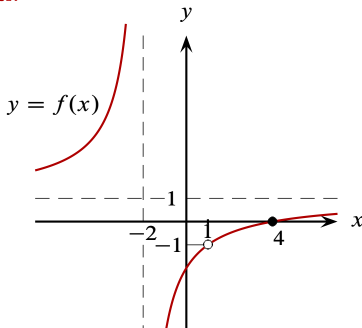
f tiene en $x = 1$ una discontinuidad removible;

f tiene en $x = -2$ una discontinuidad esencial infinita;

c. la recta $x = -2$ es una asíntota vertical;

la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de f.

d.



24. La única raíz de $g(x)$ es $x = -4$;

$g(x)$ es continua en $(-\infty, 3) \bigcup (3, 5) \bigcup (5, +\infty)$;

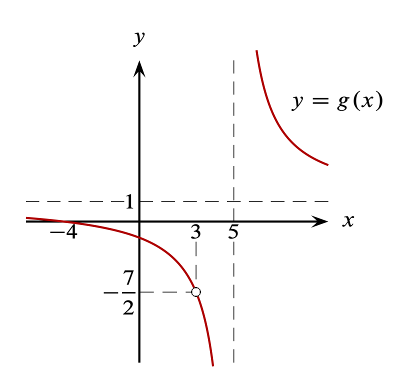
la discontinuidad en $x = 3$ es removible;

en $x = 5$ la discontinuidad es esencial;

$x = 5$ es asíntota vertical;

$y = 1$ es asíntota horizontal;

la gráfica es:



25. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-4, -3\}$; raíces: $x = 1$;

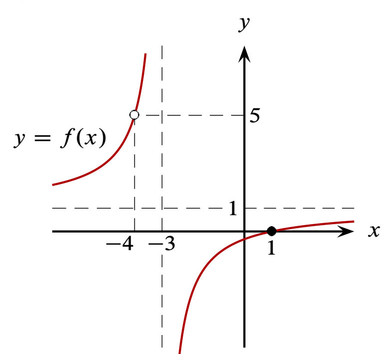
la función es continua en todo su dominio;

existe una discontinuidad removible en $x = -4$ y una discontinuidad esencial (infinita) en $x = -3$;

b. $y = 1$ es una asíntota horizontal;

la ecuación de la asíntota vertical es $x = -3$.

c.



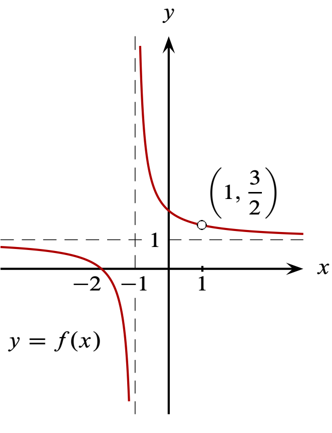
26. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$; f tiene sólo una raíz: $x = -2$;

f es continua en $(-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, \infty)$;

b. la recta $x = -1$ es la única asíntota vertical;

la recta $y = 1$ es la única asíntota horizontal;

c.



$R_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

27. a. $D_f = \mathbb{R} - \left\{-2, 0, \frac{1}{2}\right\}$;

la única raíz de f es $x = -1$;

b. intervalos de continuidad: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$;

la discontinuidad en $x = -2$ es infinita;

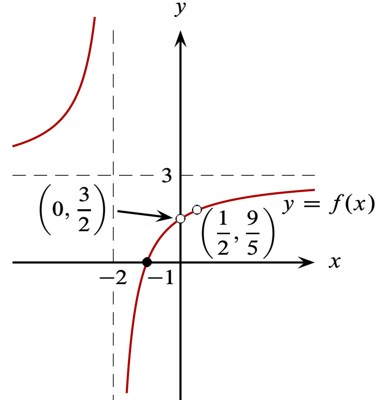
la discontinuidad en $x = 0$ es removible;

la discontinuidad en $x = \frac{1}{2}$ también es removible;

c. la única asíntota vertical es la recta $x = -2$;

$y = 3$ es la única asíntota horizontal.

d.



28. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$;

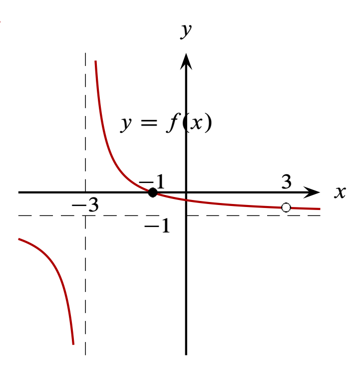
sólo hay una raíz: $x = -1$;

es continua en todo su dominio;

$D_f = (-\infty, -3) \bigcup (-3, 3) \bigcup (3, +\infty)$;

b. $x = -3$ es una asíntota vertical;

$y = -1$ es una asíntota horizontal;

c. 

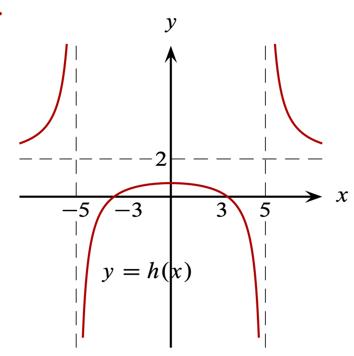
$R_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

29. a. $D_h = \mathbb{R} - \{-5, 5\}$; raíces: $x = \pm 3$;

h es continua en $(-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty)$;

b. $x = -5$ & $x = 5$ son asíntotas verticales;

la recta $y = 2$ es la única asíntota horizontal.

c. 

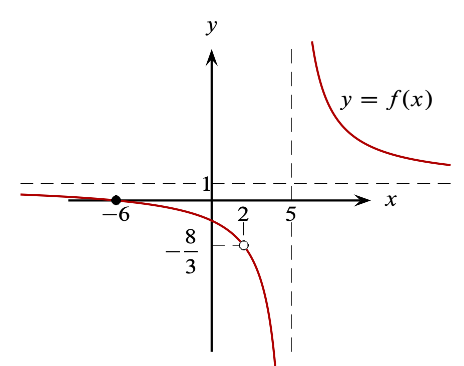
30. a. $D_f = \mathbb{R} - \{5, 2\}$; la raíz es: $x = -6$;

en $x = 2$ hay una discontinuidad removible;

en $x = 5$ hay una discontinuidad esencial infinita;

b. $y = 1$ es una asíntota horizontal;

$x = 5$ es una asíntota vertical.



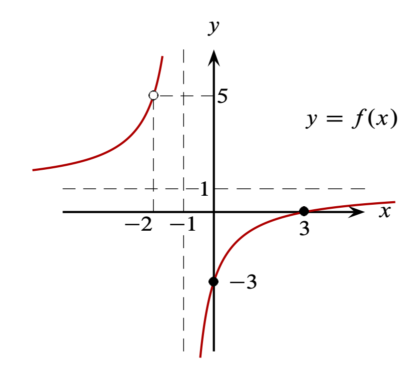
31. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-1, -2\}$; raíces: $x = 3$;

en $x = -2$ se tiene una discontinuidad removible;

en $x = -1$ se tiene una discontinuidad esencial infinita;

b. $y = 1$ es una asíntota horizontal;

$x = -1$ es una asíntota vertical.



32. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$;

$x = -3$ es la única raíz de $f(x)$;

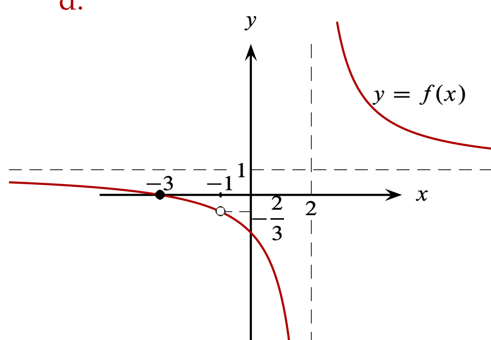
$f(x)$ es continua en su dominio:

$D_f = (-\infty, -1) \bigcup (-1, 2) \bigcup (2, \infty)$;

b. en $x = 2$ la función tiene una discontinuidad infinita;

c. $x = 2$ es la única asíntota vertical de la función;

$y = 1$ es asíntota horizontal .

d. 

33. a. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$;

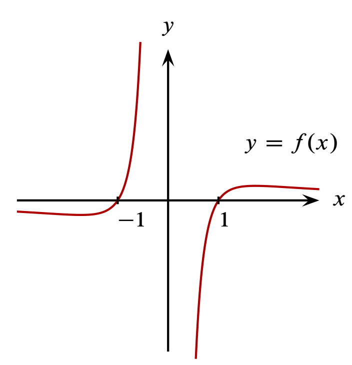
raíces: $x = \pm 1$; es impar;

b. $x = 0$ es asíntota vertical;

$y = 0$ es asíntota horizontal;

c. en $x = 0$ la discontinuidad es infinita.

d.



El rango de f es $\mathbb{R}$.

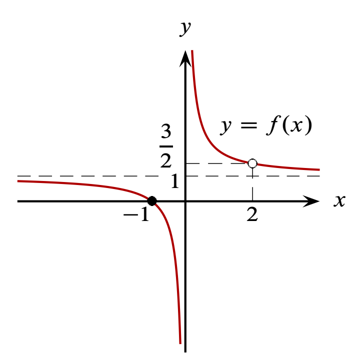
34. a. En $x = 2$ hay una discontinuidad removible;

en $x = 0$ hay una discontinuidad infinita;

b. $x = 0$ es una asíntota vertical;

$y = 1$ es la asíntota horizontal.

c.



35. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$; la raíz es $x = -\frac{3}{2}$;

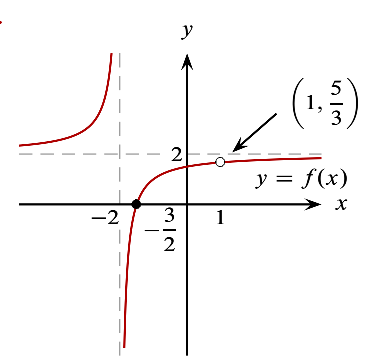
b. en $x = -2$ hay una discontinuidad infinita;

en $x = 1$ la discontinuidad es removible;

c. $x = -2$ es la asíntota vertical;

$y = 2$ es la asíntota horizontal.

d.



36. a. $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$;

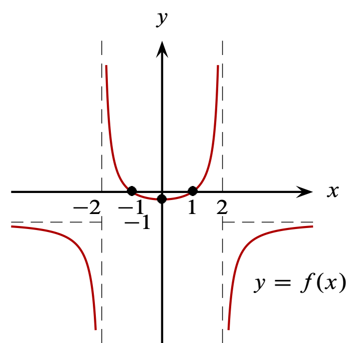
la gráfica interseca al eje x cuando $x = \pm 1$;

b. en $(-\infty, -2) \bigcup (-2, 2) \bigcup (2, +\infty)$ $f(x)$ es continua;

c. $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales;

$y = -1$ es asíntota horizontal .

d.



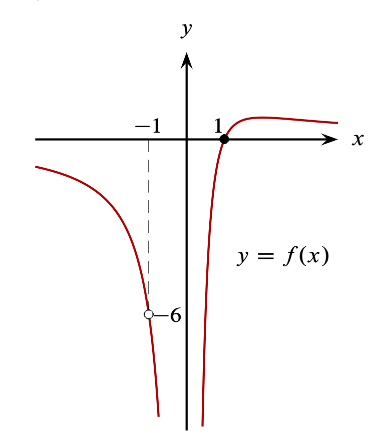
37. $D_f = \mathbb{R} - \{0, -1\}$; la única raíz de f es $x = 1$;

f es continua en su dominio;

en $x = 0$ la discontinuidad es infinita y en $x = -1$ es removible;

$x = 0$ es una asíntota vertical;

$y = 0$ es asíntota horizontal .



38. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-3, -1\}$;

f tiene una raíz: $x = 2$;

b. f es continua en

$(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$ y en $(-1, +\infty)$;

f tiene discontinuidades en $x = -3$ y en $x = -1$;

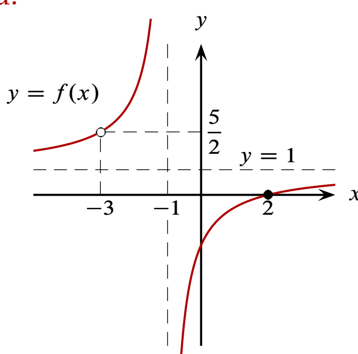
f tiene en $x = -3$ una discontinuidad removible;

f tiene en $x = -1$ una discontinuidad esencial;

c. $x = -1$ es una asíntota vertical y es la única;

$y = 1$ es la única asíntota horizontal de f .

d.



El rango es $R_f = \mathbb{R} - \left\{1, \frac{5}{2}\right\}$.

39. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; la raíz de f es $x = 1$;

b. f tiene discontinuidades en $x = -2$ y en $x = 2$;

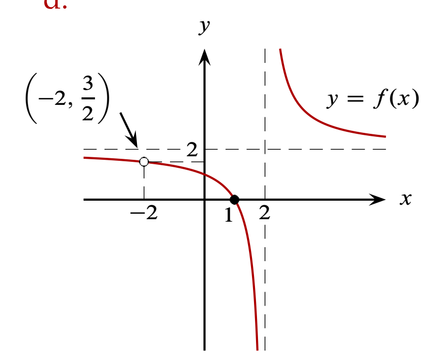
en $x = -2$ f tiene una discontinuidad removible;

f tiene en $x = 2$ una discontinuidad esencial infinita;

c. $x = 2$ es una asíntota vertical;

$y = 2$ es una asíntota horizontal.

d.



40. $D_f = \mathbb{R} - \{-3, -2\}$; f tiene sólo una raíz: $x = 0$;

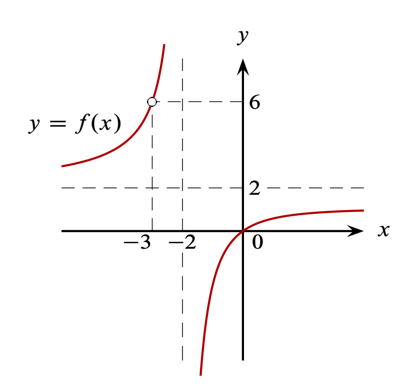
f es continua en $(-\infty, -3) \bigcup (-3, -2) \bigcup (-2, +\infty)$;

la discontinuidad en $x = -3$ es removible;

la discontinuidad en $x = -2$ es esencial infinita;

$x = -2$ es una asíntota vertical;

$y = 2$ es una asíntota horizontal.



41. a. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$; raíz $x = -1$; f no es par ni impar;

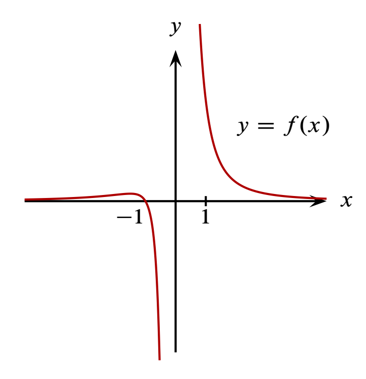
b. f es continua en $(-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$;

f tiene una discontinuidad en $x = 0$, esencial;

c. $x = 0$ es una asíntota vertical;

$y = 0$ es una asíntota horizontal;

d. El rango de f es $\mathbb{R}$.



42. $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$;

la única raíz de f es $x = -4$;

la función es continua en

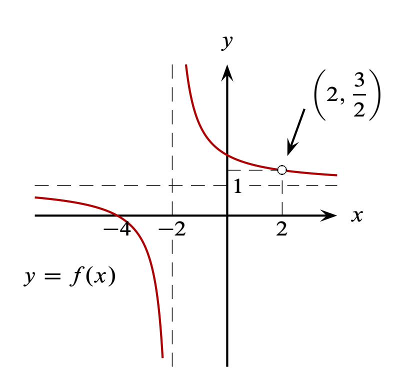
$(-\infty, -2) \bigcup (-2, 2) \bigcup (2, +\infty)$;

la discontinuidad en $x = -2$ es esencial;

la recta $x = -2$ es una asíntota vertical;

la discontinuidad en $x = 2$ es removible;

la recta $y = 1$ es asíntota horizontal .



43. $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$; $x = -3$ es raíz;

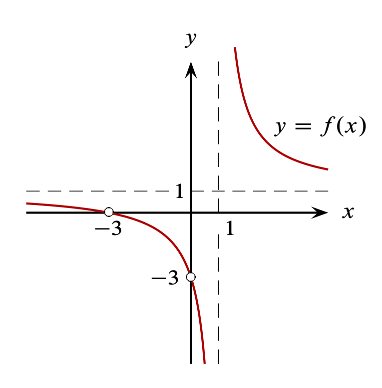
f es discontinua en $x = 0$ y en $x = 1$;

f tiene en $x = 0$ una discontinuidad removible;

f tiene en $x = 1$ una discontinuidad esencial infinita;

$x = 1$ es una asíntota vertical;

$y = 1$ es una asíntota horizontal.



44. a. $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$; la única raíz es $x = 0$;

b. la función es discontinua en $x = 2$ y en $x = -2$;

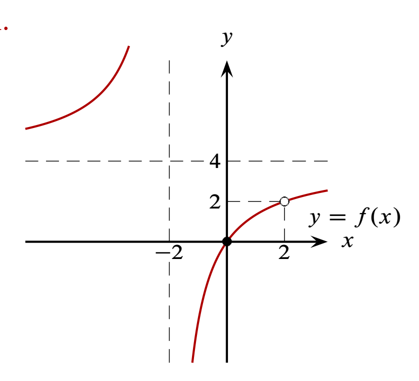
en $x = 2$ existe una discontinuidad removible;

la discontinuidad en $x = -2$ es esencial infinita;

c. $x = -2$ es una asíntota vertical;

$y = 4$ es una asíntota horizontal.

d.



45. $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$; raíz: $x = 0$;

f es una función par;

f es continua en $(-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, +\infty)$;

f tiene dos discontinuidades, $x = -1$ & $x = 1$. Son esenciales;

$x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales;

$y = 2$ es una asíntota horizontal.

46. $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$;

la función es continua en su dominio;

$D_f = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \bigcup \left(-\frac{3}{2}, 1\right) \bigcup (1, +\infty)$;

es discontinua en $x = -\frac{3}{2}$ y en $x = 1$;

en $x = -\frac{3}{2}$ la discontinuidad es removible;

la discontinuidad en $x = 1$ es esencial infinita;

$x = 1$ es asíntota vertical;

$y = 1$ es asíntota horizontal.

47. $h(x)$ es continua en todo su dominio: $[0, +\infty)$.

48. a. $D_f = \mathbb{R} - \{0, 4\}$;

b. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -6$;
$\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ no existe;
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -4$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -4$;
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -4$;
$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ no existe;

c. $y = 0$ es la única asíntota horizontal;

$x = 4$ es la única asíntota vertical;

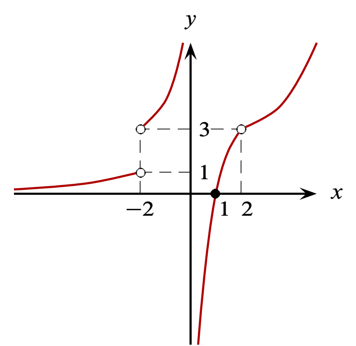
la función $f(x)$ es continua en $(-\infty, -2]$, $(-2, 0)$, $(0, 4)$ y en $(4, +\infty)$;

en $x = -2$ hay una discontinuidad (esencial) de salto;

en $x = 0$ la discontinuidad es removible;

y en $x = 4$ la discontinuidad también es esencial infinita.

49.



en $x = -2$ hay una discontinuidad esencial de salto;

en $x = 0$ hay una discontinuidad esencial infinita;

en $x = 2$ hay una discontinuidad removible.

CAPÍTULO

5

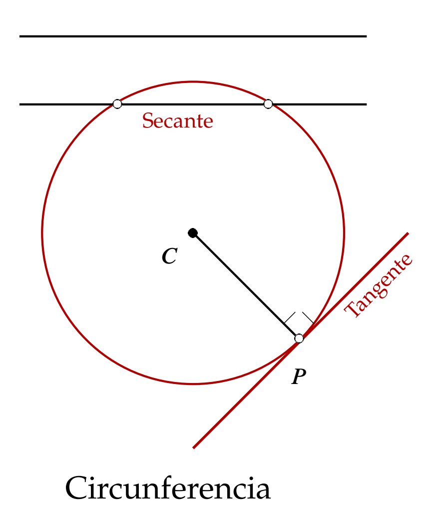
La derivada

[1]

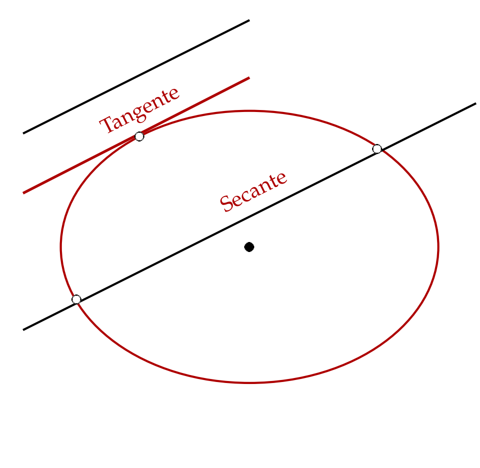
5.1 La recta tangente

Los griegos sabían que una recta en el mismo plano que una cónica (en el caso de la parábola o de la hipérbola, una recta no paralela a alguno de sus ejes) o la cortaba en dos puntos o la tocaba en un punto, o no la cortaba. A la recta que tocaba la cónica en un punto la llamaban tangente a la cónica en dicho punto.

Por ejemplo, en el caso de la circunferencia sabían también que el radio que pasa por el punto de contacto es perpendicular a tal tangente, por lo que no tenían problema para trazar la tangente a una circunferencia en cualquiera de sus puntos.

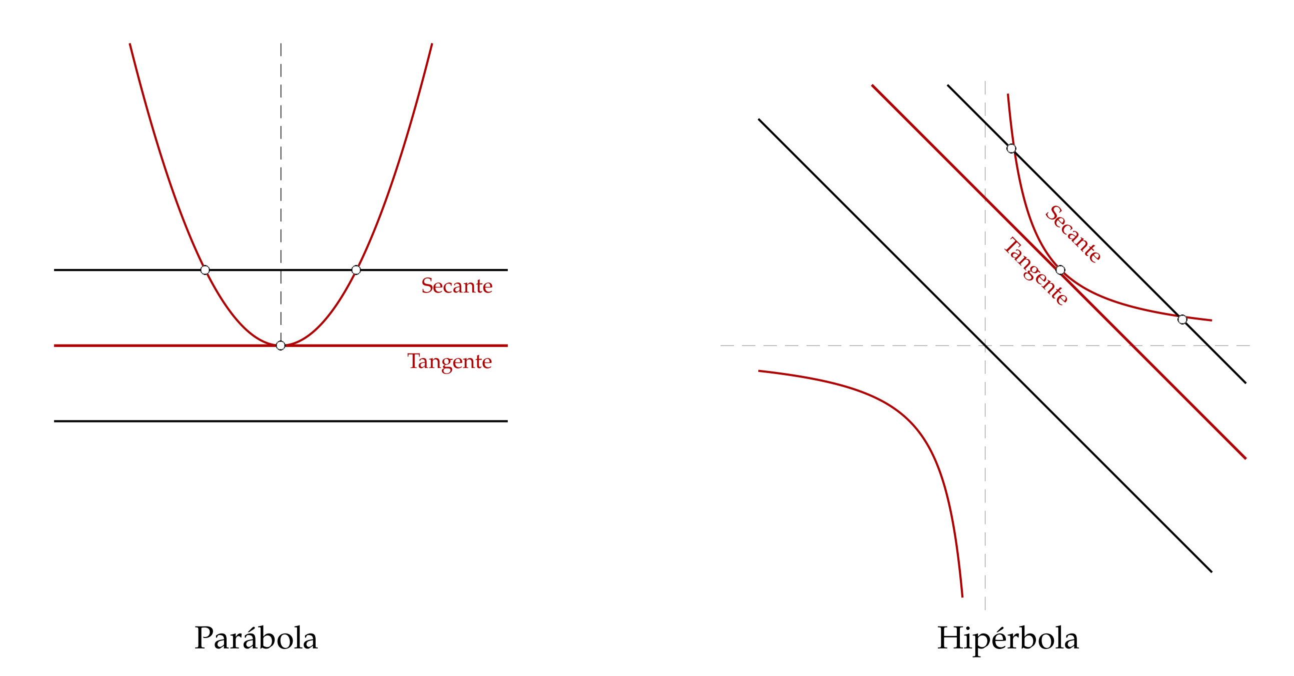


Circunferencia

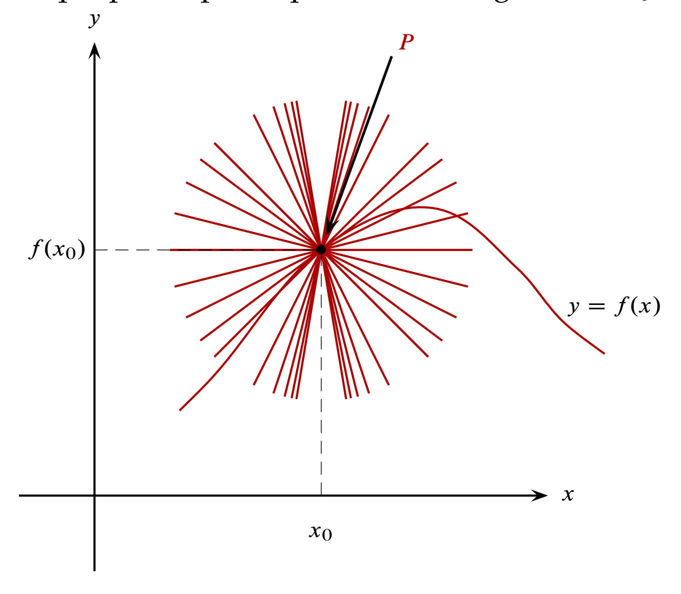


Elipse

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



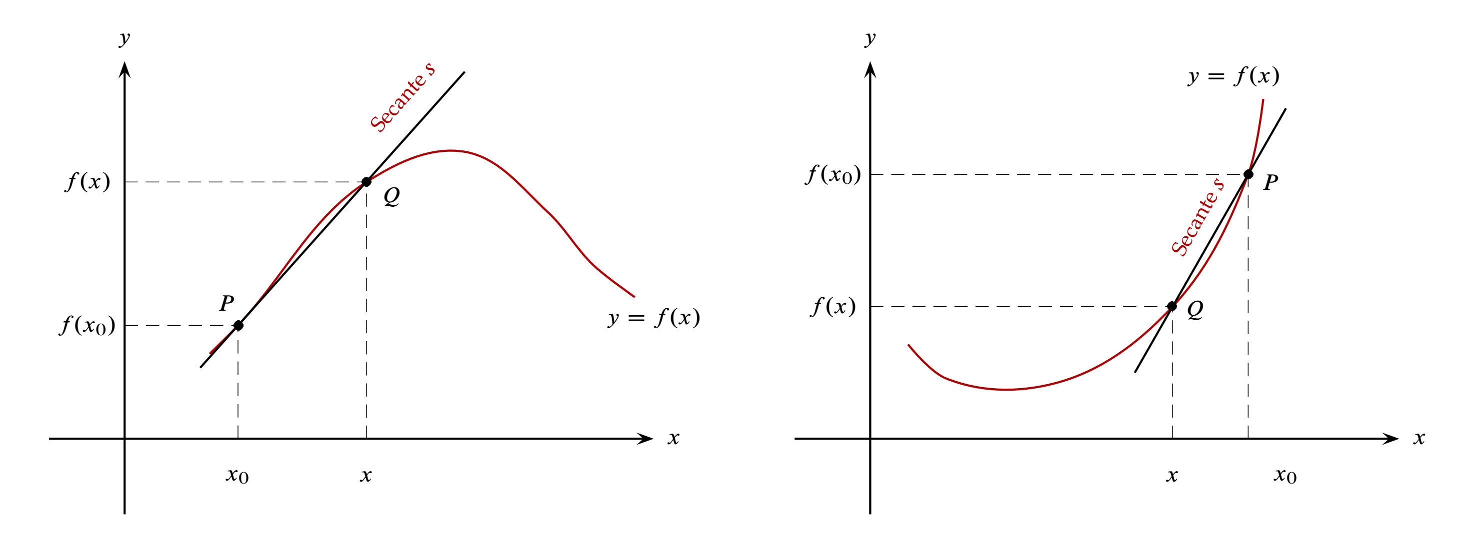
Pero lo descrito no se podía extender a otras curvas.
Pensemos ahora que tenemos la gráfica de una función f cualquiera y un punto $P[x_0, f(x_0)]$ fijo en ella y que queremos precisar a cuál recta, de todas las que pasan por el punto P, deberíamos llamarle la tangente a la curva (a la gráfica de la función f) en el punto.
Esto es, del haz infinito de rectas que pasan por el punto P de la gráfica de f:



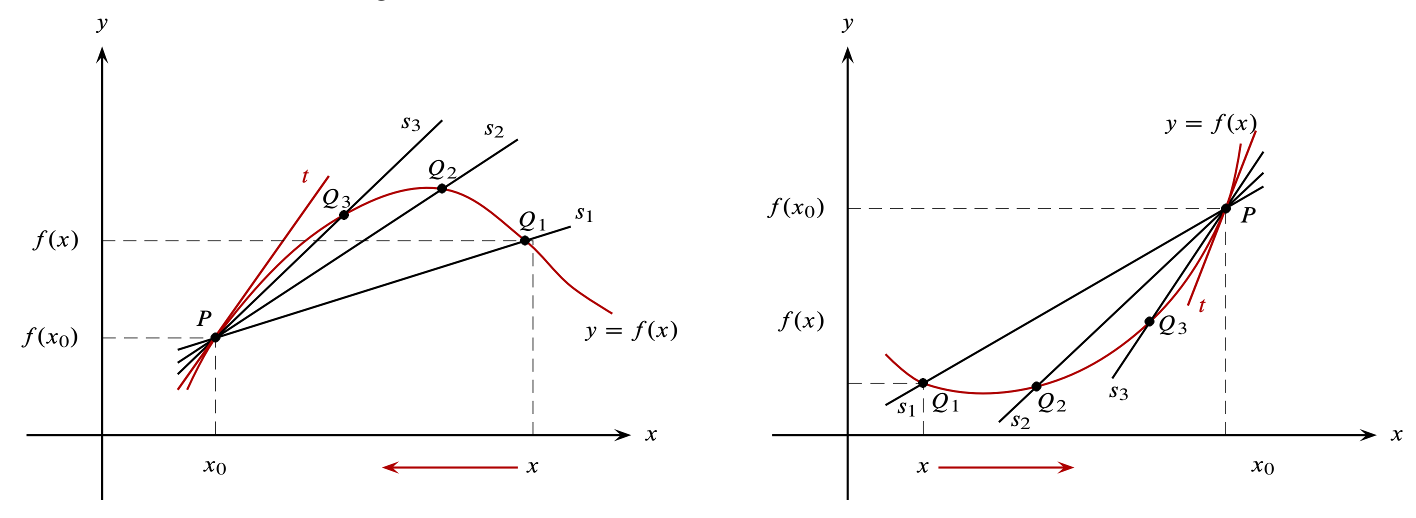
¿A cuál de ellas denominaremos recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P?
¿Cuál será la pendiente m de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P? Para contestar a esta pregunta es necesario calcular la pendiente de la recta tangente con el fin de conocerla.

Sea f una función definida en un cierto intervalo abierto que contiene a x_0 y sea $P[x_0, f(x_0)]$ un punto fijo en la gráfica de f.
Si tomamos cualquier otro punto $Q[x, f(x)]$ sobre la gráfica de la función, la recta secante s que pasa por P y Q corta a la gráfica de la función al menos en estos dos puntos, P y Q, por lo que no parece

sensato pensar en ella como la tangente, pero en cambio sí parece lógico pensar que si Q estuviese cerca de P, entonces la recta secante s se aproximaría la tangente buscada y podríamos entonces pensar en definir la pendiente m_t de la recta tangente en P como el límite de la pendiente de la recta secante s, cuando el punto Q tendiese al punto P.



Pero para que esto suceda, intuimos que debe existir en el punto P una única recta t que sea la posición límite de las rectas secantes s, cuando el punto Q tiende al punto fijo P. Supongamos la existencia de esta recta tangente t.

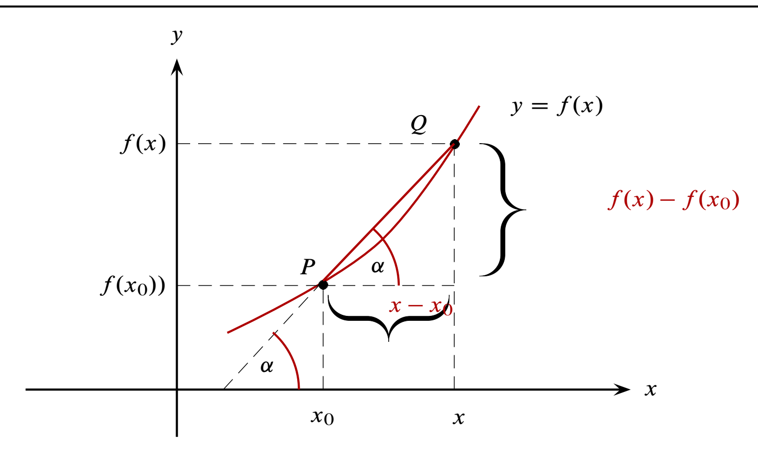


La pendiente de la recta secante s es

$$m_s = \tan\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

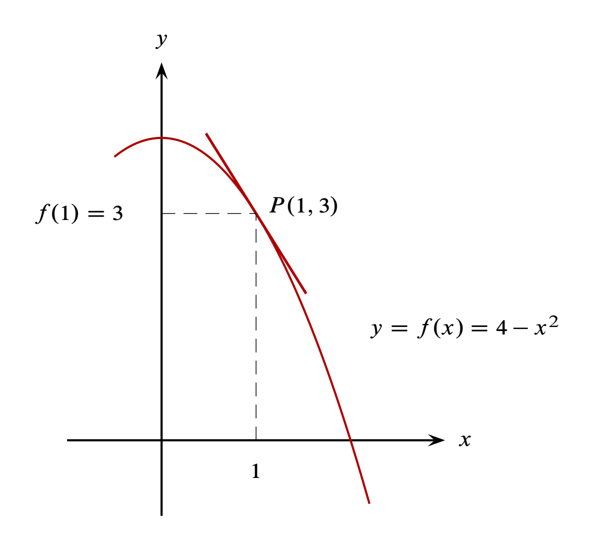
y como $x \to x_0$ cuando $Q \to P$, podríamos pensar que la pendiente m_t de la recta tangente t es

$$m_t = \lim_{Q \to P} m_s = \lim_{x \to x_0} m_s = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}.$$



Ejemplo 5.1.1 *El punto $P(1,3)$ está en la gráfica de la función $f(x) = 4 - x^2$. Considerando valores de x alrededor (cerca) de $x_0 = 1$, ubicar los puntos $Q[x, f(x)]$ resultantes y calcular las pendientes m_s de las rectas secantes s que pasan por P y por Q.*

▼ Ésta es la gráfica de f:



Se genera la tabla siguiente:

x	$f(x)$	$Q[x, f(x)]$	$x-1$	$f(x)-3$	$m_s = \dfrac{f(x)-3)}{x-1}$
0.5	3.75	(0.5,3.75)	-0.5	0.75	-1.5
0.8	3.36	(0.8,3.36)	-0.2	0.36	-1.8
0.9	3.19	(0.19,3.19)	-0.1	0.19	-1.9
0.99	3.0199	(0.99,3.0199)	-0.01	0.0199	-1.99
0.999	3.001999	(0.999,3.001999)	-0.001	0.001999	-1.999
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	3	$(1,3)$	0	0	-2
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
1.001	2.997999	(1.001,2.997999)	0.001	-0.002001	-2.001
1.01	2.9799	(1.01,2.9799)	0.01	-0.0201	-2.01
1.1	2.79	(1.1,2.79)	0.1	-0.21	-2.1
1.2	2.56	(1.2,2.56)	0.2	-0.44	-2.2
1.5	1.75	(1.5,1.75)	0.5	-1.25	-2.5

Se observa que las pendientes m_s tienden al número $m = -2$ cuando $x \to x_0 = 1$. Intuitivamente se puede decir que $m_t = -2$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 4 - x^2$ en el punto $P(1,3)$.

$$m_t = \lim_{Q \to P} m_s = \lim_{x \to x_0} m_s = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} =$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{(4 - x^2) - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{x - 1} = - \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = - \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} =$$
$$= - \lim_{x \to 1} (x + 1) = -2\,.$$

□

Concretemos el concepto de recta tangente:

- Se denomina recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P[x_0, f(x_0)]$ a aquella recta que pasa por P y que tiene pendiente

$$m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Notamos que se puede asegurar la existencia de la recta tangente siempre y cuando exista el límite anterior.

- Además la recta tangente tiene por ecuación: $y - f(x_0) = m_t(x - x_0)$.

  Ahora bien, si no existe el número m_t, podemos afirmar que de todas las rectas que pasan por el punto $P[x_0, f(x_0)]$ ninguna puede ser considerada como la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P. Esto es, la curva $y = f(x)$ no tiene recta tangente en el punto $P[x_0, f(x_0)]$.

Ejemplo 5.1.2 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, *calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de* f *en el punto* $[1, f(1)]$. *Obtener además la ecuación de dicha recta tangente.*

▼ Calculamos primero la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P[1, f(1)]$ & $Q[x, f(x)]$ con $x \neq 1$ (o sea $x - 1 \neq 0$):

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{-1}}{x-1} = \frac{\dfrac{1}{x-2} + 1}{x-1} = \frac{\dfrac{1 + x - 2}{x-2}}{x-1} = \frac{x-1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2}\,.$$

Calculamos m_t que es la pendiente de la recta tangente en el punto $P[1, f(1)] = P(1, -1)$:

$$m_t = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-2} = -1\,.$$

La ecuación de la recta tangente es

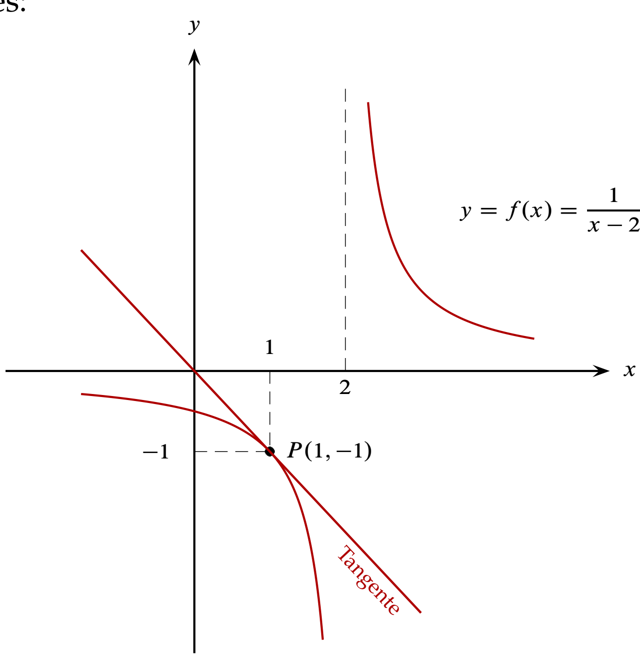
$$y - f(1) = m_t(x - 1)\,.$$

O sea,

$$y - (-1) = -1(x - 1) \;\Rightarrow\; y + 1 = -(x - 1) \;\Rightarrow\; y + 1 = -x + 1 \;\Rightarrow\; y = -x\,.$$

Lo cual nos da la recta con pendiente -1 y ordenada en el origen 0 (pasa por el origen, es la bisectriz del 2^o y 4^o cuadrante).

La gráfica correspondiente es:



□

Ejemplo 5.1.3 *Suponga que $y = f(x)$ es una recta, es decir, que f es una función lineal. Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en un punto arbitrario $P[x_0, f(x_0)]$.*

▼ Puesto que f es lineal, entonces $f(x) = mx + n$ donde m es la pendiente de la recta y n su ordenada en el origen. La pendiente de la recta tangente es

$$\begin{aligned} m_t &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{(mx + n) - (mx_0 + n)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} m\frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} m = m. \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de la tangente en el punto $P[x_0, f(x_0)] = P(x_0, mx_0 + n)$ es

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= m_t(x - x_0) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; y - (mx_0 + n) &= m(x - x_0) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; y &= mx - mx_0 + mx_0 + n \\ y &= mx + n. \end{aligned}$$

Por lo que la tangente a una recta en cualquiera de sus puntos es la propia recta.

□

- Si una curva $y = f(x)$ tiene tangente en uno de sus puntos $P[x_0, f(x_0)]$, llamaremos recta normal en ese punto a la recta que pasa por el punto y es perpendicular a la recta tangente.

  Recordemos que si la pendiente de una recta es $m \neq 0$, entonces una recta perpendicular a ella tiene por pendiente a la negativamente recíproca: $-\dfrac{1}{m}$.

  Si $m = 0$, la recta es horizontal y una perpendicular a ella es vertical por lo que su ecuación es de la forma $x = x_0$ (constante), donde x_0 es la abscisa del punto por donde pasa la normal.

- Si existe $m_t = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, entonces la ecuación de la recta normal a una curva $y = f(x)$ en el punto $P[x_0, f(x_0)]$ será:

$$\begin{aligned} y - f(x_0) = -\frac{1}{m_t}(x - x_0) \quad &\text{si } m_t \neq 0\,; \\ x = x_0 \quad &\text{si } m_t = 0\,. \end{aligned}$$

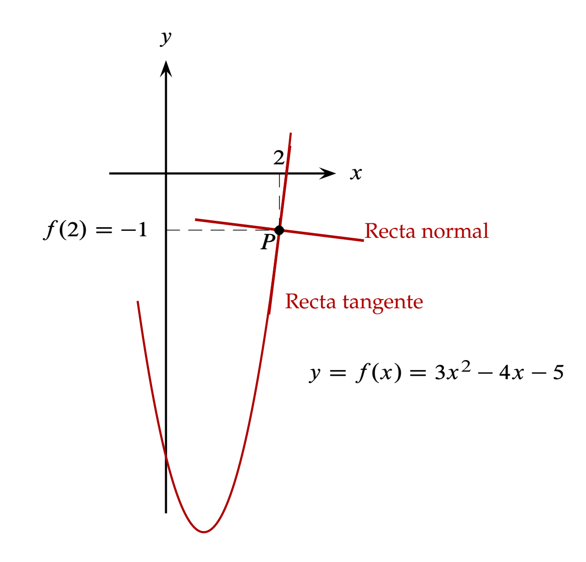
Ejemplo 5.1.4 *Obtener la ecuación de la recta normal a la curva $y = 3x^2 - 4x - 5$ en el punto de abscisa $x_0 = 2$.*

▼ Se puede verificar que el punto considerado es $P(2,-1)$ y que la pendiente de la recta tangente t a la curva $y = f(x)$ en P es 8.
Luego por ser $m_t = 8 \neq 0$, la pendiente de la recta normal n a la curva $y = f(x)$ en P es

$$m_n = \frac{-1}{m_t} = \frac{-1}{8} = -\frac{1}{8}\,.$$

Por lo tanto la ecuación de la recta normal a la curva en el punto $P(2,-1)$ es

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{m_t}(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - (-1) = -\frac{1}{8}(x-2) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y + 1 = -\frac{x}{8} + \frac{2}{8} \;\Rightarrow\; y = -\frac{x}{8} + \frac{1}{4} - 1 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{8}x - \frac{3}{4}\,.$$



□

Ejemplo 5.1.5 *Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 - 2x - 3$ en el punto de abscisa $x_0 = 1$.*

▼ La ordenada del punto considerado es

$$y_0 = y(x_0) = x_0^2 - 2x_0 - 3 = 1^2 - 2(1) - 3 = 1 - 5 = -4\,.$$

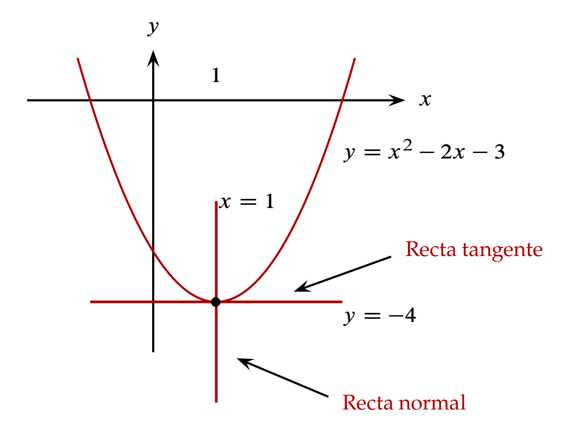
El punto considerado es $P(x_0, y_0) = P(1,-4)$, que es precisamente el vértice de la parábola $y = x^2 - 2x - 3$ (pues $x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4$).
La pendiente m_t de la recta tangente t a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(1,-4)$ es

$$m_t = \lim_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2 - 2x - 3) - (-4)}{x - 1} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x - 1) = 1 - 1 = 0\,.$$

La ecuación de la recta tangente t a la curva $y = x^2 - 2x - 3$ en el punto $P(1, -4)$ es

$$y - (-4) = 0(x - 1) \Rightarrow y + 4 = 0 \Rightarrow y = -4\,,$$

que representa a la recta horizontal que pasa por $P(1, -4)$.
La ecuación de la recta normal n a la curva $y = x^2 - 2x - 3$ en el punto $P(1, -4)$ es $x = x_0 \Rightarrow x = 1$ que representa a la recta vertical que pasa por el punto $P(1, -4)$.



□

Ejercicios 5.1.1 *Soluciones en la página* **??**

1. La función h tiene la siguiente tabla de valores:

x	$h(x)$
2.99	769.605
2.995	795.755
2.999	816.801
3	822.08
3.001	827.366
3.005	848.58
3.009	869.907

Calcule la pendiente de dos rectas secantes a la gráfica de h que pasen por el punto $P[3, h(3)]$.

2. La función h tiene la siguiente tabla de valores:

x	$h(x)$
-1.9	20.9701
-1.99	26.3638
-1.999	26.936
-2	27
-2.001	27.064
-2.01	27.6438
-2.1	33.7901

Calcule la pendiente de dos rectas secantes a la gráfica de h que pasen por el punto $Q[-2, h(-2)]$.

3. La gráfica de la función

$$f(t) = -t^2 + 2t + 3$$

pasa por los puntos $[1.999, f(1.999)]$ y $[2.001, f(2.001)]$.

Obtenga el valor de la pendiente de las dos rectas secantes a la gráfica de f que pasan por el punto $(2, 3)$ y por los puntos dados.

4. La recta tangente a la curva $y = x^3 + 2$ en el punto $P(-1, 1)$ tiene pendiente 3. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en el punto P.

5. La recta normal a la curva $y = \dfrac{2}{x}$ en el punto $Q(1, 2)$ tiene pendiente $\dfrac{1}{2}$. Determinar las ecuaciones de las rectas normal y tangente a la curva en el punto Q.

6. La recta tangente a la curva $y = x^2 - 2x$ en el punto $R(1, -1)$ tiene pendiente cero. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva dada en el punto R.

7. La recta normal a la curva $y = x^2 - 4x + 4$ en el punto P de abscisa 2 es vertical. Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva dada en el punto P.

8. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 3 - x^2$ en el punto $P(-1, 2)$.

9. Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 3x^2 - 6x$ en el punto Q de abscisa 1.

Ejercicios 5.1.1 *La recta tangente, página* **??**

1. La secante que pasa por los puntos $(2.999, 816.801)$ y $(3, 822.08)$ tiene pendiente $5\,279$;

   la secante que pasa por los puntos $(3.001, 827.366)$ y $(3, 822.08)$ tiene pendiente $5\,286$.

2. La secante que pasa por los puntos $[-2, h(-2)]$ y $[x_1, h(x_1)]$, $x_1 = -1.999$ tiene pendiente -64.38;

   la secante que pasa por los puntos $[-2, h(-2)]$ y $[x_2, h(x_2)]$, $x_2 = -2.001$ tiene pendiente -64.32 .

3. $m_1 = -1.999$; $\quad m_2 = -2.001$.

4. Recta tangente: $y = 3x + 4$;

   recta normal: $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$.

5. Recta normal: $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$;

   recta tangente: $y = -2x + 4$.

6. Recta tangente: $y = -1$;

   recta normal: $x = 1$.

7. Recta normal: $x = 2$;

   recta tangente: $y = 0$.

8. Recta tangente: $y = 2x + 4$;

   recta normal: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

9. Recta tangente: $y = -3$;

   recta normal: $x = 1$.

CAPÍTULO

5

La derivada

[1]

5.2 La derivada de una función

A continuación trataremos uno de los conceptos fundamentales del cálculo, que es el de la derivada. Este concepto es un límite que está estrechamente ligado a la recta tangente, a la velocidad instantánea y en general a la razón de cambio de una variable con respecto a otra.

- Cuando existe el límite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, lo denominamos la derivada de la función f en el punto x_0 y decimos que la función f es derivable en el punto x_0.

  Al límite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ lo denotamos por $f'(x_0)$. Es decir:

  $$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

  Alternativamente si hacemos $x - x_0 = h$ [una translación de coordenadas en que el nuevo origen es el punto $(x_0, 0)$] o sea $x = x_0 + h$, podemos escribir:

  $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

  A veces se usa Δx (incremento de x) en lugar de h; también se usa Δy en lugar de $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ en cuyo caso:

  $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

- Si no existe $f'(x_0)$, afirmamos que la función f no es derivable en x_0 o bien que la función f no tiene derivada en x_0

  Otras notaciones para $f'(x_0)$ son:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}, \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}, y'(x_0).$$

- A la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x} \overset{\text{def}}{=} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0}{h}$ se le denomina cociente diferencial.

Ejemplo 5.2.1 *Demostrar que la función $f(x) = 3x^2 - 4x - 5$ es derivable en $x_0 = 2$.*

▼ Demostraremos la existencia de $f'(x_0) = f'(2)$:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[3(2+h)^2-4(2+h)-5]-[3(2)^2-4(2)-5]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(4+4h+h^2)-8-4h-5-12+8+5}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{12+12h+3h^2-12-4h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8h+3h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(8+3h)}{h} = \lim_{h\to 0}(8+3h) = 8+3(0) = 8;$$

$$f'(2) = 8.$$

Luego $f'(2)$ existe, por lo cual f es una función derivable en $x_0 = 2$. Además la derivada de f en $x_0 = 2$ es $f'(2) = 8$.

□

Ejemplo 5.2.2 *Si $f(x) = 4 - x^2$, usando la definición de derivada, calcular $f'(a)$. Calcular también, usando lo anterior, $f'(-2)$ y comprobar que $f'(1) = -2$.*

▼ Calculamos el cociente diferencial:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{(4-x^2)-(4-a^2)}{x-a} = \frac{4-x^2-4+a^2}{x-a} = \frac{-x^2+a^2}{x-a} =$$

$$= \frac{-(x^2-a^2)}{x-a} = -\frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = -(x+a) \text{ si } x-a \neq 0, \text{ esto es, si } x \neq a.$$

Así:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}[-(x+a)] = -2a.$$

Hemos demostrado por lo tanto que, en todo punto $[a, f(a)] = (a, 4-a^2)$, la función es derivable y su derivada es $f'(a) = -2a$.

Concluimos con esto que $f'(x) = -2x$ para $x \in \mathbb{R}$.

Usando este resultado, tenemos que

$$f'(-2) = 4;$$
$$f'(1) = -2.$$

□

Ejemplo 5.2.3 *Sea $f(x) = \sqrt{2x+1}$. Encontrar $f'(a)$ con $a \in D_f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.*

▼ Calculamos el cociente diferencial del cual obtendremos el límite:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2a+1}}{x-a} = \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2a+1}}{x-a} \times \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1}} =$$
$$= \frac{(2x+1)-(2a+1)}{(x-a)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1})} = \frac{2(x-a)}{(x-a)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1})} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1}} \text{ si } x-a \neq 0, \text{ esto es, si } x \neq a.$$

Así:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2a+1}+\sqrt{2a+1}} = \frac{2}{2\sqrt{2a+1}} = \frac{1}{\sqrt{2a+1}}.$$

Esta última expresión sólo tiene sentido si $2a+1 > 0$, es decir, si $a > -\frac{1}{2}$. Vemos que $-\frac{1}{2} \in D_f$, pero ahí la función f no es derivable; de hecho ni siquiera está definida a la izquierda de $-\frac{1}{2}$. □

Ejemplo 5.2.4 *Demostrar que la función $g(x) = |\,x\,|$ no es derivable en el origen.*

▼ Demostraremos la no existencia de $g'(x_0)$ en $x_0 = 0$.

$$g'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|\,x\,|-|\,0\,|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|\,x\,|}{x} =?$$

Calculamos los límites laterales $\lim_{x\to 0^-} \frac{|\,x\,|}{x}$ & $\lim_{x\to 0^+} \frac{|\,x\,|}{x}$. Recuerde que ya lo hicimos en el capítulo Límites, ejemplo **??**.

1. $x \to 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |\,x\,| = -x \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\,x\,|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0}(-1) = -1.$$

2. $x \to 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |\,x\,| = x \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\,x\,|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\,x\,|}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+}\frac{|\,x\,|}{x} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0}\frac{|\,x\,|}{x} \text{ no existe } \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; g'(0) \text{ no existe } \;\Rightarrow\; \text{ la derivada de } g \text{ en } x_0 = 0 \text{ no existe.}$$

Por lo tanto la función g no es derivable en $x_0 = 0$. En $x = 0$ la gráfica de la función tiene un pico. En cualquier otro punto sí es derivable:

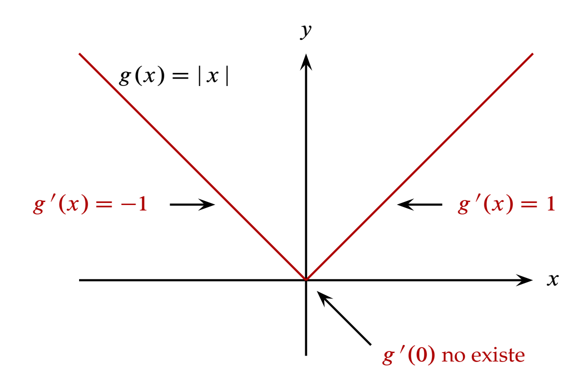
1. $g'(a) = 1$ si $a > 0$.

   Pues
   $$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{|\,x\,| - |\,a\,|}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1 \text{ si } x \text{ está cerca de } a \text{ pero } x \neq a\,.$$
   Por lo que
   $$g'(a) = \lim_{x\to a}\frac{g(x) - g(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} 1 = 1\,.$$

2. $g'(a) = -1$ si $a < 0$.

   Pues
   $$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{|\,x\,| - |\,a\,|}{x - a} = \frac{-x - (-a)}{x - a} =$$
   $$= \frac{-x + a}{x - a} = \frac{-(x - a)}{x - a} = -1 \text{ si } x \text{ está cerca de } a \text{ pero } x \neq a.$$
   Por lo que
   $$g'(a) = \lim_{x\to a}\frac{g(x) - g(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} -1 = -1\,.$$

Conocemos la gráfica de $g(x) = |\,x\,|$:



□

Ejemplo 5.2.5 *Si* $g(x) = \dfrac{1}{2 + x^2}$, *calcular* $g'(a)$ *para* $a \in \mathbb{R}$. *Calcular también, usando lo anterior,* $g'(-3)$ *y* $g'(2)$.

▼ Calculamos el cociente diferencial:

$$\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \frac{\dfrac{1}{2+(a+h)^2} - \dfrac{1}{2+a^2}}{h} =$$

$$= \frac{\dfrac{(2+a^2)-[2+(a+h)^2]}{[2+(a+h)^2](2+a^2)}}{h} =$$

$$= \frac{(2+a^2)-(2+a^2+2ah+h^2)}{h[2+(a+h)^2](2+a^2)} =$$

$$= \frac{2+a^2-2-a^2-2ah-h^2}{h[2+(a+h)^2](2+a^2)} = \frac{-2ah-h^2}{h[2+(a+h)^2](2+a^2)}$$

$$= \frac{h(-2a-h)}{h[2+(a+h)^2](2+a^2)} =$$

$$= \frac{-2a-h}{[2+(a+h)^2](2+a^2)} \text{ si } h \neq 0$$

Así:

$$g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2a-h}{[2+(a+h)^2](2+a^2)} = \frac{-2a}{(2+a^2)^2}.$$

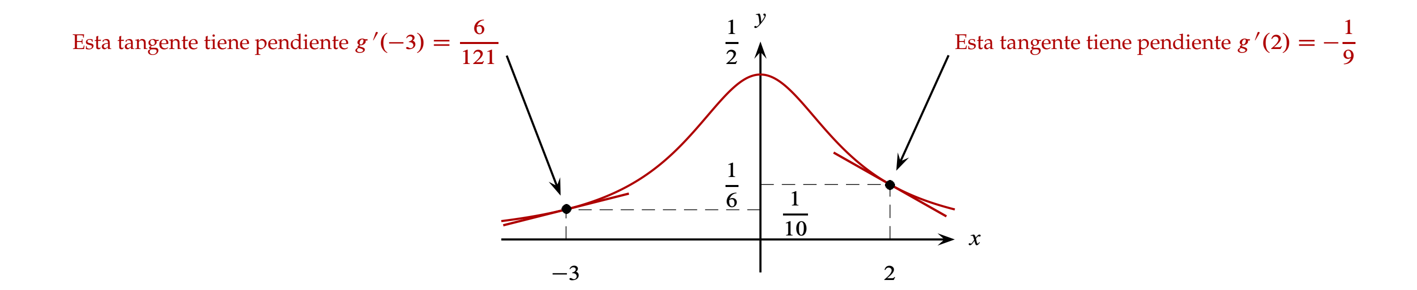
Hemos demostrado, por lo tanto, que en todo punto $[a, g(a)] = \left(a, \dfrac{1}{2+a^2}\right)$ de la gráfica de la función g, la pendiente de la recta tangente vale $g'(a) = \dfrac{-2a}{(2+a^2)^2}$.

Concluimos con esto que $g'(x) = \dfrac{-2x}{(2+x^2)^2}$ para $x \in \mathbb{R}$.

Usando este resultado:

$$g'(-3) = \frac{-2(-3)}{[2+(-3)^2]^2} = \frac{6}{121};$$

$$g'(2) = \frac{-4}{36} = -\frac{1}{9}.$$



□

5.2.1 La regla de los cuatro pasos

Considerando la definición de la derivada de $y = f(x)$ en x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

se puede decir que, para obtener la derivada de f en x_0, tenemos que calcular

1. $f(x)$ o bien $f(x_0 + h)$ además de $f(x_0)$.

2. El incremento de la función:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0).$$

3. El cociente de incrementos o cociente diferencial:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

4. El límite del cociente diferencial:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

A este proceso para calcular la derivada de una función algunos autores lo denominan la "regla de los cuatro pasos".

Ejemplo 5.2.6 *Utilizando la regla de los cuatro pasos, calcular la derivada de la función*

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 6x + 7 \text{ en } x = a.$$

▼ Utilizamos la igualdad $f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

1. $f(a) = 4a^3 - 5a^2 - 6a + 7$.

2.

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x) - f(a) = \\ &= (4x^3 - 5x^2 - 6x + 7) - (4a^3 - 5a^2 - 6a + 7) = \\ &= 4(x^3 - a^3) - 5(x^2 - a^2) - 6(x - a).\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \\ &= \frac{4(x^3 - a^3) - 5(x^2 - a^2) - 6(x - a)}{x - a} = \\ &= \frac{4(x - a)(x^2 + xa + a^2) - 5(x - a)(x + a) - 6(x - a)}{(x - a)} = \\ &= 4(x^2 + ax + a^2) - 5(x + a) - 6 \text{ para } x \neq a.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a}[4(x^2+ax+a^2)-5(x+a)-6] = \\ &= 4(a^2+a^2+a^2)-5(a+a)-6 = \\ &= 4(3a^2)-5(2a)-6 = 12a^2-10a-6\,.\end{aligned}$$

Entonces, $f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 12a^2-10a-6$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

□

Ejemplo 5.2.7 *Mediante la regla de los cuatro pasos, calcular $f'(x)$ para $f(x)=\sqrt{x-1}$.*

▼ Para calcular $f'(x)$ en un $x \in D_f$ arbitrario utilizaremos la igualdad

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,.$$

1. $f(x+h) = \sqrt{x+h-1}\,.$

2. $\Delta y = f(x+h)-f(x) = \sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}\,.$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}}{h}\,.$

4. $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$

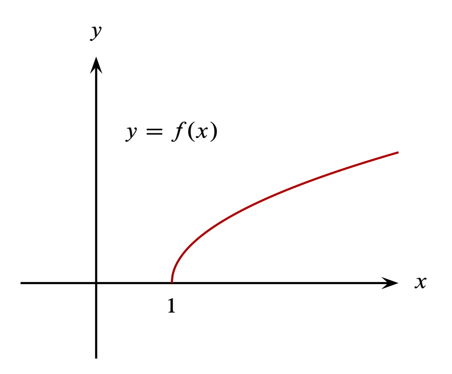
$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}}\right) = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h-1})^2-(\sqrt{x-1})^2}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-1)-(x-1)}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-1-x+1}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,.\end{aligned}$$

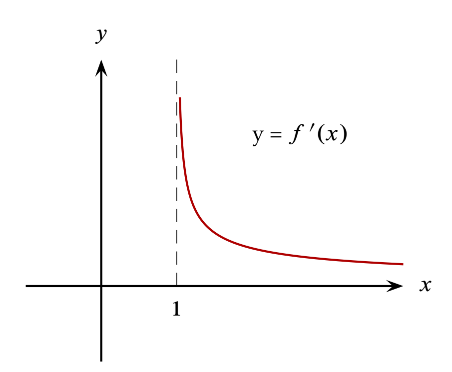
Entonces,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \text{ o bien } \frac{d}{dx}\sqrt{x-1} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,.$$





Esta derivada existe para cada $x > 1$. Aunque $1 \in D_f = [1, +\infty)$, observe que f no está definida a la izquierda de 1 y por lo tanto no tiene sentido calcular la derivada de f en 0, pues no tiene sentido calcular el límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}\,.$$

□

Ejercicios 5.2.1 *Soluciones en la página 10*

1. Sea $h(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+2}}$. Usando la definición de la derivada, calcular $h'(a)$.
   Calcular también, usando lo anterior, $h'(0)$ así como $h'(8)$.

2. Utilizando la regla de los cuatro pasos, calcular la derivada de la función $f(x) = \dfrac{4}{3x}$ en:
   a. $x = a$.
   b. $x = 2$.
   c. $x = -\dfrac{2}{3}$.
   Obtener además:
   d. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P de abscisa 2;
   e. La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto Q de abscisa $-\dfrac{2}{3}$.

3. Para la función $g(x) = \sqrt{2x-1}$, y mediante la regla de los cuatro pasos, determinar:
   a. $g'(a)$.
   b. $g'\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

c. $g'(3)$.

Obtener además:

d. La ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{2x-1}$ en el punto P de abscisa $\frac{5}{2}$;

e. La ecuación de la recta normal a la curva $y = \sqrt{2x-1}$ en el punto Q de abscisa 3.

Ejercicios 5.2.1 *La derivada de una función, página 8*

1. $h'(a) = -\dfrac{9}{2}\dfrac{1}{(3a+2)^{\frac{3}{2}}}$;

   $h'(0) = -\dfrac{9}{4\sqrt{2}}$;

   $h'(8) = -\dfrac{9}{52\sqrt{26}}$.

2. a. $f'(a) = \dfrac{-4}{3a^2}$;

   b. $f'(2) = -\dfrac{1}{3}$;

   c. $f'(-\frac{2}{3}) = -3$;

   d. recta tangente: $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$;

   e. recta normal: $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{16}{9}$.

3. a. $g'(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2a-1}}$;

   b. $g'(\frac{5}{2}) = \dfrac{1}{2}$;

   c. $g'(3) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$;

   d. recta tangente: $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}$;

   e. recta normal: $y = -\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}$.

CAPÍTULO

5

La derivada

[1]

5.3 Velocidad instantánea

Si un móvil recorre 150 km en 2 horas, su velocidad promedio es

$$\overline{v} = v_{\text{media}} \overset{\text{def}}{=} \frac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{150\,\text{km}}{2\,h} = 75\,\text{km/h}\,.$$

Pero no conocemos la velocidad que lleva el móvil en un punto arbitrario de su trayectoria.
Pensemos ahora que $s = s(t)$ es una función que le asigna a cada tiempo t un punto en un eje, es decir, la función de posición de un móvil.
Para $t \neq a$, la velocidad promedio que tiene el móvil en el intervalo de tiempo $[a, t]$ o bien $[t, a]$ es

$$\overline{v} = v_{\text{media}} = \frac{s(t) - s(a)}{t - a} = \frac{s(a) - s(t)}{a - t}\,.$$

Parece natural pensar que mientras más próximo esté t al número a, la velocidad promedio en el intervalo entre a & t se parecerá más a la velocidad que lleva el móvil en el instante a. Ejemplifiquemos numéricamente esta idea:

Ejemplo 5.3.1 *Sea $s(t) = 5t^2$ la posición en metros de un cuerpo t segundos después de haber partido del reposo.*

▼ Si $a = 2$ s, entonces $s(a) = 5a^2 = 5(2)^2 = 20$ m. Además:

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Si	*entonces*				
t	$s(t)$	$[a,t]$	$t-a$	$s(t)-s(a)$	$\bar{v}=\dfrac{s(t)-s(a)}{t-a}$
3	45	$[2,3]$	1	25	25 m/s
2.5	31.25	$[2,2.5]$	0.5	11.25	22.5 m/s
2.2	24.20	$[2,2.2]$	0.2	4.20	21 m/s
2.1	22.05	$[2,2.1]$	0.1	2.05	20.5 m/s
2.01	20.2005	$[2,2.01]$	0.01	0.2005	20.05 m/s
2.001	20.020005	$[2,2.001]$	0.001	0.020005	20.005 m/s

Notamos que cuanto más se acerca t al número $a=2$, la velocidad promedio $\bar{v}$ se acerca cada vez más al número $v=20$. Es decir, $\bar{v}\to 20$ m/s cuando $t\to 2$ s.
Intuitivamente podemos decir que la velocidad instantánea $v(t)$ en $t=2$ s es $v=20$ m/s. □

- Definimos la velocidad instantánea en a, denotada por $v(a)$, como

$$v(a)\overset{\text{def}}{=}\lim_{t\to a}\frac{s(t)-s(a)}{t-a}=s'(a)$$

o bien

$$v(a)\overset{\text{def}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{s(a+h)-s(a)}{h}=s'(a)\,.$$

Ejemplifiquemos esta definición.

Ejemplo 5.3.2 *Sea $s(t)=8+20t-5t^2$ la posición (en metros) de un móvil en el instante (segundo) $t\geq 0$. Determinar la velocidad instantánea $v(t)$ del móvil en el instante:*

1. *t_0 arbitrario;*
2. *$t_0=1$ s;*
3. *$t_0=2$ s;*
4. *$t_0=3$ s.*

▼

1. Ya que $v(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$, entonces

$$
\begin{aligned}
v(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{(8 + 20t - 5t^2) - (8 + 20t_0 - 5t_0^2)}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{8 + 20t - 5t^2 - 8 - 20t_0 + 5t_0^2}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{20(t - t_0) - 5(t^2 - t_0^2)}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{20(t - t_0) - 5(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \to t_0} [20 - 5(t + t_0)] = 20 - 5(t_0 + t_0) = 20 - 10t_0 \,.
\end{aligned}
$$

2. $v(t_0 = 1) = 20 - 10(1) = 10 \;\Rightarrow\; v(1) = 10\ \text{m/s}$.

3. $v(t_0 = 2) = 20 - 10(2) = 0 \;\Rightarrow\; v(2) = 0\ \text{m/s}$.

4. $v(t_0 = 3) = 20 - 10(3) = -10 \;\Rightarrow\; v(3) = -10\ \text{m/s}$.

   El signo $-$ indica que el móvil se desplaza en sentido contrario al del eje.

□

Ejemplo 5.3.3 *Calcular la velocidad instantánea de una partícula cuya posición está dada por la función:* $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ *donde* a, b, c & d *son constantes.*

▼ La velocidad instantánea en cualquier tiempo t_0 es

$$
\begin{aligned}
v(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{(at^3 + bt^2 + ct + d) - (at_0^3 + bt_0^2 + ct_0 + d)}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{a(t^3 - t_0^3) + b(t^2 - t_0^2) + c(t - t_0)}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{a(t - t_0)(t^2 + tt_0 + t_0^2) + b(t - t_0)(t + t_0) + c(t - t_0)}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \to t_0} \left[a(t^2 + t_0t + t_0^2) + b(t + t_0) + c\right] = \\
&= a(t_0^2 + t_0^2 + t_0^2) + b(t_0 + t_0) + c = \\
&= a(3t_0^2) + b(2t_0) + c \,.
\end{aligned}
$$

Esto es, en cualquier instante $t \geq 0$

$$
v(t) = a(3t^2) + b(2t) + c = 3at^2 + 2bt + c \,.
$$

□

Razón de cambio

- Ahora bien la función $s = s(t)$ puede tener cualquier otra interpretación, por ejemplo, puede ser la cantidad de una sustancia, el número de individuos que hay en cierta población, la carga de un capacitor eléctrico, o bien el costo de producir algo, etc. La diferencia $s(t) - s(a)$ es el incremento de tal cantidad o tal número o tal carga, o tal costo, etc. La velocidad promedio $\overline{v}$ con que cambia la cantidad considerada será la razón promedio de cambio o bien razón media de cambio de la función $s = s(t)$ entre a & t.

  Es decir,

  $$\overline{v} = v_{\text{media}} = \frac{s(t) - s(a)}{t - a} = \frac{s(a + h) - s(a)}{h}$$

  y la razón de cambio de $s(t)$ con respecto a t o bien la velocidad de cambio de $s(t)$ será la velocidad instantánea, o sea, la derivada de $s(t)$.

  Así pues si P es un punto que se mueve sobre un eje y $s = s(t)$ es su función de posición, entonces la velocidad instantánea $v(t)$ de P es la derivada $s'(t)$ (de la función de posición); luego $v(t)$ es la razón de cambio de $s(t)$ con respecto al tiempo t; o simplemente la velocidad de cambio de $s(t)$.

  Así también la aceleración $a(t)$ de P en el instante t se define como la velocidad de cambio de la velocidad instantánea $v(t)$; es decir, es la derivada de la derivada o segunda derivada de la función de posición $s(t)$ que denotamos por $s''(t)$. Esto es,

  $$a(t) \stackrel{\text{def}}{=} v'(t) = [s'(t)]' = s''(t)\,.$$

Ejemplo 5.3.4 *Si $s(t) = t^2 - 4t - 5$ es la función de posición de una partícula que se mueve en un eje horizontal con sentido de izquierda a derecha.*

1. *¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 0$?*
2. *¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 7$?*

▼

1. ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 0$?

   $$s(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t - 5)(t + 1) = 0 \Rightarrow t = 5 \text{ o bien } t = -1\,.$$

   Es decir, la partícula pasa por el origen en el instante $t = 5$ ya que $t = -1 < 0$ pertenece en todo caso al pasado.

   La velocidad de la partícula para todo t es

   $$v(t) = s'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(t + h)^2 - 4(t + h) - 5] - (t^2 - 4t - 5)}{h} =$$
   $$= \lim_{h \to 0} \frac{2th + h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \to 0}(2t + h - 4) = 2t - 4\,.$$

   Así calculamos la velocidad para $t = 5$

   $$v(5) = 2(5) - 4 = 6\,.$$

   Para $t = 5$ la partícula se moverá hacia la derecha.

2. ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 7$?

$$s(t) = 7 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 7 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 12 = 0\,.$$

Vamos a encontrar las raíces de esta cuadrática:

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-12)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \begin{cases} \dfrac{4+8}{2} = 6 \\ \dfrac{4-8}{2} = -2\,. \end{cases}$$

Así calculamos la velocidad para el tiempo $t = 6$

$$v(6) = 2(6) - 4 = 8$$

Para $t = 6$ la partícula se moverá hacia la derecha.

El instante $t = -2 < 0$ no se considera.

□

Ejemplo 5.3.5 *Si $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8$ es la función de posición de una partícula que se mueve en un eje horizontal dirigido de izquierda a derecha.*

1. *¿Cuál es la posición de la partícula cuando $v(t) = 0$?*
2. *¿Cuál es la posición de la partícula cuando $a(t) = 0$?*

▼

1. La velocidad instantánea es, :

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t\,.$$

Ahora bien

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow 3t(t-2) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ o bien } t = 2\,.$$

Calculamos la posición de la partícula en esos tiempos:

$$s(0) = 8\,.$$

$$s(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 8 = 8 - 12 + 8 = 4\,.$$

2. Observamos que:

$$a(t) = v'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(t+h)^2 - 6(t+h) - 3t^2 + 6t}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6th + 3h^2 - 6h}{h} = \lim_{h \to 0} (6t + 3h - 6) = 6t - 6\,.$$

También $a(t) = 6t - 6$.

Por consiguiente

$$a(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1\,.$$

Calculamos la posición de la partícula en ese tiempo:

$$s(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 8 = 1 - 3 + 8 = 6\,.$$

□

Ejemplo 5.3.6 *Dos partículas se mueven a lo largo de un eje horizontal. Al final de t segundos sus distancias a partir del origen están dadas por*

$$s_1(t) = 4t - 3t^2 \ \& \ s_2(t) = t^2 - 2t, \textit{ respectivamente}\,.$$

1. *¿Cuándo tienen la misma velocidad?*
2. *¿Cuándo tienen la misma rapidez?.*

   (La rapidez de una partícula es el valor absoluto o magnitud de su velocidad.)
3. *¿Cuándo tienen la misma posición?*

▼

1. Calculamos la velocidad de ambas partículas:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{s_1(t+h) - s_1(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(t+h) - 3(t+h)^2 - 4t + 3t^2}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4h - 6ht}{h} = \lim_{h\to 0}(4 - 6t) = 4 - 6t; \\ v_1(t) &= s_1'(t) = 4 - 6t\,. \\ v_2(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{(t+h)^2 - 2(t+h) - t^2 + 2t}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2th - 2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2t + h - 2) = 2t - 2\,; \\ v_2(t) &= s_2'(t) = 2t - 2\,. \end{aligned}$$

Así, $v_1(t) = v_2(t) \iff 4 - 6t = 2t - 2 \iff 6 = 8t \iff t = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$ s.

2.

$$|\,v_1(t)\,| = |\,v_2(t)\,| \iff |\,4 - 6t\,| = |\,2t - 2\,|\,.$$

$t = 1$ no satisface esta última ecuación con valores absolutos.

$$\begin{aligned} &\text{Si } t \neq 1 \Rightarrow t - 1 \neq 0 \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow |\,4 - 6t\,| = |\,2t - 2\,| \iff \frac{|\,4 - 6t\,|}{|\,2t - 2\,|} = 1 \iff \\ &\qquad \iff \left|\frac{4 - 6t}{2t - 2}\right| = 1 \iff \frac{4 - 6t}{2t - 2} \pm 1 \iff \\ &\qquad \iff 4 - 6t = \pm(2t - 2) \iff 4 - 6t = 2t - 2 \text{ o bien } 4 - 6t = -2t + 2 \iff \\ &\qquad \iff 8t = 6 \text{ o bien } 4t = 2 \iff t = \frac{6}{8} \text{ o bien } t = \frac{2}{4} \iff \\ &\qquad \iff t = \frac{3}{4} \text{ o bien } t = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

3.

$$s_1(t) = s_2(t) \Leftrightarrow 4t - 3t^2 = t^2 - 2t \Leftrightarrow 4t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2t(2t-3) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ o bien } t = \frac{3}{2}.$$

□

Ejemplo 5.3.7 *Una partícula se mueve en línea recta y su posición está dada por la función*

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

donde $t \geq 0$ se mide en segundos y s en metros.

1. *Calcular la velocidad de la partícula en cualquier instante t y en $t = 2$ s.*
2. *¿Cuándo la partícula está en reposo?*
3. *¿Cuándo la partícula se mueve hacia la derecha?*
4. *Calcular la distancia total recorrida durante los primeros 5 s.*
5. *Calcular la aceleración en cualquier instante t y después de 3 s.*
6. *¿Cuándo la aceleración de la partícula es nula?*

▼

1. La velocidad instantánea en $t \geq 0$ es (de acuerdo con el ejemplo 5.3.3)

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = f'(t) = 3t^2 - 12t + 9 \text{ m/s}.$$

Entonces en $t = 2$ s la velocidad instantánea es

$$v(2) = f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = 12 - 24 + 9 = -3 \text{ m/s}.$$

2. La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$, lo cual sucede cuando

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(t^2 - 4t + 3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(t-1)(t-3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 = 0 \\ t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3. \end{cases}$$

Es decir, la partícula está en reposo cuando $t = 1$ y cuando $t = 3$.

3. La partícula se mueve hacia la derecha cuando $v(t) > 0$, lo que sucede cuando

$$\begin{aligned} v(t) = 3t^2 - 12t + 9 > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3(t^2 - 4t + 3) > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (t-1)(t-3) > 0\,. \end{aligned}$$

Desigualdad que se cumple cuando

$$\begin{array}{rcr} t-1<0\ \&\ t-3<0 & \text{o bien} & t-1>0\ \&\ t-3>0\,; \\ t<1\ \&\ t<3 & \text{o bien} & t>1\ \&\ t>3\,; \\ t<1 & \text{o bien} & t>3\,. \end{array}$$

Es decir, cuando

$$0 \le t < 1 \qquad \text{o bien} \qquad t > 3\,.$$

Esto es, hay movimiento hacia la derecha en los intervalos de tiempo

$$[0, 1) \text{ y } (3, +\infty)\,.$$

4. Para calcular la distancia total recorrida durante los primeros 5 s debemos tomar en cuenta que:

   a. En $t = 0$, la posición es $f(0) = 0$.
   b. Cuando $0 < t < 1$, la partícula se mueve hacia la derecha y se detiene en $t = 1$ cuando su posición es $f(1) = 4$ m, lo que indica que durante el primer segundo la partícula recorre 4 m.
   c. Cuando $1 < t < 3$, la partícula se mueve hacia la izquierda y se detiene en $t = 3$, cuando su posición es $f(3) = 0$, lo que indica que en este intervalo de tiempo la partícula retrocede desde $f(1) = 4$ m hasta $f(3) = 0$ m, lo cual nos permite afirmar que entre $t = 1$ s y $t = 3$ s, la partícula recorrió de nuevo 4 m.
   d. Finalmente, cuando $3 < t \le 5$, la partícula se mueve hacia la derecha desde la posición $f(3) = 0$ hasta la posición $f(5) = 20$ m, lo que indica que en el intervalo de tiempo $3 < t \le 5$ la partícula recorre 20 m.

   Por lo tanto, la distancia total recorrida durante los primeros 5 s es: $d = 4 + 4 + 20$ m $= 28$ m.

5. La aceleración (instantánea) es la rapidez de cambio de la velocidad (instantánea), por lo cual

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(3t^2 - 12t + 9) = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3(t+h)^2 - 12(t+h) + 9 - 3t^2 + 12t - 9}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{6th + h^2 - 12h}{h} = \lim_{h\to 0}(6t + h - 12) = 6t - 12\,. \end{aligned}$$

   (Medida en m/s^2 es la aceleración en el instante (segundo) $t \ge 0$.)

   Entonces en $t = 3$ segundos la aceleración instantánea es $a(3) = 6\cdot 3 - 12 = 18 - 12 = 6$ m/s^2.

6. La aceleración de la partícula es nula cuando $a(t) = 0$, lo que sucede cuando

$$a(t) = 6t - 12 = 0 \Leftrightarrow 6t = 12 \Leftrightarrow t = 2\,.$$

Es decir, la aceleración nula ocurre después de $t = 2$ s de haberse iniciado el movimiento; y precisamente en el punto medio del intervalo $1 \leq t \leq 3$, donde la partícula pasa de una velocidad $v(1) = 0$ a la velocidad $v(3) = 0$.

□

Ejercicios 5.3.1 *Soluciones en la página 12*

1. Si se lanza verticalmente un objeto hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 320 pies/s, entonces su distancia h arriba del suelo está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 320t\,.$$

   a. Encuentre las velocidades promedio durante los intervalos $[3, 4]$, $[3.5, 4]$, $[4, 5]$, $[4, 4.5]$.
   b. Calcule $v(4)$, usando la definición de la derivada.

2. En un movimiento rectilíneo, la posición de una partícula a los t segundos es $s(t) = 2t^2 - 3t + 1$.

   a. Encontrar la velocidad promedio en el recorrido efectuado entre los 3 y 5 s.
   b. Encontrar la velocidad instantánea a los 3 s. Obtenerla mediante la definición de la derivada.

3. En un movimiento rectilíneo, la posición de un automóvil a las t horas es:

$$s(t) = 50t - \frac{7}{t+1}\ \text{km}.$$

   a. ¿Cuál es la velocidad promedio durante las 2 primeras horas?
   b. ¿Cuál es la velocidad instantánea a las 2 horas? Obtenerla mediante la definición de la derivada.

4. Un caracol baja por una pared. Su posición a las t horas está dada por $s(t) = 1 - 0.2\sqrt{t}$ m. Usando la definición de la derivada, calcular su velocidad instantánea para $t = 4$ h.

5. Se deja caer una pelota desde lo alto de un edificio; la posición de la pelota en el tiempo t es

$$s(t) = 78.4 - 4.9t^2.$$

   a. Calcule la velocidad instantánea en el tiempo $t = 4$, usando la definición de la derivada.
   b. Calcule la posición de la pelota en $t = 4$.
   c. Dé una interpretación de su resultado.

6. Un helicóptero se está elevando verticalmente desde el suelo. La distancia del helicóptero al suelo t segundos después del despegue es $s(t)$ metros, donde

$$s(t) = t^2 + t\,.$$

a. ¿En qué instante se encuentra el helicóptero a 20 m?

b. Use la definición de la derivada para determinar la velocidad instantánea del helicóptero cuando éste se encuentra a 20 m.

7. Un objeto se lanza hacia arriba según la ley de movimiento:

$$s(t) = 15t - 4.9t^2 \,,$$

donde $s(t)$ denota la posición en metros del objeto a los t segundos. Calcular la velocidad instantánea del objeto a los 2 s.

8. Se lanza una pelota al aire desde un puente. La posición de la pelota en el tiempo $t \geq 0$ está dada por

$$y(t) = -16t^2 + 50t + 36 \,.$$

a. ¿Cuál es la altura del puente?

b. ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota cuando se encuentra a 70 pies sobre el suelo?

9. El desplazamiento en metros de una partícula que se mueve en línea recta está dado por

$$s(t) = t^2 - 6t + 10 \,,$$

donde el tiempo t se mide en segundos.

a. Calcule la velocidad instantánea en el tiempo t usando la definición de la derivada.

b. Determine la velocidad instantánea cuando la posición de la partícula es 10 m.

10. Se lanza una pelota hacia arriba. La función de posición de la pelota en el tiempo t es:

$$s(t) = 5t - 10t^2 \,.$$

a. Calcule la velocidad instantánea (v) en el tiempo $t = 1/4$ usando la definición de la derivada.

b. Calcule la posición de la pelota en el instante $t = 1/4$.

c. Dé una interpretación de sus resultados.

11. La ley de Newton de la gravitación afirma que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre otro de masa M es:

$$F = \frac{GmM}{r^2} \,,$$

donde G es la constante gravitacional y donde r es la distancia entre los cuerpos.

a. Si los cuerpos se están moviendo, encuentre $\dfrac{dF}{dr}$ y explique su significado.

b. Suponga que se sabe que la Tierra atrae un objeto con una fuerza que disminuye a razón de 2 N/km, cuando $r = 20\,000$ km. ¿Con qué rapidez cambia esa fuerza cuando $r = 10\,000$ km?

12. Si se lanza verticalmente un objeto hacia arriba desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 320 pies/s, entonces su distancia h arriba del suelo después de t segundos está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 320t\ .$$

   a. ¿Para qué valores de t el objeto estará a más de 1 536 pies sobre el suelo?
   b. Calcule $v(4)$ usando la definición de velocidad instantánea.
   c. ¿A qué velocidad impactará contra el suelo y en qué momento?

13. Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 25 m/s, entonces su altura después de t segundos es

$$s(t) = -5t^2 + 25t\ .$$

   a. Determine el dominio de la función.
   b. ¿Para qué valores de t la pelota se encuentra a más de 30 m del suelo?
   c. ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está a 20 m?

Ejercicios 5.3.1 *Velocidad instantánea, página 9*

1. a. La velocidad promedio en $[3, 4]$ es 208 pies/s;
   la velocidad promedio en $[3.5, 4]$ es 200 pies/s;
   la velocidad promedio en el $[4, 5]$ es 176 pies/s;
   la velocidad promedio en el $[4, 4.5]$ es 184 pies/s;
   b. $v(4) = 192$ pies/s .
2. a. 13 unidades/s;
   b. $v(3) = 9$ unidades/s .
3. a. $52.\overline{3}$ km/h;
   b. $50.\overline{7}$ km/h .
4. -0.05 m/h.
5. a. La velocidad en el instante $t = 4$ es -39.2;
   b. $s(4) = 0$;
   c. al llegar al suelo tiene una velocidad de -39.2.
6. a. Cuando $t = 4$ s;
   b. $v(4) = 9$ m/s.
7. -4.6 m/s .
8. a. 36 pies;
   b. $v_1 = 18$ pies/s (de subida);
   y $v_2 = -18$ pies/s (de bajada).
9. a. $v(t) = 2t - 6$;
   b. $v(0) = -6$ m/s;
   $v(6) = 6$ m/s .
10. a. $v\left(\frac{1}{4}\right) = 0$;
    b. $s\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8}$;
    c. en $t = \frac{1}{4}$ es la altura máxima de la pelota, pues su velocidad instantánea en $t = \frac{1}{4}$ es $v = 0$.
11. a. $\frac{dF}{dr} = -\frac{2GmM}{r^3}$;
    $\frac{dF}{dr}$ es la razón de cambio instantánea de la fuerza F cuando cambia la distancia r entre los cuerpos;
    b. $\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=10\,000} = -16$ N/km .
12. a. cuando $8 < t < 12$;
    b. $v(4) = 192$ pies/s;
    c. en $t = 20$ impacta contra el suelo
    $v(20) = -320$ pies/s .
13. a. $D_s = [0, 5]$;
    b. cuando $2 < t < 3$;
    c. $v(1) = 15$ m/s; $v(4) = -15$ m/s .

CAPÍTULO

5

La derivada

[1]

5.4 La derivada y la continuidad

Si consideramos la función $f(x) = |\,x - a\,|$, donde a es un número real fijo y arbitrario, podemos notar que:

1. La función f no es derivable en $x_0 = a$. Recordemos lo que vimos en la sección de límites laterales.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{|\,x - a\,| - |\,a - a\,|}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{|\,x - a\,|}{x - a}\,.$$

Obtenemos los límites laterales:

$$x \to a^- \;\Rightarrow\; x < a \;\Rightarrow\; x - a < 0 \;\Rightarrow\; |\,x - a\,| = -(x - a) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to a^-} \frac{|\,x - a\,|}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{-(x - a)}{(x - a)} = \lim_{x \to a} (-1) = -1.$$
$$x \to a^+ \;\Rightarrow\; x > a \;\Rightarrow\; x - a > 0 \;\Rightarrow\; |\,x - a\,| = x - a \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{|\,x - a\,|}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = \lim_{x \to a} 1 = 1.$$

Entonces

$$\lim_{x \to a^-} \frac{|\,x - a\,|}{x - a} \neq \lim_{x \to a^+} \frac{|\,x - a\,|}{x - a} \;\Rightarrow\; \lim_{x \to a} \frac{|\,x - a\,|}{x - a} \text{ no existe } \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f'(a) \text{ no existe } \;\Rightarrow\; f \text{ no es derivable en } x_0 = a\,.$$

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

2. La función f es continua en $x_0 = a$. Veamos.

   $f(x) = |\,x - a\,| \;\Rightarrow\; f(a) = |\,a - a\,| = |\,0\,| = 0$.

   Además $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} |\,x - a\,| = 0$, ya que $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} -(x-a) = 0 \\ \lim\limits_{x\to a^+} (x-a) = 0 \end{cases}$, por lo cual $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \;\Rightarrow\; f$ es continua en $x_0 = a$.

3. Por lo tanto, f es una función continua pero que no es derivable en $x_0 = a$.

De lo anterior se puede afirmar que:

La continuidad de una función en un punto no implica la derivabilidad de la misma en dicho punto. Esto es, no toda función continua en un punto es derivable en dicho punto.
En cambio, la derivabilidad de una función sí implica la continuidad de la misma. Esta afirmación es muy importante y la resaltamos de la siguiente manera.

- Si f es una función derivable en $x_0 = a$, entonces f es continua en $x_0 = a$.

  ▼ Demostramos esta afirmación.

  Suponer que f es derivable en $x_0 = a$ implica suponer la existencia de $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

  Demostrar que f es continua en $x_0 = a$ implica demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

  Así:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} [f(x) - f(a) + f(a)] = \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a) \right] = \\ &= \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \right] + \lim_{x\to a} f(a) = \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \lim_{x\to a}(x - a) + \lim_{x\to a} f(a) = \\ &= f'(a) \times 0 + f(a) = 0 + f(a) = f(a)\,, \end{aligned}$$

  que es lo que se quería demostrar. □

  Con el resultado anterior se ve que:

- Si una función no es continua en un punto entonces no es derivable en dicho punto.

CAPÍTULO

6

Reglas de derivación

[1]

OBJETIVOS PARTICULARES

1. Aplicar reglas básicas de derivación para calcular derivadas, de diverso orden, de funciones algebraicas.
2. Aplicar la regla de la cadena en el cálculo de derivadas, para funciones explícitamente definidas.
3. Aplicar el método de derivación implícita en el cálculo de derivadas, para funciones definidas implícitamente.

6.1 Reglas básicas de derivación

Como se habrá notado en el capítulo anterior, para calcular la derivada de una función $y = f(x)$ mediante la definición, usando la denominada regla de los cuatro pasos, generalmente es necesario llevar a cabo un laborioso procedimiento algebraico.
Para evitar tal complejidad, se opta por el uso o la aplicación de resultados o reglas básicas generales que nos permiten el cálculo de la derivada de diversas funciones de uso frecuente.
Dichas reglas se demuestran a partir de la definición de la derivada a veces con el uso de algún artificio algebraico.
A continuación enunciamos las reglas básicas de derivación, seguida cada una de su respectiva demostración.

- Regla 1. Si $f(x) = c$, con c constante, entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}c = 0\,.$$

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Ejemplos de la regla 1:

1. Si $f(x) = 5$, entonces $f'(x) = 0$.
2. Si $f(x) = -125$, entonces $f'(x) = 0$.
3. Si $f(x) = k$, con k constante, entonces $f'(x) = 0$.

▼ Demostración regla 1:

Si para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene $f(x) = c$, entonces

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x) = 0.$$
$$\text{Es decir, } \frac{d}{dx}c = 0\,.$$

□

- Regla 2. Si $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\,.$$

Ejemplos de la regla 2:

1. Si $f(x) = x^5$, entonces $f'(x) = 5x^4$.
2. Si $f(x) = x^{100}$, entonces $f'(x) = 100x^{99}$.

▼ Demostración de la regla 2:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f(x+h) = (x+h)^n\,.$$

$$\begin{aligned}
&f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n = \\
&= \left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n\right] - x^n = \\
&= nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-3}h^3 + \ldots + h^n = \\
&= h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-3}h^2 + \ldots + h^{n-1}\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\
&= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-3}h^2 + \ldots + h^{n-1}\,.
\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$
$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(0) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2(3)}x^{n-3}(0)^2 + \ldots + (0)^{n-1}\,.$$

$$f'(x) = nx^{n-1}\,.$$
$$\text{Es decir, } \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\,.$$

□

Más adelante veremos que esta regla se puede generalizar para el caso en que $n \in \mathbb{Q}$.

Nota: un caso particular de la regla 2 aparece para $n = 1$:

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}x^1 = 1x^{1-1} = x^0 = 1\,.$$

Es decir, $\dfrac{d}{dx}x = 1$.

Observación: en lo que sigue trabajaremos con funciones que suponemos derivables.

- Regla 3. Si $F(x) = f(x) + g(x) - \phi(x)$, entonces

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}[f(x)+g(x)-\phi(x))] =$$
$$= \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) - \frac{d}{dx}\phi(x) = f'(x) + g'(x) - \phi'(x)\,.$$

Ejemplo de la regla 3:

$$(x^5 + x^{100} - x)' = (x^5)' + (x^{100})' - (x)' = 5x^4 + 100x^{99} - 1\,.$$

▼ Demostración de la regla 3:

$$F(x) = f(x) + g(x) - \phi(x) \;\Rightarrow\; F(x+h) = f(x+h) + g(x+h) - \phi(x+h)\,.$$

$$F(x+h) - F(x) = [f(x+h) + g(x+h) - \phi(x+h)] - [f(x) + g(x) - \phi(x)] =$$
$$= [f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)] - [\phi(x+h) - \phi(x)]\,.$$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}\,.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}\,.$$

$$F'(x) = f'(x) + g'(x) - \phi'(x).$$

$$\text{Es decir, } \frac{d}{dx}[f(x) + g(x) - \phi(x)] = f'(x) + g'(x) - \phi'(x)\,.$$

□

Esta regla se generaliza para el caso de tener la suma algebraica de más funciones.

- Regla 4. Si $\phi(x) = f(x)g(x)$, entonces $\phi'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$.

Ejemplo de la regla 4:

$$\left[(x^5 + x)(x^{100} - 1)\right]' = (x^5 + x)(x^{100} - 1)' + (x^{100} - 1)(x^5 + x)' = \\ = (x^5 + x) \cdot 100x^{99} + (x^{100} - 1)(5x^4 + 1)\,.$$

▼ Demostración de la regla 4:

$$\phi(x) = f(x)g(x) \;\Rightarrow\; \phi(x + h) = f(x + h)g(x + h)\,.$$

$$\phi(x + h) - \phi(x) = f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x)\,.$$

Restamos y sumamos $f(x + h)g(x)$

$$\phi(x + h) - \phi(x) = \\ = f(x + h)g(x + h) - f(x + h)g(x) + f(x + h)g(x) - f(x)g(x) = \\ = f(x + h)[g(x + h) - g(x)] + g(x)[f(x + h) - f(x)]\,.$$

$$\frac{\phi(x + h) - \phi(x)}{h} = \frac{f(x + h)[g(x + h) - g(x)]}{h} + \frac{g(x)[f(x + h) - f(x)]}{h} = \\ = f(x + h)\left[\frac{g(x + h) - g(x)}{h}\right] + g(x)\left[\frac{f(x + h) - f(x)}{h}\right]\,.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x + h) - \phi(x)}{h} = \\ = \lim_{h\to 0}\left[f(x + h)\frac{g(x + h) - g(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[g(x)\frac{f(x + h) - f(x)}{h}\right]\,.$$

$$\phi'(x) = \\ = \left[\lim_{h\to 0} f(x + h)\right]\lim_{h\to 0}\frac{g(x + h) - g(x)}{h} + \left[\lim_{h\to 0} g(x)\right]\lim_{h\to 0}\frac{f(x + h) - f(x)}{h}\,.$$

Nótese que $\lim_{h\to 0} f(x + h) = f(x)$, pues f es continua, ya que es derivable. Entonces:

$$\phi'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Es decir,

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

□

Nota: un caso particular de esta regla 4 será enunciada como regla 5, debido a que se usa frecuentemente.

- Regla 5. Si $\phi(x) = cg(x)$, con c constante, entonces $\phi'(x) = cg'(x)$.

Ejemplo de la regla 5:

$$(5x^{100})' = 5(x^{100})' = 5 \cdot 100x^{99} = 500x^{99}\,.$$

▼ Demostración de la regla 5:

Considerando la regla 4 con $f(x) = c$ y la regla 1 en la que se asegura que $f'(x) = \dfrac{d}{dx}c = 0$:

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}[cg(x)] = cg'(x) + g(x)\frac{d}{dx}c = cg'(x) + g(x)(0) = cg'(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \phi'(x) = cg'(x).$$

Es decir, $\dfrac{d}{dx}[cg(x)] = c\dfrac{d}{dx}g(x)\,.$

□

- Regla 6. Si $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces $\phi'(x) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\,.$

Ejemplo de la regla 6:

$$\left(\frac{x^5 + x}{x^{100} - 1}\right)' = \frac{(x^{100} - 1)(x^5 + x)' - (x^5 + x)(x^{100} - 1)'}{(x^{100} - 1)^2} =$$
$$= \frac{(x^{100} - 1)(5x^4 + 1) - (x^5 + x) \cdot 100x^{99}}{(x^{100} - 1)^2}\,.$$

▼ Demostración de la regla 6.

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \phi(x+h) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \phi(x+h) - \phi(x) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f(x+h) - g(x+h)f(x)}{g(x+h)g(x)}\,.$$

Restamos y sumamos $g(x)f(x)$ en el numerador

$$\phi(x+h) - \phi(x) = \frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - g(x+h)f(x)}{g(x+h)g(x)} =$$
$$= \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{g(x+h)g(x)}\,.$$

Entonces,

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} =$$
$$= \frac{1}{h}\left[\frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]}{g(x+h)g(x)} - \frac{f(x)[g(x+h)-g(x)]}{g(x+h)g(x)}\right] =$$
$$= \frac{g(x)}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] - \frac{f(x)}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right].$$

Calculamos el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(x)}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] - \frac{f(x)}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\right\}.$$

Vemos que $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, pues $g(x)$ es continua por ser derivable.

$$\phi'(x) = \frac{g(x)}{g(x)g(x)}[f'(x)] - \frac{f(x)}{g(x)g(x)}[g'(x)] =$$
$$= \frac{g(x)f'(x)}{[g(x)]^2} - \frac{f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Entonces,

$$\phi'(x) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Es decir,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2} = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

□

Generalizamos la regla 2 en el caso en que $n \in \mathbb{Z}$.

- Regla 2*. Si $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.

Ejemplo de la regla 2*:

$$(x^{-100})' = -100x^{-101}.$$

▼ Demostración de la regla 2*:

Si $n \in \mathbb{N}$, la función es la de la regla 2 precisamente.

Si $n = 0 \Rightarrow f(x) = x^0 = 1 \Rightarrow f'(x) = 0 = 0x^{0-1}$.

Si n es un entero negativo, entonces $-n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = x^n = \frac{1}{x^{-n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^{-n}\frac{d}{dx}1 - 1\frac{d}{dx}x^{-n}}{(x^{-n})^2} = \frac{x^{-n}(0)-(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} =$$
$$= \frac{nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{-n-1+2n} = nx^{n-1}.$$

□

Por ahora supondremos que para $n \in \mathbb{Q}$ se cumple: $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

Ejemplo 6.1.1 *Calcular las derivadas de las funciones:*

1. $f(x) = -20$.
2. $g(x) = x^5$.
3. $h(t) = \dfrac{31}{5}$.
4. $j(y) = \dfrac{1}{y^8}$.
5. $\phi(x) = \sqrt{x^3}$.
6. $\alpha(z) = z^4 - \dfrac{1}{z^2}$.
7. $\beta(t) = \sqrt{t} - t + 6$.
8. $\gamma(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2$.
9. $\delta(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 5}{7x^2}$.
10. $y = \dfrac{5x^2 - 6x^3 - 8x^4}{2\sqrt{x}}$.

▼ Soluciones

1. $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(-20) = 0\,.$

2. $g'(x) = \dfrac{d}{dx}(x^5) = 5x^{5-1} = 5x^4\,.$

3. $h'(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{31}{5}\right) = 0\,.$

4. $j'(y) = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{y^8}\right) = \dfrac{d}{dy}(y^{-8}) = -8y^{-8-1} = -8y^{-9} = -\dfrac{8}{y^9}\,.$

5. $\phi'(x) = \dfrac{d}{dx}\sqrt{x^3} = \dfrac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\,.$

6. $$\alpha'(z) = \dfrac{d}{dz}\left(z^4 - \dfrac{1}{z^2}\right) = \dfrac{d}{dz}(z^4 - z^{-2}) = \dfrac{d}{dz}z^4 - \dfrac{d}{dz}z^{-2} =$$
$$= 4z^{4-1} - (-2)z^{-2-1} = 4z^3 + 2z^{-3} = 4z^3 + \dfrac{2}{z^3}\,.$$

7. $\beta'(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{t} - t + 6\right) = \dfrac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}} - \dfrac{d}{dt}t + \dfrac{d}{dt}6 =$
$= \dfrac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} - 1 + 0 = \dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - 1 = \dfrac{1}{2t^{\frac{1}{2}}} - 1 = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} - 1\,.$

8. $\gamma'(x) = \dfrac{d}{dx}(5x^4 - 2x^3 + 4x^2) = \dfrac{d}{dx}(5x^4) - \dfrac{d}{dx}(2x^3) + \dfrac{d}{dx}(4x^2) =$
$= 5\dfrac{d}{dx}x^4 - 2\dfrac{d}{dx}x^3 + 4\dfrac{d}{dx}x^2 = 5(4x^3) - 2(3x^2) + 4(2x) =$
$= 20x^3 - 6x^2 + 8x\,.$

9. $\delta'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3x^2 - 4x + 5}{7x^2}\right) =$
$= \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3x^2}{7x^2} - \dfrac{4x}{7x^2} + \dfrac{5}{7x^2}\right) =$
$= \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{3}{7} - \dfrac{4}{7}x^{-1} + \dfrac{5}{7}x^{-2}\right] = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3}{7}\right) - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4}{7}x^{-1}\right) + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{5}{7}x^{-2}\right) =$
$= 0 - \dfrac{4}{7}\left(\dfrac{d}{dx}x^{-1}\right) + \dfrac{5}{7}\left(\dfrac{d}{dx}x^{-2}\right) = -\dfrac{4}{7}(-x^{-2}) + \dfrac{5}{7}(-2x^{-3}) =$
$= \dfrac{4}{7}x^{-2} - \dfrac{10}{7}x^{-3} = \dfrac{4}{7x^2} - \dfrac{10}{7x^3} = \dfrac{4x - 10}{7x^3}\,.$

También podríamos derivar $\delta(x)$ directamente como un cociente de funciones:

$$\delta'(x) = \frac{7x^2\dfrac{d}{dx}(3x^2 - 4x + 5) - (3x^2 - 4x + 5)\dfrac{d}{dx}(7x^2)}{(7x^2)^2} =$$
$$= \frac{7x^2(6x - 4) - (3x^2 - 4x + 5)14x}{49x^4} =$$
$$= \frac{42x^3 - 28x^2 - 42x^3 + 56x^2 - 70x}{49x^4} = \frac{28x^2 - 70x}{49x^4} = \frac{7x(4x - 10x)}{7x(7x^3)} =$$
$$= \frac{4x - 10}{7x^3}\,.$$

10. $$y' = \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(\frac{5x^2 - 6x^3 - 8x^4}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{5x^2}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{6x^3}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{8x^4}{2x^{\frac{1}{2}}}\right) =$$
$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{d}{dx}(3x^{\frac{5}{2}}) - \frac{d}{dx}(4x^{\frac{7}{2}}) =$$
$$= \frac{5}{2}\frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} - 3\frac{d}{dx}x^{\frac{5}{2}} - 4\frac{d}{dx}x^{\frac{7}{2}} =$$
$$= \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right) - 3\left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}\right) - 4\left(\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}\right) =$$
$$= \frac{15}{4}\sqrt{x} - \frac{15}{2}\sqrt{x^3} - 14\sqrt{x^5} = \frac{15\sqrt{x} - 30\sqrt{x^3} - 56\sqrt{x^5}}{4}.$$

Y como cociente:

$$y' = \left(\frac{5x^2 - 6x^3 - 8x^4}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{2x^{\frac{1}{2}}(10x - 18x^2 - 32x^3) - (5x^2 - 6x^3 - 8x^4)x^{-\frac{1}{2}}}{4x} =$$
$$= \frac{20x^{\frac{3}{2}} - 36x^{\frac{5}{2}} - 64x^{\frac{7}{2}} - 5x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{5}{2}} + 8x^{\frac{7}{2}}}{4x} =$$
$$= \frac{15x^{\frac{3}{2}} - 30x^{\frac{5}{2}} - 56x^{\frac{7}{2}}}{4x} = \frac{15x^{\frac{1}{2}} - 30x^{\frac{3}{2}} - 56x^{\frac{5}{2}}}{4} = \frac{15\sqrt{x} - 30\sqrt{x^3} - 56\sqrt{x^5}}{4}.$$

□

Ejemplo 6.1.2 *Calcular las derivadas de las funciones:*

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$.
2. $h(y) = \dfrac{1 - 2y^3}{1 + 2y^3}$.
3. $y = (5x^3 - 4x^2)(1 - x^2 + x^4)$.
4. $z = (\sqrt{u} - \sqrt[3]{u})\left(\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{u^2} + \dfrac{1}{u^3}\right)$.

▼ Soluciones:

1. $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}\right) = \frac{(x^2 + 3)\frac{d}{dx}(x^2 - 3) - (x^2 - 3)\frac{d}{dx}(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^2} =$$
$$= \frac{(x^2 + 3)(2x - 0) - (x^2 - 3)(2x + 0)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2x(x^2 + 3) - 2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 3)^2} =$$
$$= \frac{2x^3 + 6x - 2x^3 + 6x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{12x}{(x^2 + 3)^2}.$$

2.
$$h'(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1-2y^3}{1+2y^3}\right) = \frac{(1+2y^3)\dfrac{d}{dy}(1-2y^3) - (1-2y^3)\dfrac{d}{dy}(1+2y^3)}{(1+2y^3)^2} =$$
$$= \frac{(1+2y^3)(0-6y^2) - (1-2y^3)(0+6y^2)}{(1+2y^3)^2} =$$
$$= \frac{-6y^2(1+2y^3) - 6y^2(1-2y^3)}{(1+2y^3)^2} = \frac{-6y^2 - 12y^5 - 6y^2 + 12y^5}{(1+2y^3)^2} =$$
$$= \frac{-12y^2}{(1+2y^3)^2}\,.$$

3.
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[(5x^3-4x^2)(1-x^2+x^4)] =$$
$$= (5x^3-4x^2)\frac{d}{dx}(1-x^2+x^4) + (1-x^2+x^4)\frac{d}{dx}(5x^3-4x^2) =$$
$$= (5x^3-4x^2)(0-2x+4x^3) + (1-x^2+x^4)(15x^2-8x) =$$
$$= (5x^3-4x^2)(4x^3-2x) + (x^4-x^2+1)(15x^2-8x)\,.$$

También podemos efectuar primero el producto $(5x^3-4x^2)(1-x^2+x^4)$ y luego derivar:

$$y = (5x^3-4x^2)(1-x^2+x^4) = 5x^3 - 4x^2 - 5x^5 + 4x^4 + 5x^7 - 4x^6 =$$
$$= x^7 - 4x^6 - 5x^5 + 4x^4 + 5x^3 - 4x^2\,;$$

por esto,

$$\frac{dy}{dx} = 35x^6 - 24x^5 - 25x^4 + 16x^3 + 15x^2 - 8x\,.$$

4.
$$z' = \frac{dz}{du} = \frac{d}{du}\left[(\sqrt{u}-\sqrt[3]{u})\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^3}\right)\right] =$$
$$= (\sqrt{u}-\sqrt[3]{u})\frac{d}{du}(u^{-1}-u^{-2}+u^{-3}) + \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^3}\right)\frac{d}{du}(u^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{1}{3}}) =$$
$$= (\sqrt{u}-\sqrt[3]{u})(-u^{-2}+2u^{-3}-3u^{-4}) + \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^3}\right)\left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\right) =$$
$$= (\sqrt{u}-\sqrt[3]{u})\left(\frac{-1}{u^2}+\frac{2}{u^3}-\frac{3}{u^4}\right) + \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^3}\right)\left(\frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{3u^{\frac{2}{3}}}\right) =$$
$$= (\sqrt{u}-\sqrt[3]{u})\left(-\frac{1}{u^2}+\frac{2}{u^3}-\frac{3}{u^4}\right) + \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^3}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\right)\,.$$

Podemos efectuar también primero el producto y luego derivar:

$$z = (u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{3}})(u^{-1} - u^{-2} + u^{-3}) = u^{-\frac{1}{2}} - u^{-\frac{2}{3}} - u^{-\frac{3}{2}} + u^{-\frac{5}{3}} + u^{-\frac{5}{2}} - u^{-\frac{8}{3}};$$

por lo tanto:

$$\frac{dz}{du} = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}u^{-\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}u^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{3}u^{-\frac{8}{3}} - \frac{5}{2}u^{-\frac{7}{2}} + \frac{8}{3}u^{-\frac{11}{3}}.$$

□

Ejercicios 6.1.1 *Soluciones en la página* **??**

Utilizando reglas de derivación, calcular la derivada de las funciones siguientes.

1. $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$.
2. $g(x) = \dfrac{3x^{10}}{5} - \dfrac{4x^6}{3} + \dfrac{5x^3}{6} - \dfrac{9}{2}$.
3. $h(t) = \dfrac{2}{3t} - \dfrac{3}{4t^2} + \dfrac{4}{5t^3} - \dfrac{5}{6t^4}$.
4. $y = 4\sqrt{x^3} - 6\sqrt[3]{x^4} + 8\sqrt[4]{x^5}$.
5. $u = \dfrac{1}{\sqrt{y}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{y}}$.
6. $x = \dfrac{3y^2 - 4y + 5}{6\sqrt{y}}$.
7. $y = \left(x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
8. $z = (x^3 + 1)^2(x^2 - 1)^3$.
9. $x = \dfrac{1 + t^3}{1 - t^3}$.
10. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$.
11. $w = \dfrac{3u + 2}{4u^2 - 9}$.
12. $v = \dfrac{1}{w^2 - w + 1}$.

Ejercicios 6.1.1 *Reglas básicas de derivación, página* **??**

1. $f'(x) = -2 + 6x - 12x^2$.

2. $g'(x) = 6x^9 - 8x^5 + \dfrac{5}{2}x^2$.

3. $h'(t) = -\dfrac{2}{3t^2} + \dfrac{3}{2t^3} - \dfrac{12}{5t^4} + \dfrac{10}{3t^5}$.

4. $\dfrac{dy}{dx} = 6\sqrt{x} - 8\sqrt[3]{x} + 10\sqrt[4]{x}$.

5. $\dfrac{du}{dy} = -\dfrac{1}{2\sqrt{y^3}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{y^4}} + \dfrac{1}{4\sqrt[4]{y^5}}$.

6. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{3}{4}\sqrt{y} - \dfrac{1}{3\sqrt{y}} - \dfrac{5}{12\sqrt{y^3}}$.

7. $$y' = \left(x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right) + \\ + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right).$$

8. $z' = (x^3+1)^2(6x^5-12x^3+6x)+(x^2-1)^3(6x^5+6x)$.

9. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{6t^2}{(1-t^3)^2}$.

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2} = \dfrac{2(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$.

11. $\dfrac{dw}{du} = -\dfrac{12u^2+16u+27}{(4u^2-9)^2}$.

12. $\dfrac{dv}{dw} = \dfrac{1-2w}{(w^2-w+1)^2}$.

CAPÍTULO

6

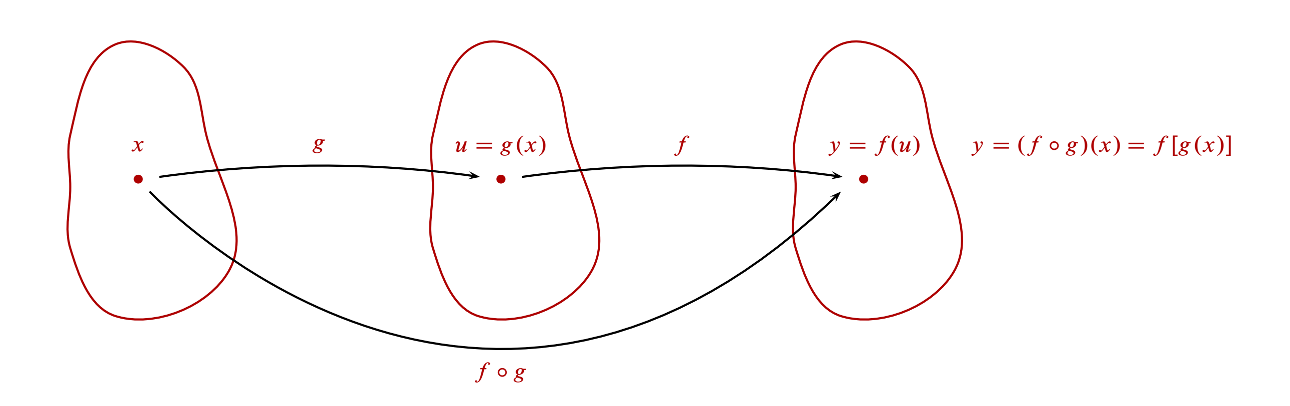
Reglas de derivación

[1]

6.2 Regla de la cadena

En las reglas básicas de derivación se aplican fórmulas apropiadas para calcular las derivadas de las funciones $f+g$ (suma), $f-g$ (diferencia), fg (producto) y $\frac{f}{g}$ (cociente). Pero no se presentó en esa sección una regla que nos diga cómo calcular la derivada de una composición de funciones; esto es, no sabemos cómo calcular la derivada de $f \circ g$ (g compuesta con f o bien g seguida de f).
Es, precisamente, la regla de la cadena la que nos dice cómo obtener la derivada de $y = (f \circ g)(x)$.

Regla de la cadena:



[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Si $u = g(x)$ es una función derivable en x_0, donde $u_0 = g(x_0)$ y si $y = f(u)$ es una función derivable en u_0, entonces la función $y = (f \circ g)(x)$ es derivable en x_0:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0)\,.$$

▼ En la demostración de esta regla desempeña un papel relevante el comportamiento de la función $u = g(x)$ cuando x está cerca de x_0, ya que si existen puntos x cerca de x_0 tales que $g(x) = g(x_0)$, entonces la diferencia $g(x) - g(x_0) = 0$ genera problemas.
Por eso en esta demostración suponemos que $g(x) \neq g(x_0)$ para x cerca de x_0 y $x \neq x_0$.
Sea $\phi(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(u)$ con $u = g(x)$,

$$\phi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{x - x_0}\,.$$

Se multiplica y divide por el número diferente de cero $g(x) - g(x_0)$:

$$\begin{aligned}\phi'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{x - x_0} \, \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}\right] = \\ &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{g(x) - g(x_0)} \, \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right]\,. \qquad (*)\end{aligned}$$

Pero la derivabilidad de g en x_0 asegura la continuidad de g en x_0.
Luego, cuando $x \to x_0$, sucede que $g(x) \to g(x_0)$; o sea que $u \to u_0$, cuando $x \to x_0$.
Volviendo a $(*)$ vemos

$$\begin{aligned}\phi'(x_0) &= \left[\lim_{x \to x_0} \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{g(x) - g(x_0)}\right] \left[\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] = \\ &= \left[\lim_{u \to u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0}\right] \left[\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] = \\ &= [f'(u_0)][g'(x_0)] = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0)\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(f \circ g)'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0)\,,$$

que es lo que se quería demostrar.

□

En general si $u = g(x)$ es una función derivable en x & $y = f(u)$ es una función derivable en u, entonces la función $y = (f \circ g)(x)$ es derivable en x. Además

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dx} f[g(x)] = \frac{d\ f[g(x)]}{d\ g(x)} \frac{d\ g(x)}{dx} = \frac{d\ f(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \\ &= \left[\frac{d}{du} f(u)\right] \left[\frac{d}{dx} g(x)\right]\,.\end{aligned}$$

Esto se acostumbra sintetizar como:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\,.$$

Un caso particular de la regla de la cadena es cuando $y = f(u) = u^n$ con $n \in \mathbb{N}$ & $u = g(x)$, situación que se conoce como la regla de la potencia:

$$y = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = [g(x)]^n$$

y entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{d}{du}u^n\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = (nu^{n-1})\left(\frac{du}{dx}\right) = n[g(x)]^{n-1}\left[\frac{d}{dx}g(x)\right].$$

Es decir,

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}\frac{d\,g(x)}{dx} = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x).$$

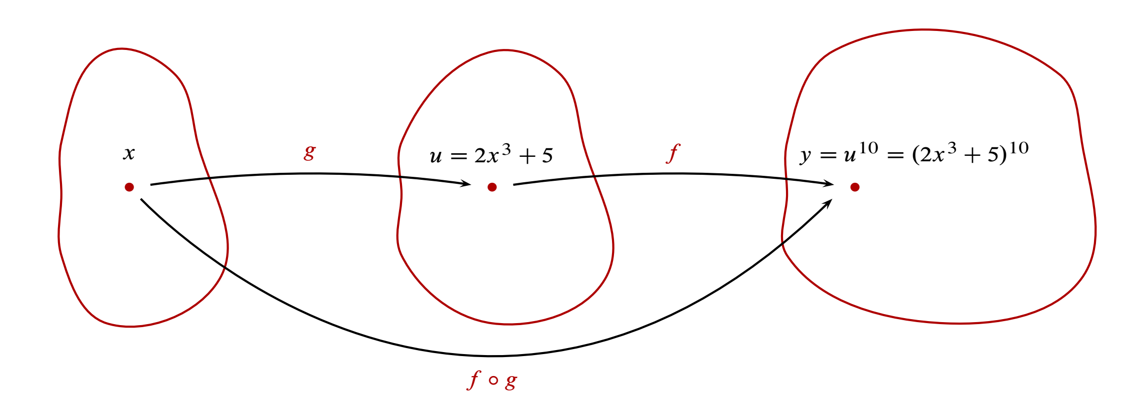
En palabras: la derivada de una potencia de una función derivable es el exponente por la potencia una unidad menor de la función base, por la derivada de la función (“la derivada de lo de adentro", como se decía anteriormente).

Ejemplo 6.2.1 *Para* $g(x) = 2x^3 + 5$ & $f(u) = u^{10}$.

1. *Obtener* $(f \circ g)(x)$.
2. *Calcular* $\dfrac{d}{dx}(f \circ g)(x)$.

▼

1. Calculamos $y = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(2x^3 + 5) = (2x^3 + 5)^{10}$.



Entonces, $(f \circ g)(x) = (2x^3 + 5)^{10}$.

2. $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) \\ &= \left(\frac{d}{du}u^{10}\right)\left[\frac{d}{dx}(2x^3 + 5)\right] = \\ &= (10u^9)[2(3x^2) + 0] = 10u^9(6x^2) = \\ &= 10(2x^3 + 5)^9 6x^2 = 60x^2(2x^3 + 5)^9.\end{aligned}$$

Lo cual es exactamente lo que se obtiene con la regla de la potencia:

$$\frac{d}{dx}(2x^3+5)^{10} = 10(2x^3+5)^9\frac{d}{dx}(2x^2+5) = 10(2x^3+5)^9\cdot 6x^2 = 60x^2(2x^3+5)^9\,.$$

□

Demostraremos ahora la regla 2 para el caso en que el exponente es un número racional, esto es:

Regla 2**. Si $f(x) = x^n$ con $n = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$), entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.

▼

En efecto, tenemos que $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$; elevando ambos miembros a la potencia q, tenemos que $[f(x)]^q = x^p$; ahora derivando con respecto a x ambos miembros de esta última igualdad:

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^q = \frac{d}{dx}x^p \;\Rightarrow\; q[f(x)]^{q-1}\frac{d\,f(x)}{dx} = px^{p-1}\,.$$

Lo primero por la regla de la potencia y lo segundo por la regla 2*. De aquí que

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{px^{p-1}}{q[f(x)]^{q-1}} = \frac{px^{p-1}}{q\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}} = \frac{px^{p-1}}{qx^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q}x^{p-1-(p-\frac{p}{q})} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} = nx^{n-1}\,.$$

Que es lo que queríamos demostrar.

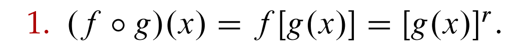
□

Ejemplo 6.2.2 *Sean* $u = g(x)$ & $f(u) = u^r$ *con* $r \in \mathbb{Q}$.

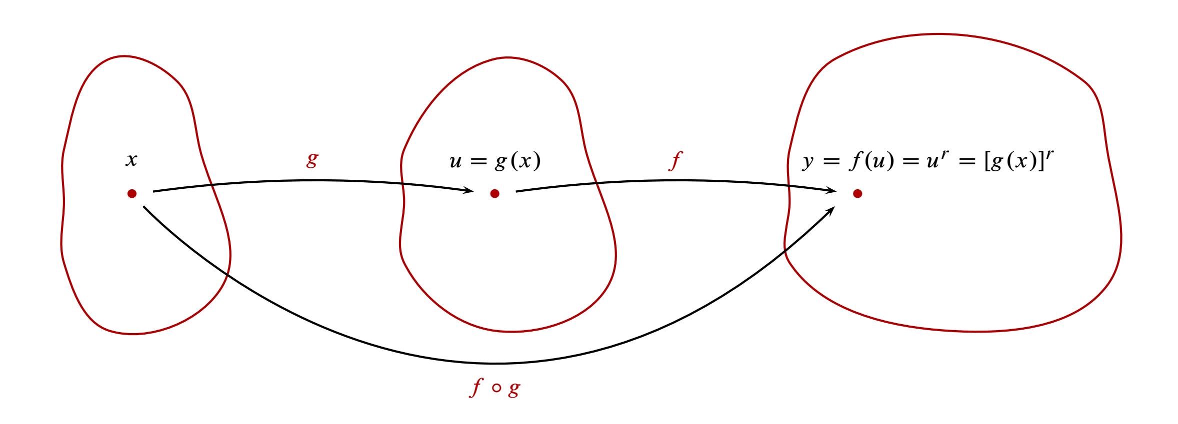
1. *Obtener* $(f \circ g)(x)$.

2. *Calcular* $\dfrac{d}{dx}(f \circ g)(x)$.

▼



1. $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = [g(x)]^r$.



Entonces, $(f\circ g)(x)=[g(x)]^r$.

2.

$$\frac{d}{dx}(f\circ g)(x)=\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)=\left(\frac{d}{du}u^r\right)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]=$$
$$=(ru^{r-1})g'(x)=r[g(x)]^{r-1}g'(x)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(f\circ g)(x)=r[g(x)]^{r-1}g'(x)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[g(x)]^r=r[g(x)]^{r-1}g'(x)\,.$$

□

Ejemplo 6.2.3 *Calcular la derivada de* $w=\sqrt{2t^3+4}$.

▼ Por la regla de la potencia

$$\frac{dw}{dt}=\frac{d}{dt}(2t^3+4)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(2t^3+4)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dt}(2t^3+4)=$$
$$=\frac{1}{2}(2t^3+4)^{-\frac{1}{2}}(6t^2)=\frac{6t^2}{2(2t^3+4)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3t^2}{\sqrt{2t^3+4}}\,.$$

□

Ejemplo 6.2.4 *Calcular la derivada de* $u=\dfrac{5}{\sqrt[3]{2-y^4}}$.

▼ Por la regla de la potencia

$$\frac{du}{dy}=\frac{d}{dy}\left(\frac{5}{\sqrt[3]{2-y^4}}\right)=\frac{d}{dy}\left[\frac{5}{(2-y^4)^{\frac{1}{3}}}\right]=\frac{d}{dy}[5(2-y^4)^{-\frac{1}{3}}]=$$
$$=5\frac{d}{dy}(2-y^4)^{-\frac{1}{3}}=5\left[-\frac{1}{3}(2-y^4)^{-\frac{1}{3}-1}\frac{d}{dy}(2-y^4)\right]=$$
$$=-\frac{5}{3}(2-y^4)^{-\frac{4}{3}}(-4y^3)=\frac{20y^3}{3}\frac{1}{(2-y^4)^{\frac{4}{3}}}=\frac{20y^3}{3\sqrt[3]{(2-y^4)^4}}\,.$$

□

Ejemplo 6.2.5 *Calcular la derivada de* $y=\left(\dfrac{1-2x^3}{1+2x^3}\right)^5$.

▼ Por la regla de la potencia y luego por la del cociente

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1-2x^3}{1+2x^3}\right)^5 = \\
&= 5\left(\frac{1-2x^3}{1+2x^3}\right)^{5-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1-2x^3}{1+2x^3}\right) = \\
&= 5\left(\frac{1-2x^3}{1+2x^3}\right)^4 \frac{(1+2x^3)\frac{d}{dx}(1-2x^3) - (1-2x^3)\frac{d}{dx}(1+2x^3)}{(1+2x^3)^2} = \\
&= 5\left(\frac{1-2x^3}{1+2x^3}\right)^4 \frac{(1+2x^3)(-6x^2) - (1-2x^3)(6x^2)}{(1+2x^3)^2} = \\
&= 5\left(\frac{1-2x^3}{1+2x^3}\right)^4 \frac{(-6x^2)(1+2x^3+1-2x^3)}{(1+2x^3)^2} = \\
&= \frac{5(1-2x^3)^4(-6x^2)(2)}{(1+2x^3)^4(1+2x^3)^2} = \\
&= \frac{-60x^2(1-2x^3)^4}{(1+2x^3)^6}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.2.6 *Calcular la derivada de* $z = (u^3+1)^5(u^3-2)^8$.

▼ Por la regla del producto y luego por la de la potencia

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{du} &= \frac{d}{du}[(u^3+1)^5(u^3-2)^8] = \\
&= (u^3+1)^5\frac{d}{du}(u^3-2)^8 + (u^3-2)^8\frac{d}{du}(u^3+1)^5 = \\
&= (u^3+1)^5 8(u^3-2)^{8-1}\frac{d}{du}(u^3-2) + (u^3-2)^8 5(u^3+1)^{5-1}\frac{d}{du}(u^3+1) = \\
&= (u^3+1)^5 8(u^3-2)^7(3u^2) + (u^3-2)^8 5(u^3+1)^4(3u^2) = \\
&= 24u^2(u^3+1)^5(u^3-2)^7 + 15u^2(u^3-2)^8(u^3+1)^4 .
\end{aligned}$$

Para simplificar, factorizamos

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{du} &= 3u^2(u^3+1)^4(u^3-2)^7[8(u^3+1)+5(u^3-2)] = \\
&= 3u^2(u^3+1)^4(u^3-2)^7(8u^3+8+5u^3-10) = \\
&= 3u^2(u^3+1)^4(u^3-2)^7(13u^3-2) .
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.2.7 *Calcular la derivada de* $w = \dfrac{(3t^2-4)^3}{(2-t^2)^4}$.

▼ Primero por la regla del cociente y luego por la de la potencia

$$
\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{(3t^2-4)^3}{(2-t^2)^4}\right] = \\
&= \frac{(2-t^2)^4\frac{d}{dt}(3t^2-4)^3-(3t^2-4)^3\frac{d}{dt}(2-t^2)^4}{[(2-t^2)^4]^2} = \\
&= \frac{(2-t^2)^4 3(3t^2-4)^{3-1}\frac{d}{dt}(3t^2-4)-(3t^2-4)^3 4(2-t^2)^{4-1}\frac{d}{dt}(2-t^2)}{(2-t^2)^8} = \\
&= \frac{(2-t^2)^4 3(3t^2-4)^2(6t)-(3t^2-4)^3 4(2-t^2)^3(-2t)}{(2-t^2)^8} = \\
&= \frac{18t(2-t^2)^4(3t^2-4)^2+8t(3t^2-4)^3(2-t^2)^3}{(2-t^2)^8}.
\end{aligned}
$$

Para simplificar, factorizamos

$$
\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{2t(2-t^2)^3(3t^2-4)^2[9(2-t^2)+4(3t^2-4)]}{(2-t^2)^8} = \\
&= \frac{2t(2-t^2)^3(3t^2-4)^2(18-9t^2+12t^2-16)}{(2-t^2)^3(2-t^2)^5} = \\
&= \frac{2t(3t^2-4)^2(2+3t^2)}{(2-t^2)^5}.
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 6.2.8 *Calcular la derivada de* $f(x) = \sqrt{(1-x)^2+\sqrt{x-1}}.$.

▼ Puesto que $f(x) = \left[(1-x)^2+(x-1)^{1/2}\right]^{1/2}$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}\left[(1-x)^2+(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[2(1-x)(-1)+\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\right] = \\
&= \frac{-2(1-x)+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{(1-x)^2+\sqrt{x-1}}} = \frac{-4(1-x)\sqrt{x-1}+1}{4\sqrt{x-1}\sqrt{(1-x)^2+\sqrt{x-1}}} = \\
&= \frac{4(x-1)\sqrt{x-1}+1}{4\sqrt{x-1}\sqrt{(1-x)^2+\sqrt{x-1}}}.
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 6.2.9 *Calcular la derivada de* $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

▼

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\sqrt{x+\sqrt{x}}\right] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1 + \frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1 + \frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left\{1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left[\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})\right]\right\} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right].$$

□

Ejemplo 6.2.10 *Utilizando 3 procedimientos diferentes, obtener la derivada de*

$$y = \sqrt{\frac{3x^2-1}{3x^2+1}}.$$

▼

1. Considerando que: $y = \left(\frac{3x^2-1}{3x^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ es potencia de una función

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+1}\right). \quad (*)$$

Pero

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+1}\right) = \frac{(3x^2+1)\frac{d}{dx}(3x^2-1) - (3x^2-1)\frac{d}{dx}(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{(3x^2+1)(6x) - (3x^2-1)(6x)}{(3x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{18x^3+6x-18x^3+6x}{(3x^2+1)^2} = \frac{12x}{(3x^2+1)^2}.$$

Entonces, sustituyendo en $(*)$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}\frac{(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}\,\frac{12x}{(3x^2+1)^2} = \frac{12x(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{2(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{6x}{(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6x}{(3x^2+1)\sqrt{3x^2+1}\sqrt{3x^2-1}} = \\
&= \frac{6x}{(3x^2+1)\sqrt{(3x^2+1)(3x^2-1)}} = \frac{6x}{(3x^2+1)\sqrt{9x^4-1}}\,.
\end{aligned}
$$

2. Considerando que $y = \dfrac{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ es un cociente de potencias de funciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[\frac{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right] = \\
&= \frac{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}\dfrac{d}{dx}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}} - (3x^2-1)^{\frac{1}{2}}\dfrac{d}{dx}(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{[(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}]^2}\,. \qquad (**)
\end{aligned}
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(3x^2-1) = \frac{1}{2}(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}6x = \frac{3x}{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}}\\
\frac{d}{dx}(3x^2+1)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(3x^2+1) = \frac{1}{2}(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}6x = \frac{3x}{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\,.
\end{aligned}
$$

Entonces, al sustituir en $(**)$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}\dfrac{3x}{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}} - (3x^2-1)^{\frac{1}{2}}\dfrac{3x}{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{(3x^2+1)} = \\
&= \frac{1}{3x^2+1}\left[\frac{3x(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right] = \\
&= \frac{1}{3x^2+1}\left[\frac{3x(3x^2+1)-3x(3x^2-1)}{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right] = \\
&= \frac{1}{3x^2+1}\left(\frac{9x^3+3x-9x^3+3x}{\sqrt{3x^2-1}\sqrt{3x^2+1}}\right) = \frac{6x}{(3x^2+1)\sqrt{9x^4-1}}\,.
\end{aligned}
$$

3. Considerando que $y = (3x^2-1)^{\frac{1}{2}}(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ es un producto de potencias de funciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}] = \\
&= (3x^2-1)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + (3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}\,. \qquad (***)
\end{aligned}
$$

Pero

$$\frac{d}{dx}(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(3x^2+1)^{-\frac{3}{2}}6x = -3x(3x^2+1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-3x}{(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dx}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}6x = \frac{3x}{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Entonces, al sustituir en $(* * *)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (3x^2-1)^{\frac{1}{2}}\frac{-3x}{(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}} + (3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\frac{3x}{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{-3x(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x}{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{-3x(3x^2-1)+3x(3x^2+1)}{(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{-9x^3+3x+9x^3+3x}{(3x^2+1)\sqrt{3x^2+1}\sqrt{3x^2-1}} = \frac{6x}{(3x^2+1)\sqrt{9x^4-1}}\,.\end{aligned}$$

□

Ejercicios 6.2.1 *Soluciones en la página 12*

Utilizando reglas de derivación, calcular la derivada de las funciones siguientes.

1. $y = (3x^4-2)^5$.
2. $u = \left(t+\frac{1}{t}\right)^{10}$.
3. $z = 4\sqrt{1-y^2}$.
4. $w = \frac{5}{(3u^2+1)^2}$.
5. $x = \frac{6}{\sqrt[3]{y^5-2}}$.
6. $y = \sqrt{x+\sqrt{\frac{1}{x}}}$.
7. $f(x) = \sqrt{\frac{1-3x^2}{x}}$.
8. $f(z) = \sqrt{4z^2+\sqrt{27-2z}}$.
9. $y = \sqrt[3]{\frac{4t+1}{2-5t}}$.

10. $y = x\sqrt{x + \sqrt{x+1}}$.

11. $x = \dfrac{3y^2}{\sqrt{y^2+1}}$.

12. $y = \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2-1}}$.

13. $f(z) = \dfrac{\sqrt{z}+1}{(\sqrt{z}+3)^2}$.

14. Si $f(w) = \dfrac{\sqrt{w+1}+3}{(w^2+1)^3}$, calcular $f\,'(1)$.

15. Sean $\Phi(s) = \sqrt{1-\psi(s)}$, $\psi(-2) = -3$ & $\psi\,'(-2) = 3$, calcule $\Phi'(-2)$.

Ejercicios 6.2.1 *Regla de la cadena, página 10*

1. $\dfrac{dy}{dx} = 60x^3(3x^4-2)^4.$

2. $\dfrac{du}{dt} = 10\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^9\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right).$

3. $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{-4y}{\sqrt{1-y^2}}.$

4. $\dfrac{dw}{du} = \dfrac{-60u}{(3u^2+1)^3}.$

5. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{-10y^4}{\sqrt[3]{(y^5-2)^4}}.$

6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{x}}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right].$

7. $f'(x) = -\dfrac{3x^2+1}{2x^2}\sqrt{\dfrac{x}{1-3x^2}}.$

8. $f'(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{4z^2+\sqrt{27-2z}}}\left(8z-\dfrac{1}{\sqrt{27-2z}}\right).$

9. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{13}{3\sqrt[3]{(2-5t)^4(4t+1)^2}}.$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x\sqrt{x+1}+5x+4}{4\sqrt{x+1}\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}.$

11. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{3y(y^2+2)}{\sqrt{(y^2+1)^3}}.$

12. $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}-x^2+1}.$

13. $f'(z) = \dfrac{-\sqrt{z}+1}{2\sqrt{z}(\sqrt{z}+3)^3}.$

14. $f'(1) \approx -1.6111.$

15. $\Phi'(-2) = -\dfrac{3}{4}.$

CAPÍTULO

6

Reglas de derivación

[1]

6.3 Derivadas laterales

Nuevamente, como la derivada de una función f en un punto x_0 es un límite, podemos extender el concepto y definir:

- Derivada lateral por la derecha, si tomamos el límite por la derecha del cociente diferencial.

$$f'(x_0^+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

  o bien

$$f'(x_0^+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Derivada lateral por la izquierda, si tomamos el límite por la izquierda del cociente diferencial.

$$f'(x_0^-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

  o bien

$$f'(x_0^-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Y así también aplicarle a la derivada todas las propiedades obtenidas para un límite, por ejemplo:

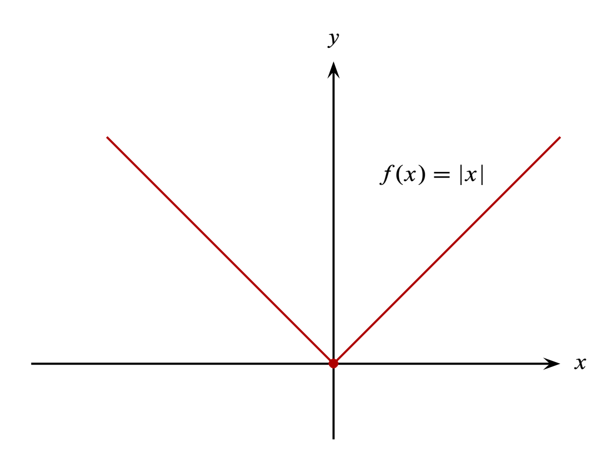
[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

- Una función f es derivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ es derivable en x_0 por la derecha y por la izquierda, y ambas derivadas laterales son iguales.

Este resultado se aplica para probar la no derivabilidad de una función en un punto si la función no tiene alguna derivada lateral o bien teniéndolas ambas son distintas.

Ejemplo 6.3.1 *Calcular las derivadas laterales $f'(0^-)$ y $f'(0^+)$ para $f(x) = |\,x\,|$, y decidir su derivabilidad en dicho punto.*





Calculemos las dos derivadas laterales en 0:

Por la derecha

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|\,x\,|-|\,0\,|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1\,.$$

Por la izquierda

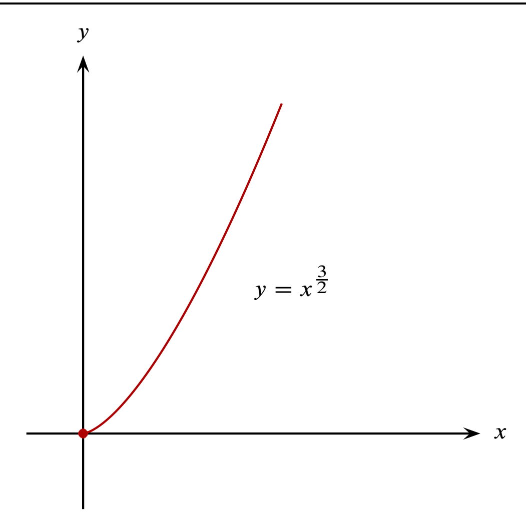
$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|\,x\,|-|\,0\,|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1\,. \end{aligned}$$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, no existe $f'(0)$, por lo que $f(x) = |\,x\,|$ no es derivable en 0.
Obsérvese que en 0 la gráfica de $f(x) = |\,x\,|$ tiene un pico y la gráfica de una función derivable en un punto no debe tener un pico en dicho punto. Por lo tanto no existe la recta tangente en este punto.

□

Ejemplo 6.3.2 *Determinar cuáles de las derivadas laterales $f'(0^-)$ y $f'(0^+)$ existen para $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, y decidir su derivabilidad en dicho punto.*

▼



El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$, por lo que no es derivable en 0; de hecho en el dominio de $f(x)$ no existe un intervalo abierto que contenga a 0. Sí existen en cambio dentro de dicho dominio intervalos de la forma $[0, b)$ con $b > 0$, entonces sólo tiene sentido calcular la derivada en 0 por la derecha:

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x} = \lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{2}} = 0\,.$$

□

Ejercicios 6.3.1 *Soluciones en la página 4*

Determinar cuáles de las derivadas laterales $[f'(x_0^-)$ y/o $f'(x_0^+)]$ existen y decidir la derivabilidad de la función f dada en el punto x_0 mencionado.

1. $x_0 = 0$ & $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0\,; \\ -x^2 & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$

2. $x_0 = -1$ & $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1\,; \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1\,. \end{cases}$

3. $x_0 = \dfrac{3}{2}$ & $f(x) = (2x - 3)^{3/2} + 1\,.$

4. $x_0 = 1$ & $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x < 1\,; \\ -x^2 + 5x - 4 & \text{si } x \geq 1\,. \end{cases}$

5. $x_0 = 3$ & $f(x) = \begin{cases} (x - 2)^2 & \text{si } x \leq 3\,; \\ \sqrt{2x - 5} & \text{si } x > 3\,. \end{cases}$

Ejercicios 6.3.1 *Derivadas laterales, página 3*

1. $f'(0^-) = 0$;
   $f'(0^+) = 0$;
   f es derivable en 0 y en $f'(0) = 0$.
2. $f'(-1^-) = -2$;
   $f'(-1^+) = 2$;
   $f(-1)$ no existe; f no es derivable en $x = -1$.
3. $f'\left(\frac{3}{2}^-\right)$ no existe;
   $f'\left(\frac{3}{2}^+\right) = 0$;
   $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ no existe; f no es derivable en $x_0 = \frac{3}{2}$.
4. $f'(1^-) = 3$;
   $f'(1^+) = 3$;
   f es derivable en $x_0 = 1$ y en $f'(1) = 3$.
5. $f'(3^-) = 2$;
   $f'(3^+) = 1$;
   f no es derivable en $x_0 = 3$.

CAPÍTULO

6

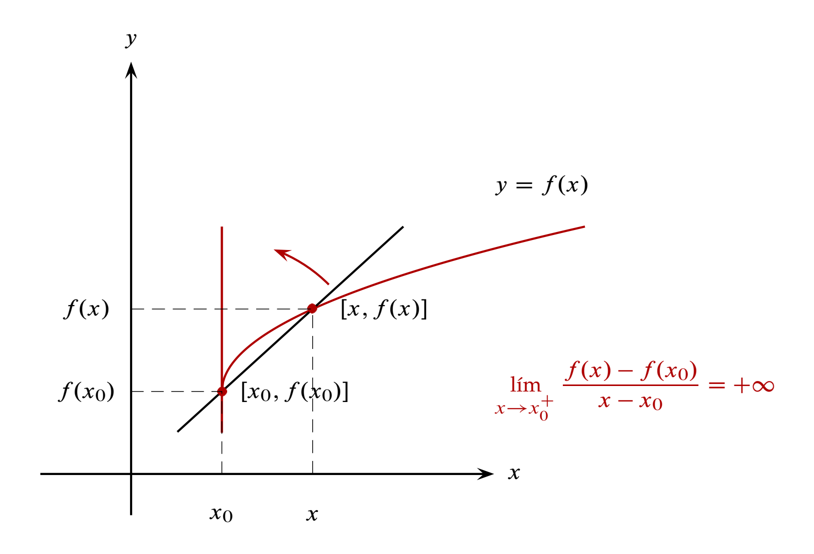
Reglas de derivación

[1]

6.4 Derivadas infinitas

Puede ocurrir que una función f no tenga derivada en un punto x_0, pero que se cumpla alguno de los siguientes casos:

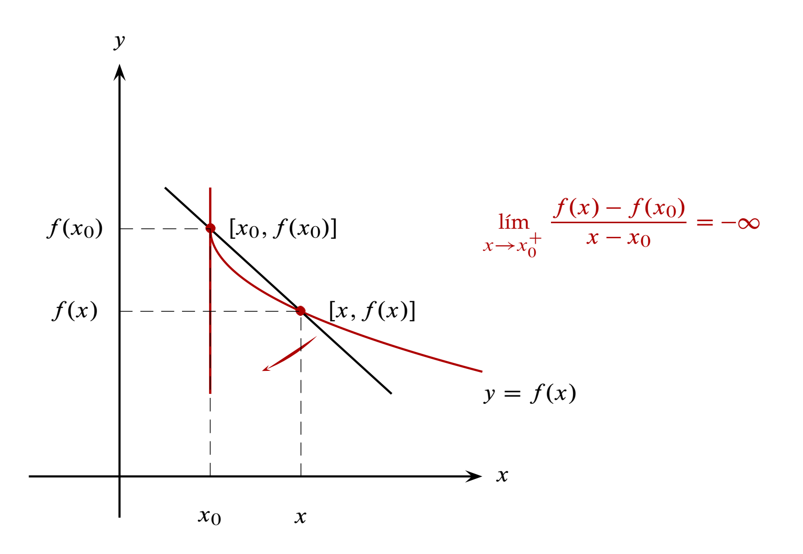
- $f'(x_0^+) = +\infty$.



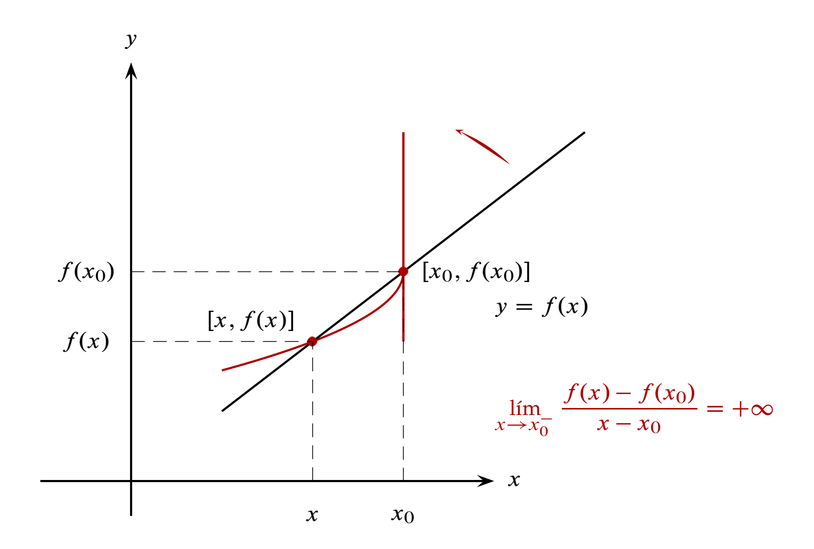
Cuando tomamos x más cercano a x_0, la recta secante que une los puntos $[x_0, f(x_0)]$ y $[x, f(x)]$ se aproxima a la recta vertical que pasa por $[x_0, f(x_0)]$ en el sentido señalado.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

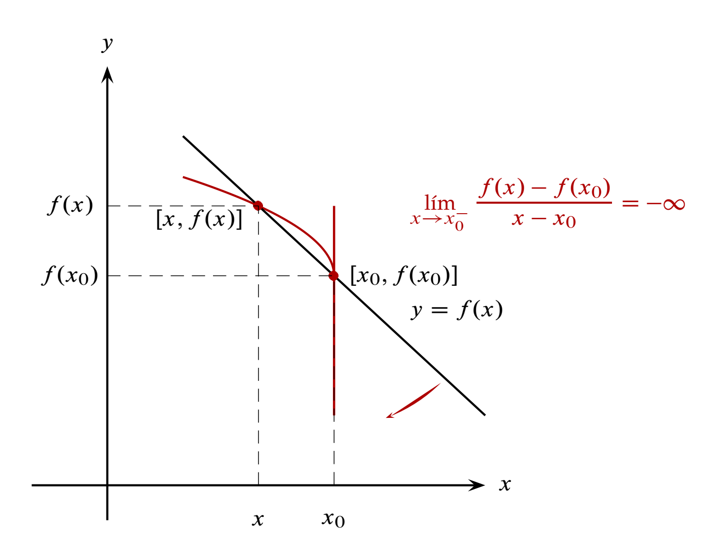
- O bien $f'(x_0^+) = -\infty$.



- O bien $f'(x_0^-) = +\infty$.



- O bien $f'(x_0^-) = -\infty$.



Si ocurre al menos uno de esos cuatro casos, diremos que la gráfica de f tiene tangente vertical en x_0.

Ejemplo 6.4.1 *Determinar $g'(-1^+)$ y $g'(-1^-)$ para $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.*

▼

$$g'(-1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} =$$

(para este caso vemos que $h = |\,h\,| = \sqrt{h^2}$, pues $h > 0$)

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{1-(-1+h)^2}}{|\,h\,|} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{2h-h^2}}{\sqrt{h^2}} = \lim_{h\to 0^+} \sqrt{\frac{2h-h^2}{h^2}} =$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \sqrt{\frac{2}{h} - 1} = +\infty\,.$$

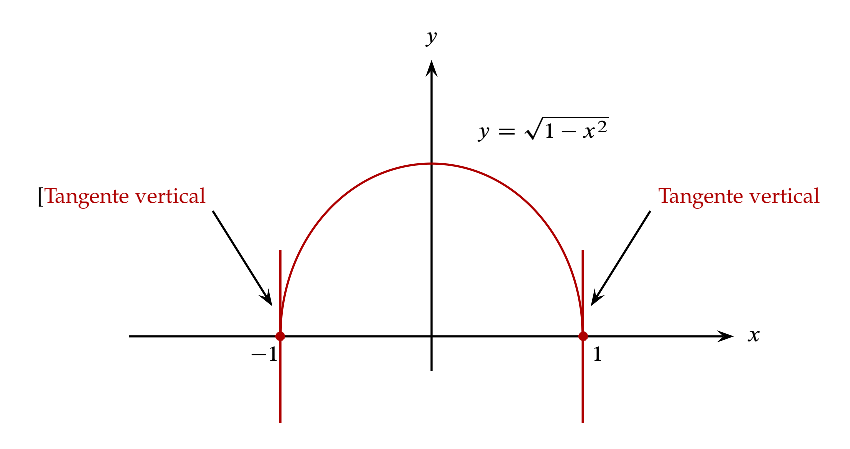
Calculamos también

$$g'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} =$$

(ahora tenemos que $h = -|\,h\,| = -\sqrt{h^2}$, pues $h < 0$)

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{1-(1+h)^2}}{-|\,h\,|} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{-2h-h^2}}{-\sqrt{h^2}} = -\lim_{h\to 0^-} \sqrt{\frac{-2h-h^2}{h^2}} =$$
$$= -\lim_{h\to 0^-} \sqrt{-\frac{2}{h} - 1} = -\infty\,.$$

Por lo tanto en $x = -1$ y en $x = 1$ la curva $y = \sqrt{1-x^2}$ tiene tangente vertical.



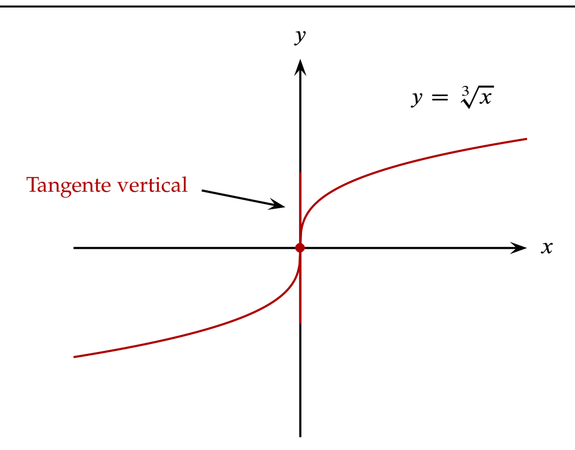
□

Ejemplo 6.4.2 *Obtener $f'(0^-)$ y $f'(0^-)$ para $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.*

▼

$$f'(0^\pm) = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty\,.$$

Por lo tanto, en $x = 0$ la curva $y = \sqrt[3]{x}$ tiene tangente vertical.



□

Ejemplo 6.4.3 *Calcular $f'(0^-)$ y $f'(0^-)$ para $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.*

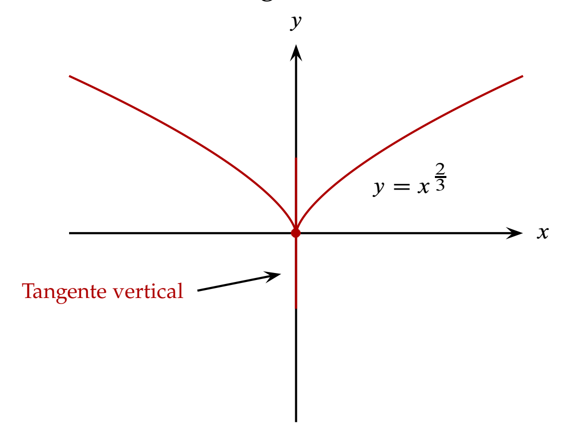
▼

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = +\infty\,.$$

De igual manera:

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = -\infty\,.$$

Por lo tanto, en $x = 0$ la curva $y = x^{\frac{2}{3}}$ tiene tangente vertical.



□

Ejemplo 6.4.4 *Determinar $f'(0^-)$ y $f'(0^-)$ para $f(x) = \left|\sqrt[3]{x}\right|$.*

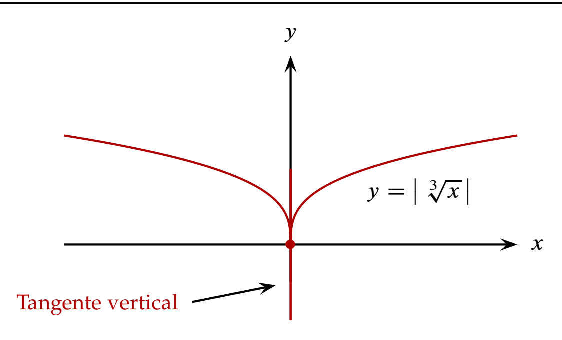
▼

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\left|\sqrt[3]{h}\right|}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty\,.$$

De igual manera

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\left|\sqrt[3]{h}\right|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\sqrt[3]{h}}{h} \lim_{h \to 0^-} \frac{-1}{h^{\frac{2}{3}}} = -\infty\,.$$

Por lo tanto, en $x = 0$ la curva $y = \left|\sqrt[3]{x}\right|$ tiene tangente vertical.



□

Ejercicios 6.4.1 *Soluciones en la página 6*

Para las siguientes funciones, encontrar dónde la derivada se hace infinita y determinar si es $+\infty$ o bien $-\infty$.

1. $f(x) = \sqrt{x-4}$.
2. $g(t) = t^{3/5}$.
3. $\phi(y) = (y-2)^{2/5} + 1$.
4. $w = (1-u)^{2/3} + 1$.
5. $y = 1 + \sqrt{3-2x}$.

Ejercicios 6.4.1 *Derivadas infinitas, página 5*

1. $f'(4^+) = +\infty$.
2. $g'(0^-) = +\infty$ & $g'(0^+) = +\infty$.
3. $\phi'(2^-) = -\infty$;
   $\phi'(2^+) = +\infty$.
4. $w'(1^-) = -\infty$;
   $w'(1^+) = +\infty$.
5. $y'(\frac{3}{2}^-) = -\infty$.

CAPÍTULO

6

Reglas de derivación

[1]

6.5 Derivadas de orden superior

De una función f se deriva otra función: la función derivada $f\,'$, cuyo dominio es el subconjunto del dominio de la función f donde la función f es derivable y a sus puntos $f\,'$ les hace corresponder precisamente el valor de la derivada de f en dichos puntos, es decir,

$$f\,'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

o bien

$$f\,'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

$$\begin{aligned} f\,' : D_{f\,'} \to \mathbb{R}\,,\ \text{donde } D_{f\,'} &= \left\{ x_0 \in D_f \;\middle|\; \text{existe } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\} = \\ &= \left\{ x_0 \in D_f \;\middle|\; \text{existe } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right\}. \end{aligned}$$

$$x_0 \longmapsto f\,'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Derivar f o encontrar la derivada de f significa hallar $f\,'$.

- A su vez esta función derivada $f\,'$ puede ser también derivable y su derivada es la segunda derivada de f.

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

$$f''(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \text{ o bien } f''(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}\,.$$

- En general la n-ésima derivada de una función f es la derivada de la $(n-1)$-ésima derivada de la función f', esto es

  $$f^{(n)}(x) \overset{\text{def}}{=} [f^{(n-1)}(x)]'.$$

  Nótese que ponemos el orden de derivación entre paréntesis, para no confundirlo con un exponente.

  Hay funciones que poseen derivadas de todos los órdenes en todo su dominio, como las polinomiales y las funciones racionales.

- Denominamos derivada de orden superior a cualquier n-ésima derivada de la función f cuando $n > 1$.

Ejemplo 6.5.1 *La derivada de una función polinomial es otra función polinomial de grado una unidad menor que el grado de la polinomial original.*

▼ En efecto:

$$\begin{aligned}
&f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; f'(x) = n\,a_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}x + a_{n-1} \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; f''(x) = n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + \cdots + 3\cdot 2a_{n-3}x + 2a_{n-2} \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; f'''(x) = n(n-1)(n-2)a_0x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_1x^{n-4} + \cdots + 3\cdot 2a_{n-3} \;\Rightarrow\\
&\qquad\vdots\\
&\Rightarrow\; f^{(n)}(x) = n!a_0\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la enésima derivada de una función polinomial es la constante $n(n-1)(n-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1 = n!$ multiplicada por el coeficiente principal a_0, que es el coeficiente del término de mayor grado.
Las sucesivas derivadas son todas iguales a 0:

$$f^{(k)}(x) = 0 \text{ si } k > n\,.$$

□

Ejemplo 6.5.2 *La derivada de una función racional es otra función racional con el mismo dominio que la original.*

▼ Efectivamente, si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde P y Q son funciones polinomiales, entonces

$$f'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{[Q(x)]^2}\,;$$

además todas las expresiones que aparecen en la expresión anterior:

$P'(x)$, $Q'(x)$, $P'(x)Q(x)$, $P(x)Q'(x)$, $P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)$ así como $[Q(x)]^2$ son funciones polinomiales.

□

Ejercicios 6.5.1 *Soluciones en la página* **??**

Calcular la segunda derivada de cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 2x^6 - 15x^4 - 1$.
2. $g(x) = (3x^2 - 1)^5$.
3. $y = \dfrac{2u + 1}{3u - 2}$.
4. $w = \dfrac{t^2}{t^2 - 4}$.
5. $u = \dfrac{3y}{y^2 + 1}$.
6. $y = x^2 + \dfrac{8}{x}$.
7. $z = (3 - t^2)^{3/2}$.
8. $w = \left(\dfrac{u}{u + 1}\right)^{-4}$.
9. $x = \dfrac{1}{y^2 - y + 1}$.
10. $y = x\sqrt{1 - x^2}$.

Determinar la n-ésima derivada de cada una de las siguientes funciones, para el número n dado.

11. $n = 4$ & $f(x) = \dfrac{1}{2x + 1}$.
12. $n = 5$ & $g(t) = t^3 + \dfrac{2}{t}$.
13. $n = 4$ & $w = \dfrac{au - b}{au + b}$ (con a, b constantes) .
14. $n = 3$ & $x = (y^2 + 1)^5$.
15. $n = 3$ & $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

Ejercicios 6.5.1 *Derivadas de orden superior, página* **??**

1. $f''(x) = 60x^2(x^2 - 3)$.
2. $g''(x) = 30(3x^2 - 1)^3(27x^2 - 2)$.
3. $\dfrac{d^2y}{du^2} = \dfrac{42}{(3u-2)^3}$.
4. $\dfrac{d^2w}{dt^2} = \dfrac{8(3t^2+4)}{(t^2-4)^3}$.
5. $\dfrac{d^2u}{dy^2} = \dfrac{6y(y^2-3)}{(y^2+1)^3}$.
6. $y'' = 2 + \dfrac{16}{x^3}$.
7. $\dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{3(2t^2-3)}{\sqrt{3-t^2}}$.
8. $\dfrac{d^2w}{du^2} = \dfrac{4}{u^6}(u+1)^2(2u+5)$.
9. $\dfrac{d^2x}{dy^2} = \dfrac{6y(y-1)}{(y^2-y+1)^3}$.
10. $y'' = \dfrac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.
11. $f^{(4)}(x) = 12\left(\dfrac{2}{2x+1}\right)^5$.
12. $g^{(5)}(t) = -\dfrac{240}{t^6}$.
13. $\dfrac{d^4w}{du^4} = \dfrac{-3(2)^4a^4b}{(au+b)^5}$.
14. $\dfrac{d^3x}{dy^3} = 240y(y^2+1)^2(3y^2+1)$.
15. $y^{(3)} = -\dfrac{24x(x^2+1)}{(1-x^2)^4}$.

CAPÍTULO

6

Reglas de derivación

[1]

6.6 Derivación implícita

Hasta aquí la palabra derivada ha sido asociada a funciones definidas explícitamente mediante una igualdad de la forma $y = f(x)$, donde una de las variables (y) aparece explícitamente definida como función de otra variable (x).
En esta situación [dada la función $y = f(x)$], al mencionar la palabra derivada entendemos que se está haciendo referencia a la derivada $\left[\dfrac{dy}{dx} = f'(x)\right]$ de la variable (dependiente) y con respecto a la variable (independiente) x.
Pero no siempre se define a una función en forma explícita como en $y = f(x)$. Puede ocurrir que la variable y sea función de la variable x, definida implícitamente en una ecuación de la forma $g(x, y) = 0$, donde estén relacionadas dichas variables. Veamos algunos ejemplos:

1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
2. $x^2 + y^3 - 6xy = 0$.
3. $(x^2 + y^2 + 4)^2 - 16x^2 - 36 = 0$.

Si tenemos una ecuación en la que aparecen las variables x & y, además de constantes y de operaciones entre ellas, nos podemos preguntar si y es función de x.
Es claro que si podemos despejar la y, dejándola sola en un miembro, habremos contestado afirmativamente a la pregunta, y decimos que tenemos esta y expresada explícitamente como función de x y que en la igualdad original se tenía esa y definida implícitamente como función de x.
Más aún, nos podemos seguir preguntando si la función y (expresada implícitamente) es derivable y en este caso, ¿cómo podríamos calcular su derivada directamente de la igualdad original? La derivada puede calcularse por el método de derivación implícita, que consiste en suponer que

1. canek.azc.uam.mx: 12/ 5/ 2014

y es una función derivable de x y derivar ambos miembros de la ecuación con respecto a x, obteniendo términos que contengan la derivada y' para finalmente despejar la derivada y' que queda en términos de x & y.

Ejemplo 6.6.1 *Calcular* $\dfrac{dy}{dx}$ *en la ecuación* $x^2 + y^2 = 1$.

▼ Suponemos que y es una función derivable de x. Luego, derivando con respecto a x ambos miembros de la ecuación,

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}1 \Rightarrow 2x + 2y \times \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0\,.$$

(Obsérvese que para derivar y^2 hemos usado la regla de la potencia y decimos que su derivada es $2y \cdot y'$ por la regla de la cadena.)
Entonces

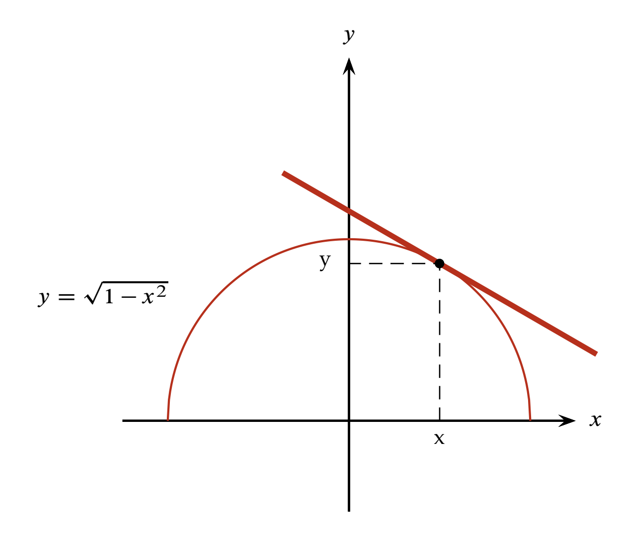
$$2y \cdot y' = -2x \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \text{ donde } y \neq 0\,.$$

Comprobación. Si despejamos y de $x^2 + y^2 = 1$, obtenemos que:

$$y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow |\,y\,| = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}\,.$$

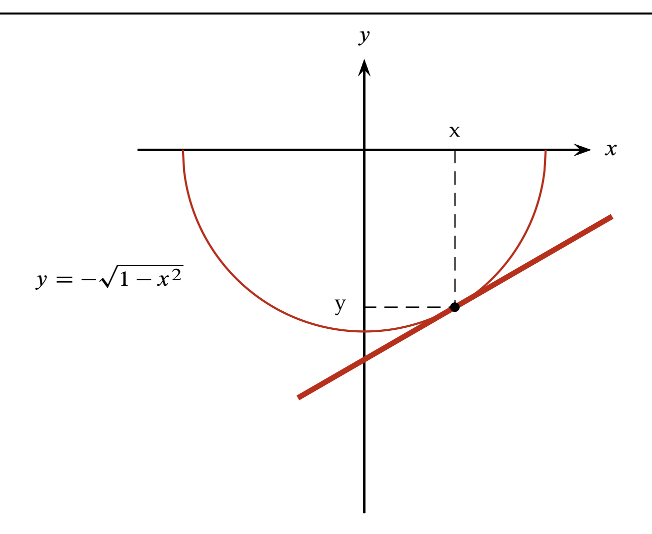
Entonces y no es función de x, pues a un valor de $x \in (-1, 1)$ le corresponden dos valores de y, pero si pensamos que $y = \sqrt{1-x^2}$ para $x \in (-1, 1)$ (donde $y \neq 0$), tenemos

$$y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}\,.$$



Análogamente para $y = -\sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1, 1)$:

$$y = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = -\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{-\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}\,.$$



□

Nota. La comprobación que hemos proporcionado en este primer ejemplo no es algo que siempre pueda hacerse, ya que, generalmente, en la ecuación dada en ocasiones no se puede despejar una de las variables en función de la otra.

Ejemplo 6.6.2 *Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por*

$$x^3 + y^3 = 6xy \quad \textit{(la hoja de Descartes)}$$

en el punto $(3, 3)$.

▼ El punto $(3, 3)$ sí pertenece a la curva definida por $x^3 + y^3 = 6xy$, pues sus coordenadas, $x = 3$ & $y = 3$, satisfacen la ecuación: $3^3 + 3^3 = 27 + 27 = 54 = 6 \cdot 3 \cdot 3$.
Suponemos que en la ecuación $x^3+y^3 = 6xy$ define implícitamente a $y = \phi(x)$; entonces, calculamos $\frac{dy}{dx}$ derivando implícitamente con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(6xy);$$
$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) = 6\frac{d}{dx}(xy).$$

Aplicando las reglas de la potencia y la del producto:

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right).$$

(Nótese que $\frac{dx}{dx} = 1$.)

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6\left(x\frac{dy}{dx} + y\right);$$
$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6x\frac{dy}{dx} + 6y.$$

Dividiendo entre tres

$$x^2 + y^2\frac{dy}{dx} = 2x\frac{dy}{dx} + 2y.$$

Despejamos $\dfrac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned} y^2\frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} &= 2y - x^2; \\ (y^2 - 2x)\frac{dy}{dx} &= 2y - x^2; \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}. \end{aligned}$$

(Nótese que la derivada está en función de x & y, y existe sólo si $y^2 - 2x \neq 0$.)
Evaluamos la derivada en el punto $(3, 3)$ de la gráfica de la función implícitamente definida:

$$y'(3,3) = \frac{2(3) - 3^2}{3^2 - 2(3)} = \frac{6-9}{9-6} = \frac{-3}{3} = -1.$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $(3, 3)$ con pendiente -1 es

$$\frac{y-3}{x-3} = -1 \;\Rightarrow\; y - 3 = -x + 3 \;\Rightarrow\; y = -x + 6.$$

□

Ejemplo 6.6.3 *Suponiendo que en la siguiente ecuación se defina implícitamente $y = \phi(x)$, calcular en el punto $(2, \sqrt{2})$ la ecuación de la recta tangente a la curva*

$$(x^2 + y^2 + 4)^2 - 16x^2 = 36.$$

▼ En efecto, el punto $(2, \sqrt{2})$ pertenece a la curva pues sus coordenadas $x = 2$ & $y = \sqrt{2}$ satisfacen la ecuación ya que

$$[2^2 + (\sqrt{2})^2 + 4]^2 - 16(2)^2 = (4 + 2 + 4)^2 - 16 \times 4 = 10^2 - 64 = 100 - 64 = 36.$$

Calculemos la pendiente de la recta tangente obteniendo implícitamente la derivada de la función

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[(x^2 + y^2 + 4)^2 - 16x^2\right] &= \frac{d}{dx}(36) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; 2(x^2 + y^2 + 4)(2x + 2yy') - 32x &= 0 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; 4(x^2 + y^2 + 4)(x + yy') &= 32x \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; x + yy' &= \frac{32x}{4(x^2 + y^2 + 4)} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; y' &= \frac{1}{y}\left(\frac{8x}{x^2 + y^2 + 4} - x\right). \end{aligned}$$

La derivada y' existe si $y \neq 0$.

En particular, en el punto $(2, \sqrt{2})$, la pendiente vale

$$y'(2, \sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{16}{10} - 2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{5};$$

la ecuación de la recta tangente es

$$y - \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{5}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{5}x + \frac{2}{5}\sqrt{2} + \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{5}x + \frac{7}{5}\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{5}(x-7).$$

□

Ejemplo 6.6.4 *Determinar los puntos de la curva*

$$x^2 + y^2 = 4x + 4y$$

en los que la recta tangente es horizontal.

▼ Suponemos que en la ecuación $x^2 + y^2 = 4x + 4y$ se tiene definida implícitamente la función $y = \phi(x)$ y calculamos $\frac{dy}{dx}$ derivando implícitamente con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4x + 4y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 4 + 4\frac{dy}{dx} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} = 4 - 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2y-4)\frac{dy}{dx} = 4 - 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4-2x}{2y-4} = \frac{2-x}{y-2}, \text{ si } y \neq 2.$$

La recta tangente es horizontal donde la derivada es cero. Es decir, si:

$$\frac{2-x}{y-2} = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Sustituyendo la x en la ecuación que define implícitamente a la función:

$$2^2 + y^2 = 4 \times 2 + 4y \Rightarrow y^2 - 4y - 4 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 2 + 2\sqrt{2}, \\ 2 - 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Los puntos solicitados son $(2, 2-2\sqrt{2})$ y $(2, 2+2\sqrt{2})$.

□

Ejemplo 6.6.5 *Utilizando derivación implícita calcular y'' en función de x y de y, en la ecuación*

$$x^4 + y^4 = 16\,.$$

▼ Suponemos que $y = \phi(x)$ y calculamos $\dfrac{dy}{dx}$ derivando implícitamente con respecto a x.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(y^4) &= \frac{d}{dx}(16)\,;\\
4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx} &= 0\,;\\
4y^3\frac{dy}{dx} &= -4x^3\,;\\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{4x^3}{4y^3} \text{ para } y \neq 0\,;\\
y' &= -\frac{x^3}{y^3}\,.
\end{aligned}$$

De nuevo derivamos con respecto a x para calcular y'':

$$\begin{aligned}
y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}\Big(-\frac{x^3}{y^3}\Big) &= -\frac{y^3\dfrac{d}{dx}x^3 - x^3\dfrac{d}{dx}y^3}{(y^3)^2} =\\
&= -\frac{y^3 \times 3x^2 - x^3 \times 3y^2\dfrac{dy}{dx}}{y^6} = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\dfrac{dy}{dx}}{y^6}\,.
\end{aligned}$$

Ahora utilizando $y' = -\dfrac{x^3}{y^3}$ se obtiene:

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\Big(-\dfrac{x^3}{y^3}\Big)}{y^6} = -\frac{3x^2y^3 + 3x^6y^{-1}}{y^6} =$$

(multiplicando y dividiendo por y)

$$= -\frac{y(3x^2y^3 + 3x^6y^{-1})}{y \times y^6} = -\frac{3x^2y^4 + 3x^6}{y^7}\,.$$

□

Ejemplo 6.6.6 *Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva*

$$\frac{8}{x^2 + y^2} + xy^3 - x^4 = 1$$

en el punto $(2, 2)$.

▼ Efectivamente el punto $(2, 2)$ pertenece a la curva, pues sus coordenadas $x = y = 2$ satisfacen la ecuación

$$\frac{8}{2^2 + 2^2} + 2(2)^3 - 2^4 = \frac{8}{4+4} + 2\times 8 - 16 = \frac{8}{8} + 16 - 16 = 1.$$

Si suponemos que y es función de x, entonces podemos calcular su derivada mediante derivación implícita

$$\frac{d}{dx}[8(x^2+y^2)^{-1} + xy^3 - x^4] = \frac{d}{dx}1;$$
$$8(-1)(x^2+y^2)^{-2}\frac{d}{dx}(x^2+y^2) + \frac{d}{dx}(xy^3) - \frac{d}{dx}x^4 = 0\,,$$

obtenemos

$$\frac{-8(2x+2yy')}{(x^2+y^2)^2} + y^3 + x\times 3y^2y' - 4x^3 = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; -16x - 16yy' + (x^2+y^2)^2(y^3 + 3xy^2y' - 4x^3) = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y'[-16y + 3xy^2(x^2+y^2)^2] = 16x - (x^2+y^2)^2(y^3-4x^3) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y' = \frac{16x - (x^2+y^2)^2(y^3-4x^3)}{-16y + 3xy^2(x^2+y^2)^2}\,.$$

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente en el punto $(2, 2)$ es

$$y'(2,2) = \frac{32 - (4+4)^2(8-32)}{-32 + 24(4+4)^2} = \frac{32 - 64(-24)}{-32 + 24(64)} = \frac{32 + 1\,536}{-32 + 1\,536} = \frac{1\,568}{1\,504} = \frac{49}{47}\,.$$

Luego la ecuación de la recta tangente es

$$y - 2 = \frac{49}{47}(x-2) \;\Rightarrow\; y = \frac{49}{47}x + 2 - \frac{98}{47} \;\Rightarrow\; y = \frac{49}{47}x + \frac{94-98}{47} \;\Rightarrow\; y = \frac{49}{47}x - \frac{4}{47}\,.$$

□

Ejemplo 6.6.7 *Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva*

$$\sqrt{5-y} + xy^2 = 6$$

en el punto $(4, 1)$.

▼ Efectivamente el punto $(4, 1)$ pertenece a la curva, pues utilizando $x = 4$ & $y = 1$ se comprueba la identidad

$$\sqrt{5-1} + 4\times 1^2 = \sqrt{4} + 4\times 1 = 2 + 4 = 6.$$

Para hallar la pendiente de la recta tangente, suponemos que y es una función derivable de x; en-

tonces, derivando implícitamente con respecto a x obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(5-y)^{\frac{1}{2}} + \frac{d}{dx}(xy^2) = \frac{d}{dx}6 \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; \frac{1}{2}(5-y)^{-\frac{1}{2}}(0-y') + \left[y^2\frac{dx}{dx} + x\frac{d}{dx}y^2\right] = 0 \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; \frac{-y'}{2\sqrt{5-y}} + y^2 + 2xyy' = 0 \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; \left(\frac{-1}{2\sqrt{5-y}} + 2xy\right) y' = -y^2 \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow\; y' = \frac{-y^2}{\dfrac{-1}{2\sqrt{5-y}} + 2xy}.
\end{aligned}
$$

La pendiente en el punto $(4,1)$ es

$$
y'(4,1) = \frac{-1^2}{\dfrac{-1}{2\sqrt{5-1}} + 2\times 4\times 1} = \frac{-1}{\dfrac{-1}{2\times 2} + 8} = \frac{-1}{\dfrac{31}{4}} = -\frac{4}{31},
$$

por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$
y - 1 = -\frac{4}{31}(x-4) \;\Rightarrow\; y = -\frac{4}{31}x + \frac{16}{31} + 1 \;\Rightarrow\; y = -\frac{4}{31}x + \frac{47}{31}.
$$

La pendiente de la recta normal es $\dfrac{31}{4}$ y su ecuación es

$$
y - 1 = \frac{31}{4}(x-4) \;\Rightarrow\; y = \frac{31}{4}x - 30.
$$

□

Ejercicios 6.6.1 *Soluciones en la página 10*

1. Dada la curva definida por $y^3 + 3y^2 = x^4 - 3x^2$.
   a. Obtener la ecuación de su recta tangente en el punto $(-2,1)$.
   b. Calcular las abscisas de los puntos sobre la curva con rectas tangentes horizontales.
2. Dada la curva $2(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2)$.
   a. Obtener $\dfrac{dy}{dx} = y'$.
   b. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P(3,1)$.
3. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $\dfrac{4y^2 - 3x^2y}{3-4x^2} = -1$ en el punto $(-1,1)$.

4. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $5x^2y + 8x^4y^2 - 3(y^5 + x^3)^2 = 1$ en el punto $(1,1)$.

5. Obtenga las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva definida implícitamente por $(xy^2 + 9)^2 = (y+2)^{4/3}$ en el punto $(0,25)$.

6. Encuentre la pendiente de la recta tangente en el punto $P(1,1)$ de la Lemniscata de Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 = 4xy\,.$$

7. Encuentre todos los puntos de la curva $x^2y^2 + xy = 2$, donde la recta tangente es horizontal.

8. Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ en la ecuación $y^2(x^2-1)^2 + 3(2y^3-1)^2 = 0$.

9. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función definida implícitamente por $3x^2 - x^2\sqrt{y} + y^3 = 3$ en el punto $(1,1)$.

10. Obtener la ecuación de la recta normal a la curva $\sqrt{3x^2y^3 + 2x^2 - y} = 4 + 2x$ en el punto $(-1,1)$.

11. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $2x^3y + 3xy^3 = 5$ en el punto $(1,1)$.

12. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2y^2 = (y+1)^2(4-y^2)$ en el punto $(0,-2)$.

13. Muestre que las rectas tangentes a la elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ en los puntos $(1,-1)$ & $(-1,1)$ son paralelas.

14. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por $3x^2 + 5y^2 - 3x^2y^2 = 11$ en el punto $(1,2)$.

15. Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva definida por la ecuación

$$\frac{3x^5}{2y^2+1} + \sqrt{x^2 + xy^5} = 4$$

en el punto $(1,0)$.

16. Encontrar la ecuación de la recta tangente a $2x^2 - 3y^3 + \dfrac{2y}{xy-1} = -5$ en el punto $(0,1)$.

17. Encontrar en el punto $(-2,2)$ la ecuación de la recta tangente a la curva $x^4 + y^3 = 24$.

18. Sea $y = f(x)$ definida implícitamente por $x^4 + 3x^2y + y^3 = 5$. Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto $(-1,1)$.

Ejercicios 6.6.1 *Derivación implícita, página 8*

1. a. $y=-\dfrac{20}{9}x-\dfrac{31}{9}$;

   b. 3 puntos: $x_1=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $x_2=0$ & $x_3=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

2. a. $\dfrac{d}{dx}[2(x^2+y^2)^2]=\dfrac{x\left[25-4(x^2+y^2)\right]}{y\left[4(x^2+y^2)+25\right]}$;

   b. la recta tangente es: $y=-\dfrac{9}{13}x+\dfrac{40}{13}$.

3. $y=-\dfrac{14}{5}x-\dfrac{9}{5}$.

4. $y=\dfrac{2}{13}x+\dfrac{11}{13}$.

5. $y=\dfrac{5\,625}{2}x+25$ es la ecuación de la tangente;

   $y=-\dfrac{2}{5\,625}x+25$ es la ecuación de la normal.

6. -1.

7. No tiene tangentes horizontales.

8. $y'=\dfrac{2xy(1-x^2)}{(x^2-1)^2+18y(2y^3-1)}$.

9. $y=-\dfrac{8}{5}x+\dfrac{13}{5}$.

10. $y=-\dfrac{4}{9}x+\dfrac{5}{9}$.

11. $y=-\dfrac{9}{11}x+\dfrac{20}{11}$.

12. $y=-2$.

13. Tienen la misma pendiente igual a 1.

14. $y=\dfrac{9}{4}x-\dfrac{1}{4}$.

15. La tangente: $x=1$ y la normal: $y=0$.

16. $y=-\dfrac{2}{11}x+1$.

17. $y=\dfrac{8}{3}x+\dfrac{22}{3}$.

18. $y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{8}{3}$.

CAPÍTULO

7

Razones de cambio relacionadas

[1]

Al definir la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto fijo x_0, se explicitó que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

donde $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ & $\Delta x = x - x_0 = h$ son los incrementos de las variables y & x, respectivamente.
Refiriéndonos a estos incrementos podemos decir que:

- El incremento $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ muestra el cambio que tiene la variable y.
- El incremento $\Delta x = x - x_0 = h$ muestra el cambio que tiene la variable x.

  De esto se desprende que el cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  es una razón de cambio que muestra la razón entre el cambio que tiene la variable y & el cambio que tiene la variable x.

  Es decir, es una razón que compara el cambio de la variable y con respecto al cambio de la variable x.

  O sea que es una razón que mide el cambio promedio de la variable y, a lo largo del intervalo limitado por x_0 & $x_0 + \Delta x$.

- Esto es, es la razón de cambio promedio de la función $y = f(x)$ con respecto a x, a lo largo del intervalo con extremos x_0 & $x_0 + \Delta x$.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Ahora bien, al escribir $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nos estamos refiriendo a la razón de cambio promedio de la variable y cuando se consideran cambios cada vez más pequeños en la variable x. Podemos decir que con este límite se busca una razón de cambio instantánea de la variable y con respecto a la variable x.
Es decir, cuando hacemos que la longitud ($|\,\Delta x\,|$) del intervalo limitado por x_0 & $x_0 + \Delta x$ tienda a cero, "la razón de cambio promedio de y" se convierte en "la razón de cambio instantánea de y", por supuesto, con respecto a x.

En el caso particular en que la variable independiente es el tiempo t, es usual referirse a la derivada como una velocidad de cambio, en lugar de decir razón de cambio instantánea con respecto a t. Por ejemplo:

- Si $x = \phi(t)$ es la posición de un móvil en el instante de tiempo t, entonces $\dfrac{dx}{dt} = \phi'(t)$ es la velocidad de cambio de la posición $x = \phi(t)$ en el instante de tiempo t, que es la velocidad instantánea del móvil.

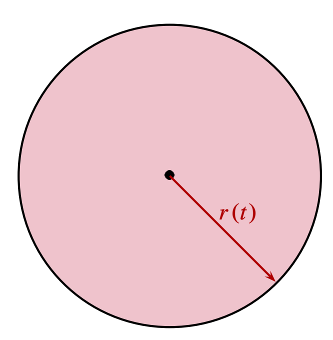
- Si $v = g(t)$ es la velocidad de un móvil en el instante de tiempo t, entonces $\dfrac{dv}{dt} = g'(t)$ es la velocidad de cambio de la velocidad $v = g(t)$ en el instante de tiempo t, que es la aceleración instantánea del móvil.

Supongamos ahora que, en el contexto de un problema, se tiene una función de la que queremos medir y obtener su razón de cambio (su derivada). Es muy problable que dicha función se encuentre relacionada con otras funciones cuyas derivadas (razones de cambio) se conozcan. La estrategia en este caso consiste en encontrar una relación matemática en donde se relacionen las funciones que aparezcan en el contexto del problema.
Posteriormente se deriva la expresión matemática mencionada y se obtiene una relación de funciones y razones de cambio (las que se conocen con las que no se conocen).
Por último se despeja la razón de cambio deseada que estará en términos de las otras razones de cambio.
Se dice entonces que se tiene un problema de razones de cambio relacionadas.

En este tipo de problemas es de vital importancia tener muy claro ¿qué es lo que se pide en el problema? así como, ¿qué es lo que se sabe en el problema? Teniendo claro lo que se pide y lo que se sabe, procedemos a matematizar el problema.

Ejemplo 7.1.1 *Al arrojar una piedra a un estanque de agua tranquila se forman ondas circulares concéntricas cuyos radios aumentan de longitud al paso del tiempo. Cuando la onda exterior tiene un radio de 3 m, éste aumenta a una rapidez (velocidad) de 50 cm/s. ¿A qué rapidez (velocidad) aumenta el área del círculo formado por dicha onda?*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez (velocidad) a la que está aumentando el área de un círculo, cuando su radio mide 3 m y la longitud de éste aumenta a razón de 0.5 m/s.
Es decir, si consideramos un círculo que (en cierto instante t) tiene un radio $r(t)$ y un área $A(t)$, entonces lo que se desea es calcular la velocidad con que cambia (razón de cambio) el área $A(t)$, cuando el radio $r(t)$ es de 3 m y la razón de cambio del radio es de 0.5 m/s. Esto es, se pide calcular la derivada $\dfrac{dA}{dt}$ cuando $r = 3$ y cuando $\dfrac{dr}{dt} = 0.5$.



El área del círculo es $A = \pi r^2$. La razón de cambio de A con respecto al tiempo t se obtiene derivando ambos miembros con respecto al tiempo:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\pi\, r^2(t)\right] = 2\pi\, r(t)\left(\frac{dr}{dt}\right).$$

En el caso particular en que $r(t) = 3$ m y $\dfrac{dr}{dt} = 0.5$ m/s:

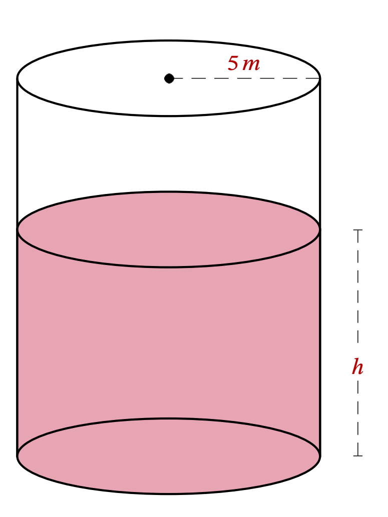
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r(t)\left(\frac{dr}{dt}\right) = 2\pi(3\text{ m})(0.5\ \text{ m/s}) = 3\pi\ \text{m}^2/\text{s} \;\Rightarrow\; \frac{dA}{dt} = 3\pi\ \text{m}^2/\text{s} \approx 9.4248\,\text{m}^2/\text{s}.$$

Esto es, en el preciso instante en que el radio es de 3 m, éste tiene un cambio de 0.5 m/s y el área tiene un cambio de 3π m^2/s ≈ 9.4248 m^2/s.

□

Ejemplo 7.1.2 *A un depósito cilíndrico de base circular y 5 m de radio, le está entrando agua a razón de 25 l/s. Calcular la rapidez a la que sube la superficie del agua.*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez (velocidad) a la que está aumentando la altura del nivel de agua contenida en un cilindro circular recto de radio fijo, cuando el volumen del agua aumenta a razón de 25 l/s (25 dm^3/s). Es decir, si consideramos el cilindro circular recto formado por el agua que tiene un radio fijo $r = 5$ m, altura h y volumen V, entonces lo que se desea es calcular la velocidad con que cambia (razón de cambio) la altura h, cuando la razón de cambio del volumen V es de 25 dm^3/s. Esto es, se pide calcular la derivada $\dfrac{dh}{dt}$ cuando $r = 50$ dm y cuando $\dfrac{dV}{dt} = 25$ dm^3/s.



Obsérvese que:

1. El volumen del agua contenida en el cilindro va cambiando. La razón de cambio es $\dfrac{dV}{dt}$.
2. La altura del nivel del agua contenida en el cilindro va cambiando. La razón de cambio es $\dfrac{dh}{dt}$.
3. El radio del cilindro permanece constante.

El volumen V de un cilindro circular de radio r y altura h es $V = \pi r^2 h$. Entonces, cuando $r = 50$ dm, el volumen del cilindro es $V = \pi(50)^2 h = 2500\pi h$ dm^3.
Ya que tanto la altura como el volumen son funciones del tiempo t, derivamos con respecto a t y obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = 2500\,\pi\left(\frac{dh}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2500\pi}\left(\frac{dV}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2500\pi}(25) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{100\pi}\ \text{dm/s} \approx 0.0032\ \text{dm/s}.$$

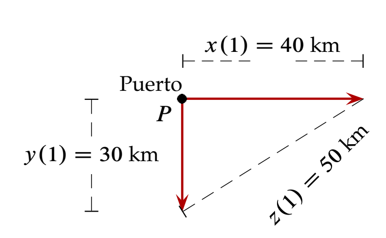
Por lo tanto, la rapidez con que sube la superficie del agua es

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{100\pi}\ \text{dm/s} \approx 0.0032\ \text{dm/s}.$$

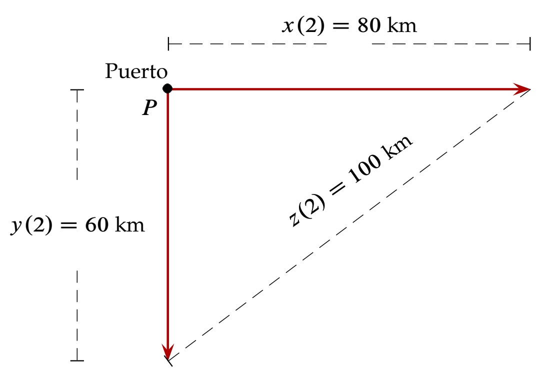
□

Ejemplo 7.1.3 *Dos barcos salen simultáneamente de un puerto; uno viaja hacia el sur a una velocidad de 30 km/h y el otro hacia el este a una velocidad de 40 km/h. Después de 2 h ¿cuál es la velocidad de separación de los dos barcos?*

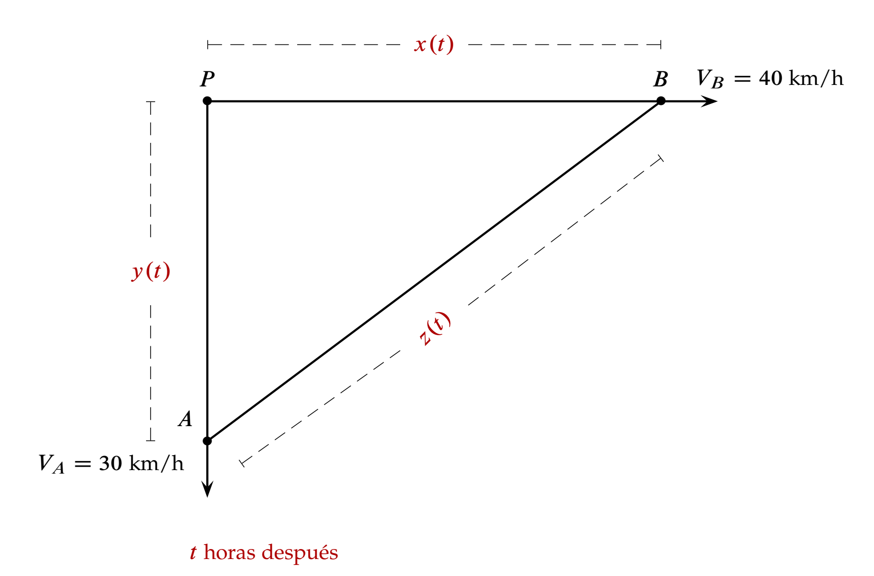
▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la velocidad a la que se están separando los barcos después de 2 h de haber partido del mismo puerto. Es decir, si consideramos que $z(t)$ es la distancia que separa a los barcos en cierto instante t, entonces lo que se desea es calcular la rapidez con que cambia (razón de cambio) la distancia $z(t)$ al paso del tiempo. Esto es, se pide calcular la derivada $\dfrac{dz}{dt}$ cuando el tiempo t transcurrido es de 2 h.
La posición de los barcos después de haber iniciado su desplazamiento es



Una hora después



Dos horas después



Si $x(t)$ es la distancia recorrida en t horas por el barco B que se desplaza hacia el este, entonces

$$x(t) = v_B \cdot t = 40\,(\text{km/h}) \cdot t\ (\text{h}) = 40t\ (\text{km})\,.$$

y si $y(t)$ es la distancia recorrida en t horas por el barco A que se desplaza hacia el sur, entonces

$$y(t) = v_A \cdot t = 30\,(\text{km/h}) \cdot t\ (h) = 30t\ (\text{km})\,.$$

Luego, por el teorema de Pitágoras, la distancia z que separa a los dos barcos cumple con

$$\begin{aligned} & z(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2 = (40t)^2 + (30t)^2 = 1\,600t^2 + 900t^2 = 2\,500t^2 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ & z(t) = \sqrt{2\,500t^2} \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ & z(t) = 50t\ (\text{km}). \end{aligned}$$

Así pues, la distancia $z(t)$ es la función lineal $z(t) = 50t$, por lo que su derivada es $\frac{dz}{dt} = 50$, que es una función constante. Esto es, en cualquier instante $t > 0$, los barcos se están separando a una velocidad constante $z'(t) = 50$ km/h.
En particular, después de 2 h, $z'(2) = 50$ km/h.

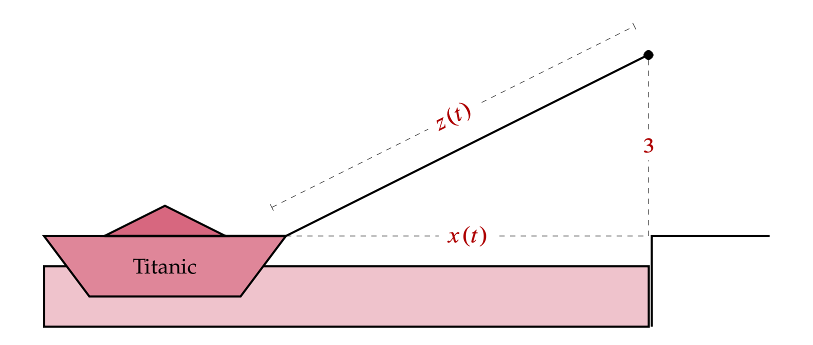
□

Ejemplo 7.1.4 *Un hombre está parado en un muelle y jala una lancha por medio de una cuerda. Sus manos están a 3 m por encima del amarre de la lancha. Cuando la lancha está a 4 m del muelle, el hombre está jalando la cuerda a una velocidad de 80 cm/s. ¿A qué velocidad se aproxima la lancha al muelle?*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez (velocidad) a la que está disminuyendo la distancia que hay entre la lancha y el muelle, cuando dicha distancia es de 4 m y la longitud de la cuerda está disminuyendo a razón de 0.8 m/s. Es decir, si consideramos que (en cierto instante t) la lancha se encuentra a una distancia $x(t)$ del muelle y que $z(t)$ es la longitud de la cuerda, entonces lo que se desea es calcular la velocidad con que cambia (razón de cambio) la distancia $x(t)$, cuando el valor de $x(t)$ es de 4 m y la razón de cambio de la longitud $z(t)$ de la cuerda es de -0.8 m/s. Esto es, se pide calcular la derivada $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 4$ y cuando $\frac{dz}{dt} = -0.8$. [El signo negativo en la

razón de cambio de la longitud $z(t)$ de la cuerda se debe a que dicha longitud está disminuyendo (decreciendo)].

Consideramos el triángulo rectángulo cuyos vértices están en el amarre de la lancha, la base del muelle y las manos del hombre. Este triángulo tiene catetos de longitudes $x(t)$ (distancia entre la lancha y el muelle) y 3 (altura entre la base del muelle y las manos) e hipotenusa de longitud $z(t)$ (longitud de la cuerda).



Por el teorema de Pitágoras se cumple que

$$z^2(t) = x^2(t) + 3^2 = x^2(t) + 9\,,$$

donde $x(t)$ & $z(t)$ dependen del tiempo t.
Derivando implícitamente con respecto a t se obtiene

$$2z(t)\left(\frac{dz}{dt}\right) = 2x(t)\left(\frac{dx}{dt}\right)\,,$$

de donde, para cualquier instante t, mientras $x > 0$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{z(t)}{x(t)}\left(\frac{dz}{dt}\right)\,.$$

En el instante t_0 en que $x(t_0) = 4$ m, se tiene que

$$z(t_0)^2 = x(t_0)^2 + 3^3 = 4^2 + 9 = 25 \;\Rightarrow\; z(t_0) = 5\,\text{m}\,.$$

Y debido a que $\dfrac{dz}{dt} = -0.8$ m/s, obtenemos que, en ese instante t_0:

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{z(t_0)}{x(t_0)}\right]\frac{dz}{dt} = \left(\frac{5}{4}\right)(-0.8) = -1 \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = -1\,\text{m/s}\,.$$

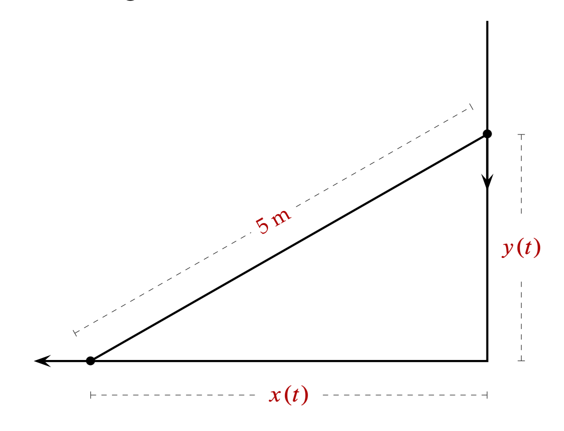
El signo negativo del resultado indica que la distancia x de la lancha al muelle disminuye o decrece a razón de 1 m/s.

□

Ejemplo 7.1.5 *Una escalera de 5 m de longitud descansa contra un muro perpendicular al suelo. Si el extremo inferior de la escalera se está resbalando a razón de 1.2 m/s, ¿a qué velocidad desciende el extremo superior cuando éste está a 3 m del suelo?*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la velocidad a la que está disminuyendo la distancia que hay entre el extremo superior de la escalera y el piso, en el instante en que dicha distancia es de 3 m y la distancia que hay entre la pared y el extremo inferior de la escalera está aumentando a razón de 1.2 m/s. Es decir, si consideramos que (en cierto instante t) el extremo superior de la escalera se encuentra a una distancia $y(t)$ del piso y que $x(t)$ es la distancia que hay entre la pared y el extremo inferior de la escalera, entonces lo que se desea es calcular la velocidad con que cambia (razón de cambio) la distancia $y(t)$, cuando la velocidad de cambio de la distancia $x(t)$ es de 1.2 m/s. Esto es, se pide calcular la derivada $\frac{dy}{dt}$ cuando $\frac{dx}{dt} = 1.2$ m/s, en el preciso instante en que $y(t) = 3$. [El signo positivo en la razón de cambio de la distancia $x(t)$ se debe a que dicha longitud está aumentando].

Consideramos el triángulo rectángulo que tiene catetos de longitudes $y(t)$ (distancia entre el extremo superior de la escalera y el piso); $x(t)$ (distancia entre el extremo inferior de la escalera y la pared) e hipotenusa de longitud $z = 5$ (longitud de la escalera).



Por el teorema de Pitágoras se cumple que

$$y^2(t) + x^2(t) = 5^2 = 25\,,$$

[donde $y(t)$ & $x(t)$ dependen del tiempo t].

Derivando implícitamente con respecto a t se obtiene

$$2y(t)\left(\frac{dy}{dt}\right) + 2x(t)\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0\,,$$

de donde, para cualquier instante t, mientras $y(t) > 0$ se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x(t)}{y(t)}\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

En el instante t_0 en que $y(t_0) = 3$ m:

$$3^2 + x^2(t_0) = 25 \;\Rightarrow\; x(t_0) = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4\,\text{m}.$$

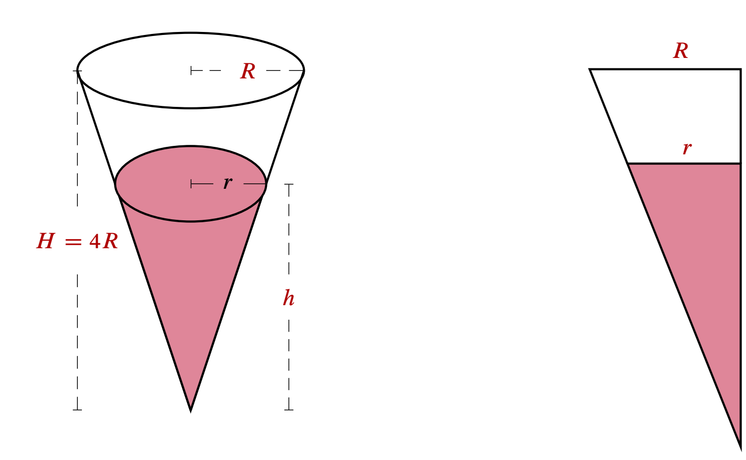
Y debido a que $\frac{dx}{dt} = 1.2$ m/s, obtenemos que, en ese instante t_0:

$$\frac{dy}{dt} = \left[-\frac{x(t_0)}{y(t_0)}\right]\frac{dx}{dt} = \left(-\frac{4}{3}\right)1.2 = -1.6 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt} = -1.6\,\text{m/s}\,.$$

El signo negativo del resultado indica que la distancia $y(t)$ del extremo superior de la escalera al piso disminuye o decrece a razón de 1.6 m/s. □

Ejemplo 7.1.6 *Un recipiente tiene la forma de un cono circular recto invertido y la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro. Al recipiente le está entrando agua a una rapidez constante, por lo que la profundidad del agua va en aumento. Cuando la profundidad es de 1 m, la superficie sube a razón de 1 cm por minuto. ¿A qué rapidez le está entrando agua al recipiente?*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez a la que está aumentando el volumen del cono limitado por la superficie del agua, cuando la altura del mismo cono es de 1 m y aumenta a razón de 1 cm/min. Es decir si consideramos el cono circular recto formado por el agua que tiene un radio r, una altura h y un volumen V, entonces lo que se desea es calcular la velocidad con que cambia (razón de cambio) el volumen V, cuando la razón de cambio de la altura h es de 1 cm/min y $h = 1$ m. Esto es, se pide calcular a la derivada $\dfrac{dV}{dt}$ cuando $\dfrac{dh}{dt} = 1$ cm/min y cuando $h = 100$ cm.



El volumen V de un cono circular recto de radio r y de altura h es

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h\,.$$

Como la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro, por la semejanza de los triángulos mostrados se cumple que:

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{H} \;\Rightarrow\; \frac{r}{h} = \frac{R}{4R} \;\Rightarrow\; r = \frac{h}{4},$$

y el volumen es

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi}{48} h^3\,.$$

Ya que tanto la altura como el volumen son funciones del tiempo t, derivamos respecto a t y obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{48} 3h^2 \left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\pi}{16} h^2 \left(\frac{dh}{dt}\right)\,.$$

En el instante en que $h = 100\,\text{cm} = 10\,\text{dm}$ y $\dfrac{dh}{dt} = 1\,\text{cm/min} = 0.1\,\text{dm/min}$:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{16} h^2 \left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\pi}{16}(10\,\text{dm})^2(0.1\,\text{dm/min}) = \frac{10\pi}{16}\,\text{dm}^3/\text{min} = \frac{5\pi}{8}\,dm^3/\text{min}.$$

Por lo tanto, la rapidez con que entra el agua al recipiente es

$$\frac{dV}{dt} = \frac{5\pi}{8}\ell/\text{m} \approx 1.963\ell/\text{min}$$

pues $1\ell = 1\ \text{dm}^3$.

□

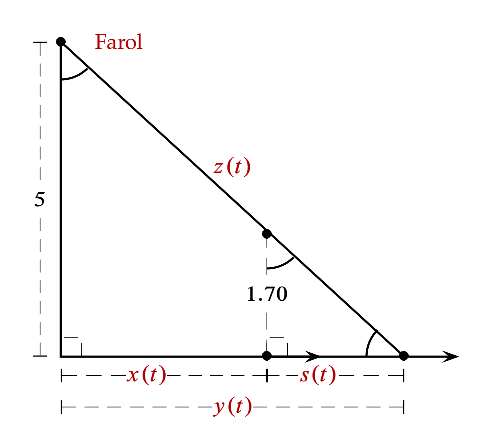
Ejemplo 7.1.7 *Un poste de 5 m de altura tiene un farol en la parte superior; un hombre de 1.70 m de estatura se aleja del poste caminando a una velocidad de 1.2 m/s. Cuando la distancia de la base del poste a la punta (parte más alejada) de la sombra del hombre es de 6 m, ¿con qué velocidad crece su sombra?; ¿con qué velocidad se mueve la punta de la sombra con respecto al farol?*

▼

- ¿Qué se pide en la primera pregunta?

  Se pide calcular la velocidad a la que está creciendo la sombra proyectada por el hombre, a medida que éste se aleja del poste. Es decir, se desea conocer la velocidad a la que crece la longitud $s(t)$ de la sombra, cuando se conoce la velocidad a la que aumenta la distancia $x(t)$ del hombre a la base del poste, así como la distancia $x(t) + s(t)$ desde la base del poste hasta la punta de la sombra. Esto es, se quiere conocer la razón de cambio $\frac{ds}{dt}$ a sabiendas de que $\frac{dx}{dt} = 1.2\ \text{m/s}$ y de que $x(t) + s(t) = 6\ \text{m}$.

  Es importante notar que, a partir de los pies del hombre, se miden dos longitudes en el piso: su distancia $x(t)$ a la base del poste y la longitud $s(t)$ de su sombra.



  Construimos dos triángulos rectángulos semejantes (uno dentro del otro) con un vértice común ubicado en la punta más alejada de la sombra. El triángulo grande con vértices en la base del poste y en farol; el triángulo pequeño con vértices en los pies y en la cabeza del hombre. El triángulo grande tiene un cateto de longitud 5 m y el otro de longitud $y(t) = x(t) + s(t)$; el triángulo pequeño tiene un cateto de longitud 1.70 m y el otro de longitud $s(t)$.

  Por la semejanza de los triángulos rectángulos ocurre que $\frac{s(t)}{1.70} = \frac{y(t)}{5}$; por lo cual

$$5\,s(t) = 1.7\,y(t) \;\Rightarrow\; 5\,s(t) = 1.7[x(t) + s(t)] \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 5\,s(t) - 1.7\,s(t) = 1.7\,x(t) \;\Rightarrow\; 3.3\,s(t) = 1.7\,x(t) \;\Rightarrow\; s(t) = 0.\overline{51}x(t)\,.$$

Derivando con respecto a t se obtiene

$$\frac{ds}{dt} = 0.\overline{51}\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Considerando que $\dfrac{dx}{dt} = 1.2$ m/s, se tiene que $\dfrac{ds}{dt} = (0.\overline{51})(1.2\,\text{m/s}) = 0.6\overline{18}\,\text{m/s}$.

Luego, en cualquier instante, la sombra crece a razón (constante) de 0.618 m/s, no importando la distancia a la que se encuentre el hombre del poste. En particular, $\dfrac{ds}{dt} = (0.\overline{51})(1.2\,\text{m/s}) = 0.6\overline{18}\,\text{m/s}$ en el instante t_0 en que $y(t_0) = 6$ m.

- ¿Qué se pide en la segunda pregunta?

Se pide calcular la velocidad a la que está creciendo la distancia que hay entre la luz y la punta de la sombra. Es decir, se desea conocer la velocidad a la que crece la longitud $z(t)$ de la hipotenusa del triángulo grande, cuando se conocen la velocidad a la que aumenta la distancia $x(t)$ del hombre al poste, la velocidad a la que aumenta la longitud $s(t)$ de la sombra proyectada por el hombre, así como la distancia $y(t) = x(t) + s(t)$ desde la base del poste hasta la punta de la sombra.

Esto es, se quiere conocer la razón de cambio $\dfrac{dz}{dt}$ a sabiendas de que

$\dfrac{dx}{dt} = 1.2$ m/s, que $\dfrac{ds}{dt} = 0.6\overline{18}$ m/s y que $y = 6$ m.

Por el teorema de Pitágoras:

$$z(t)^2 = y(t)^2 + 5^2 \;\Rightarrow\; z(t) = \sqrt{y(t)^2 + 25} = [y(t)^2 + 25]^{1/2}.$$

Derivando respecto a t

$$\frac{dz}{dt} = \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)^2+25}}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)^2+25}}\frac{d}{dt}[x(t)+s(t)] \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dt} = \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)^2+25}}\left(\frac{dx}{dt}+\frac{ds}{dt}\right).$$

Sustituyendo los valores particulares $y = 6$ m, $\dfrac{dx}{dt} = 1.2$ m/s y $\dfrac{ds}{dt} = 0.6\overline{18}$ m/s,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{6}{\sqrt{6^2+25}}\left(1.2 + 0.6\overline{18}\right) = \frac{6(1.\overline{81})}{\sqrt{61}} \approx 1.3968 \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{dt} \approx 1.4\,\text{m/s}.$$

□

Ejemplo 7.1.8 *La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta T en grados (kelvin) y la presión P (en atmósferas) con un volumen V (en litros), es $PV = nRT$, donde n es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante de los gases. Suponga que en cierto instante $P = 8$ atm y que aumenta a razón de 0.10 atm/min, además $V = 10\,\ell$ y disminuye a razón de 0.15 ℓ/min. Determinar la razón de cambio de T con respecto al tiempo, en ese preciso instante, si $n = 10$ mol.*

▼ ¿Qué se desea en el problema? Se desea determinar la razón de cambio de la temperatura T con respecto al tiempo t. Esto es, se quiere calcular la rapidez de cambio de la temperatura en el preciso instante en que la presión es de 8 atm, y aumenta a razón de 0.10 atm/min y además el volumen es de 10 ℓ y disminuye a razón de 0.15 ℓ/min. Más concretamente, se quiere calcular la velocidad de cambio de la temperatura $\dfrac{dT}{dt}$ en el preciso instante en que $P = 8$ atm, $\dfrac{dP}{dt} = 0.10$ atm/min, $V = 10\,\ell$ y $\dfrac{dV}{dt} = -0.15\,\ell$/min.

Ya que $PV = nRT$, $R = 0.0821$ y que $n = 10$ mol, entonces en cualquier instante t tenemos

$$PV = 10(0.0821)T = 0.821\,T\,,$$

donde P, V y T son funciones del tiempo t.

Derivando con respecto a t en $PV = 0.821\,T$:

$$\frac{d}{dt}(PV) = 0.821\left(\frac{dT}{dt}\right) \Rightarrow P\left(\frac{dV}{dt}\right) + V\left(\frac{dP}{dt}\right) = 0.821\left(\frac{dT}{dt}\right).$$

Despejando $\dfrac{dT}{dt}$ y sustituyendo valores obtenemos:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{0.821}\left[P\left(\frac{dV}{dt}\right) + V\left(\frac{dP}{dt}\right)\right] = \frac{1}{0.821}\big[(8)\,(-0.15)\, +\, (10)\,(0.10)\big] = \frac{-0.2}{0.821} \approx -0.24.$$

Por lo tanto, la velocidad de cambio de la temperatura es $\dfrac{dT}{dt} = -0.24$ grados kelvin/min. Esto es, la temperatura disminuye 0.24 grados kelvin cada minuto.

□

Ejercicios 7.1.1 *Soluciones en la página 14*

1. Suponga que un incendio forestal se propaga en la forma de un círculo cuyo radio cambia a razón de 1.8 m/min. ¿A qué razón está creciendo el área de la región incendiada cuando el radio alcanza 60 m?

2. Sea ℓ la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes x & y respectivamente. Si x aumenta con una rapidez de $\dfrac{1}{2}$ m/s y si y disminuye con una rapidez de $\dfrac{1}{4}$ m/s:

   a. ¿A qué razón está cambiando la longitud de la diagonal cuando $x = 3$ m & $y = 4$ m?

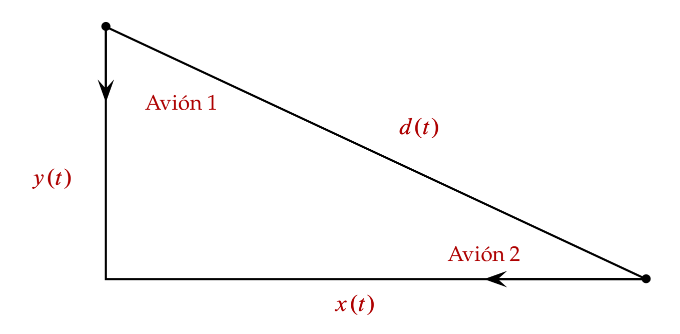
   b. ¿La diagonal está aumentando o disminuyendo en ese instante?

3. Un anuncio publicitario tiene forma de un cilindro circular recto. Determinar la variación de su volumen en el proceso de inflado, sabiendo que la altura permanece constante.

4. Dos automóviles empiezan a moverse a partir del mismo punto con velocidad constante. Uno viaja hacia el sur a 60 km/h y el otro hacia al oeste a 25 km/h ¿Con qué razón aumenta la distancia entre los dos automóviles 2 h más tarde?

5. Dos trenes parten de una estación con 3 h de diferencia. El que parte primero se dirige hacia el norte con una rapidez de 100 km/h. El otro tren se dirige hacia el este con una rapidez de 60 km/h. ¿A qué razón está cambiando la distancia entre los trenes 2 h después que partió el segundo tren?

6. Un controlador aéreo sitúa 2 aviones a la misma altitud, convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto de encuentro (ver figura). Uno de ellos (avión 1) está a 150 millas de ese punto y vuela a 450 millas por hora. El otro (avión 2) está a 200 millas del punto y vuela a 600 millas por hora.



   a. ¿A qué velocidad decrece la distancia entre los aviones?
   b. ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias diferentes?

7. Cuando un tanque esférico de radio a contiene líquido con una profundidad h, el volumen de este líquido está dado por
$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h).$$
Suponga ahora que un tanque esférico de 5 m de radio se está llenando de agua a razón de $\frac{20}{3}$ ℓ/s. Calcule la razón de cambio del nivel de agua cuando $h = 1.25$ m ($1\,\ell = 1\,\text{dm}^3$).

8. Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 1 milla a una velocidad de 500 millas/h y pasa sobre una estación de radar. Encuentre la razón a la que aumenta la distancia del avión a la estación cuando el avión está a 2 millas de la estación.

9. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h.

   ¿Con qué rapidez crece el área cuando cada lado mide 8 cm?

10. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h. ¿Cuál es la razón de crecimiento del área en el instante en que el valor de ésta es $\sqrt{75}$ cm^2?

11. La ley adiabática (sin pérdida ni ganancia de calor) para la expansión de un gas es
$$PV^{1.4} = C,$$
(donde P es la presión, V el volumen y C una constante). En cierto instante, el volumen es de 1 pie^3, la presión es de 40 libras/pie^2 y ésta está creciendo a razón de 8 libras/pie^2 en cada segundo. Calcular la razón de variación del volumen en dicho instante.

12. Cuando se expande aire a temperatura constante, su presión y su volumen, satisfacen

$$PV^{1.4} = C\ ,$$

donde C es una constante. Si en un momento determinado el volumen es de 400 cm^3 y la presión es de 80 KPa, disminuyendo ésta a razón de 10 KPa/min, ¿con qué razón aumenta el volumen en ese instante?

13. Una lámpara se encuentra suspendida a 15 pies sobre una calle horizontal y recta. Si un hombre de 6 pies de estatura camina alejándose de la lámpara en línea recta con una velocidad de 5 pies/s, ¿con qué rapidez se alarga su sombra?

14. Una lámpara proyectora situada sobre el piso ilumina una pared que está a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de alto camina desde la lámpara hacia la pared a una velocidad de 1.6 m/s ¿con qué rapidez decrece su sombra proyectada sobre la pared cuando se encuentra a 4 m de ésta?

15. El radio de una esfera se incrementa a razón de 2 cm/s.
    a. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen cuando el radio mide $r = 5$ cm?
    b. ¿Cuál es la medida del radio cuando la razón de cambio del volumen es 512 cm^3/s?

16. Se infla un globo esférico introduciendo aire a razón de 50 cm^3/s. Calcular la velocidad de cambio del radio del globo cuando su diámetro es de 26 cm.

17. Un derrame de petróleo adopta una forma circular y tiene un espesor de $\dfrac{1}{50}$ pie. Si el petróleo se está escapando a razón de 40 $pies^3$/min, ¿a qué razón está aumentando el radio de la mancha de petróleo cuando el radio es de 50 pies?

18. Un cohete es lanzado en dirección vertical y rastreado por una estación de radar situada en el suelo a 4 millas de la rampa de lanzamiento. ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando está a 5 millas de la estación de radar y su distancia aumenta a razón de 3 600 milla/h?

Ejercicios 7.1.1 *Razones de cambio relacionadas, página 11*

1. $\approx 679\dfrac{\text{m}^2}{\text{min}}$.
2. a. $\dfrac{1}{10}$ m/s;
   b. crece en ese momento.
3. $2\pi r(t)h\dfrac{dr(t)}{dt}$.
4. 65 km/h.
5. $\approx$ 111.2411 km/h.
6. a. -750 millas/h;
   b. $\dfrac{1}{3}$ hora.
7. $\approx$ 0.00194017 dm/s.
8. $\approx$ 433 millas/h.
9. $\approx$ 13.856406 cm^2/h.
10. $2\sqrt{15}$ cm/h.
11. $-\dfrac{1}{7}\dfrac{\text{pies}^3}{s}$.
12. 35.7 cm^3/min.
13. $\dfrac{10}{3}$ pie/s .
14. $-\dfrac{3}{5}$ m/s.
15. a. 200π cm^3/s;
    b. $\dfrac{8}{\sqrt{\pi}}$ cm.
16. $\approx$ 0.0235 cm/s.
17. $\dfrac{20}{\pi}$ pies/min.
18. 6 000 millas/h.

CAPÍTULO

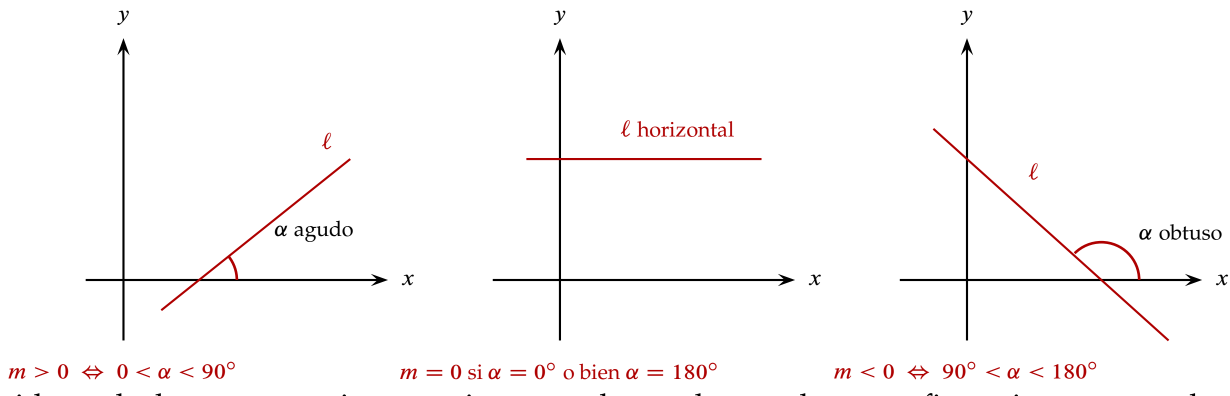
8

Aplicaciones de la derivada

[1]

8.1 Derivabilidad y monotonía

Como se sabe, si f es una función derivable en x_0, entonces la derivada de f en x_0 es un número real fijo $f'(x_0)$, el cual puede ser $f'(x_0) > 0$ o bien $f'(x_0) < 0$, o bien $f'(x_0) = 0$.
Sabemos también que si f es una función derivable en x_0, entonces existe una única recta tangente t a la curva $y = f(x)$ en el punto $P[x_0, f(x_0)]$, la cual tiene pendiente $m_t = f'(x_0)$.
Recordemos ahora que, si l es una recta con ángulo de inclinación α y pendiente m, entonces $m = \tan\alpha$, lo cual se presenta en las siguientes gráficas:



Considerando los comentarios anteriores, podemos hacer algunas afirmaciones que relacionan el signo de la derivada $f'(x_0)$ con el ángulo de inclinación α_t de la recta tangente t y con el comportamiento de las imágenes $f(x)$ alrededor del punto de tangencia $P[x_0, f(x_0)]$.

- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow m_t > 0 \Rightarrow 0^\circ < \alpha_t < 90^\circ$ (α_t es agudo.)

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Además si $f'(x_0) > 0$, entonces

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

por lo cual

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0 \;\&\; \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0\,.$$

Ahora bien,

1. Si $\lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, entonces existe $x_1 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_0$ tal que para cada $x \in [x_1, x_0)$ ocurre que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$;
   pero $x_1 \leq x < x_0 \;\Rightarrow\; x < x_0 \;\Rightarrow\; x - x_0 < 0$, por lo que
   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) - f(x_0) < 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) < f(x_0)\,.$$
   Con lo cual, para x suficientemente cerca de x_0
   $$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \;\Rightarrow\; x < x_0 \;\&\; f(x) < f(x_0)\,.$$

2. Si $\lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, entonces existe $x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_0 < x_2$ tal que para cada $x \in (x_0, x_2]$ ocurre que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$;
   pero $x_0 < x \leq x_2 \;\Rightarrow\; x > x_0 \;\Rightarrow\; x - x_0 > 0$, por lo que
   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) - f(x_0) > 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) > f(x_0)\,.$$
   Entonces, para x suficientemente cerca de x_0
   $$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \;\Rightarrow\; x > x_0 \;\&\; f(x) > f(x_0)\,.$$

Resumiendo, si $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0$, entonces existen x_1 & x_2 con $x_1 < x_0 < x_2$ tales que $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

- Así también $f'(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; m_t < 0 \;\Rightarrow\; 90^\circ < \alpha_t < 180^\circ$ (α_t es obtuso.)

Si $f'(x_0) < 0$, entonces

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0\,,$$

por lo que

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) < 0 \;\&\; \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) < 0\,.$$

Ahora bien,

1. Si $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$, entonces existe $x_1 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_0$ tal que para cada $x \in [x_1, x_0)$ ocurre que $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$,
   pero $x_1 \leq x < x_0 \;\Rightarrow\; x < x_0 \;\Rightarrow\; x - x_0 < 0$, por lo que
   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) - f(x_0) > 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) > f(x_0)\,.$$
   Obtenemos que, para x suficientemente cerca de x_0
   $$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \;\Rightarrow\; x < x_0 \;\&\; f(x) > f(x_0)\,.$$

2. Si $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$, entonces existe $x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_0 < x_2$, tal que para cada $x \in (x_0, x_2]$ ocurre que $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$,
   pero $x_0 < x \leq x_2 \;\Rightarrow\; x > x_0 \;\Rightarrow\; x - x_0 > 0$, por lo que
   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) - f(x_0) < 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) < f(x_0)\,.$$
   Entonces, para x suficientemente cerca de x_0
   $$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \;\Rightarrow\; x > x_0 \;\&\; f(x) < f(x_0)\,.$$

Resumiendo, si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) < 0$, entonces existen x_1 & x_2 con $x_1 < x_0 < x_2$ tales que $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$.

De lo anterior se puede afirmar lo siguiente:

Teorema. Sea una función derivable en el número x_0. Si $f'(x_0) \neq 0$, entonces existen números x_1 & x_2 alrededor de x_0 y suficientemente cerca de x_0 tales que:

- Si $f'(x_0) > 0$, entonces $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

- Si $f'(x_0) < 0$, entonces $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$.

Utilizamos este resultado para demostrar el siguiente teorema:

Teorema de Rolle. Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el abierto (a,b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

▼ Si $f(x) = f(a) = f(b)$ para cada $x \in [a,b]$, entonces f es una función constante en todo $[a,b]$, por lo cual $f'(x) = 0$ para cada $x \in [a,b]$, en cuyo caso c es cualquier $x \in (a,b)$.

Si f no es una función constante en $[a,b]$, entonces por ser continua f alcanza en $[a,b]$ sus valores mínimo $m = f(c)$ y máximo $M = f(d)$, donde al menos uno de ellos es diferente de $f(a) = f(b)$.

Aquí se entiende que $f(c) = m \le f(x) \le M = f(d)$ para $x \in [a,b]$.

Suponiendo que el mínimo $m = f(c)$ es dicho número, entonces $c \in (a,b)$. Por ser f derivable en (a,b), se puede asegurar la existencia del número $f'(c)$.

Demostraremos que $f'(c) = 0$ por reducción al absurdo:

Si $f'(c) \neq 0$, se podría asegurar por el teorema anterior la existencia de números x_1 & x_2 cerca de c tales que:

- Si $f'(c) > 0$, entonces $f(x_1) < f(c) < f(x_2)$.

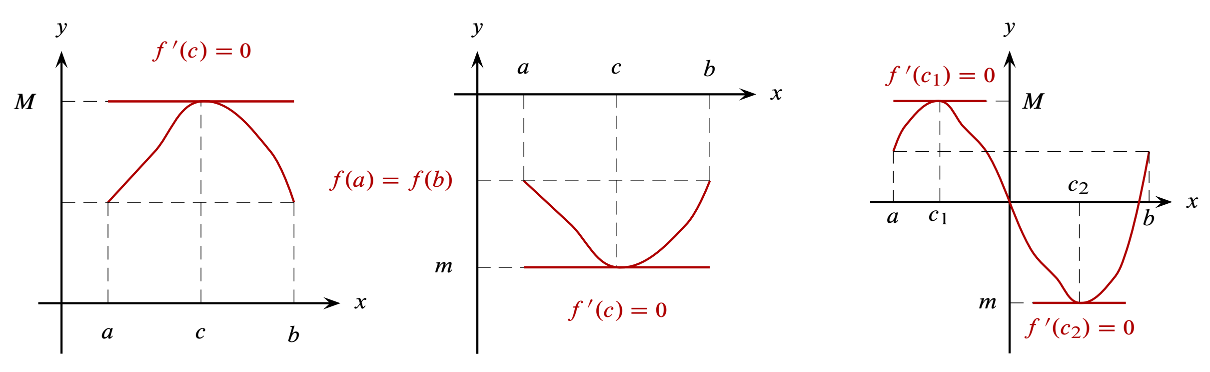
- Si $f'(c) < 0$, entonces $f(x_1) > f(c) > f(x_2)$.

Por lo cual $f(c) = m$ no sería el mínimo de f en $[a,b]$.

Entonces $f'(c) \neq 0$ no puede ser.
Lo que asegura la existencia de al menos un número $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

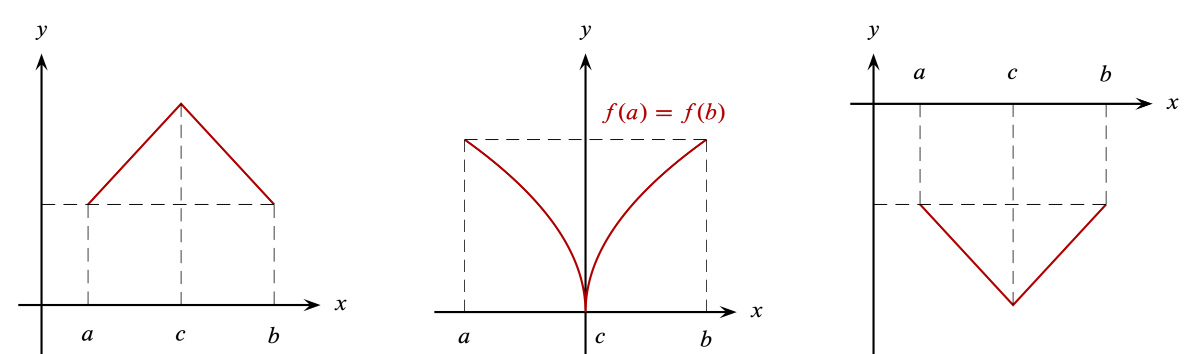
□

Geométricamente, el teorema de Rolle puede ser ilustrado de la manera siguiente:



Por lo tanto el teorema de Rolle asegura la existencia de al menos un punto $P[c, f(c)]$ en la curva $y = f(x)$ donde la recta tangente es horizontal [$f'(c) = 0$].
Es importante resaltar que la derivabilidad de la función f en todo el intervalo (a,b) es determinante para la existencia de dicha recta tangente horizontal.

Basta con que f no sea derivable en algún punto del intervalo (a, b) para que pueda ocurrir una situación como las siguientes, en donde no se cumple el teorema de Rolle.

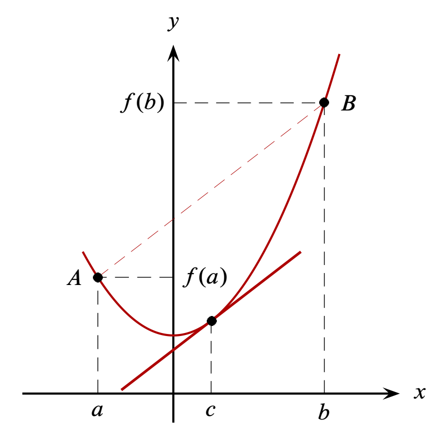


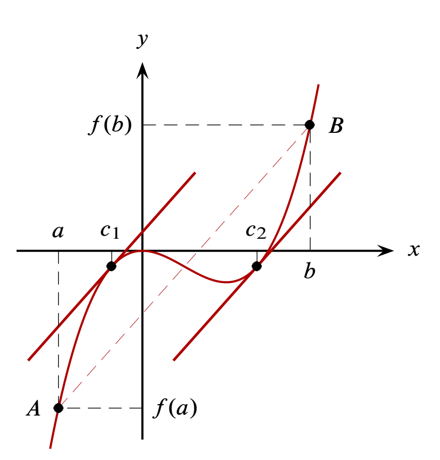
Un resultado más general que el teorema de Rolle está dado en el siguiente teorema:

Teorema del Valor Medio. Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ o bien } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)\,.$$

Geométricamente este teorema asegura la existencia de al menos un punto $P[c, f(c)]$ de la curva $y = f(x)$, donde su recta tangente tiene pendiente $f'(c)$ igual a la pendiente $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ de la recta secante a la curva que pasa por los puntos $A[a, f(a)]$ y $B[b, f(b)]$.





▼ La ecuación de la recta secante $y = g(x)$ que pasa por los puntos $A[a, f(a)]$ y $B[b, f(b)]$ es

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

o sea,

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

por lo que

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Sea ϕ la función definida como la diferencia $f - g$. Es decir,

$$\phi(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Por ser f & g funciones continuas, también la función ϕ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Por ser f & g funciones derivables, también la función ϕ es derivable en el intervalo abierto (a, b):

$$\phi'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Por otra parte $\phi(a) = \phi(b)$, ya que

$$\phi(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0\,;$$
$$\phi(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0\,.$$

Hallamos que ϕ es una función que cumple con las condiciones del teorema de Rolle. Por lo tanto se asegura la existencia de al menos un número c tal que $\phi'(c) = 0$. Pero:

$$\phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

por lo que:

$$\phi'(c) = 0 \;\Leftrightarrow\; f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \;\Leftrightarrow\; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Lo cual demuestra el teorema del Valor Medio.

□

Aplicamos a continuación este último teorema para el estudio de la monotonía de una función derivable en un intervalo.

- Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto (a, b), y sean x_1, x_2 en $[a, b]$ tales que $a \le x_1 < x_2 \le b$.

  ◊ Si $f'(x) > 0$ para cada $x \in (a, b)$, entonces (por el teorema del Valor Medio) para algún $c \in (x_1, x_2)$:

  $$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0\,.$$

  Pero $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$, por lo cual

  $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_2) - f(x_1) > 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_2) > f(x_1)\,.$$

  Entonces

  $$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)\,.$$

  Lo que implica que f es una función estrictamente creciente en el intervalo $[a, b]$.

◊ Si $f'(x) < 0$, para cada $x \in (a,b)$ entonces (por el teorema del Valor Medio) para algún $c \in (x_1, x_2)$:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0\,.$$

Pero $x_2 > x_1 \;\Rightarrow\; x_2 - x_1 > 0$, por lo cual

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_2) - f(x_1) < 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_2) < f(x_1)\,.$$

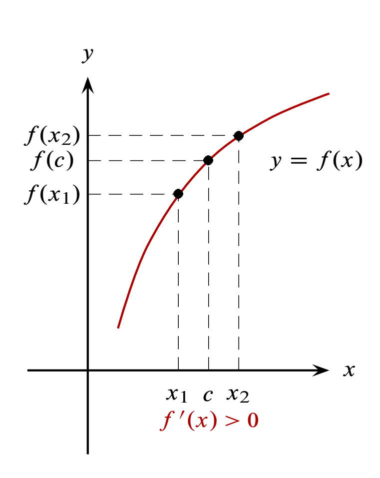
Entonces

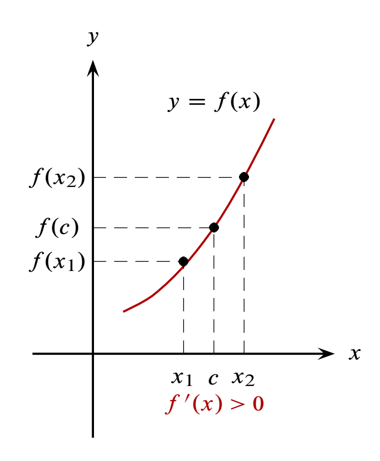
$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)\,.$$

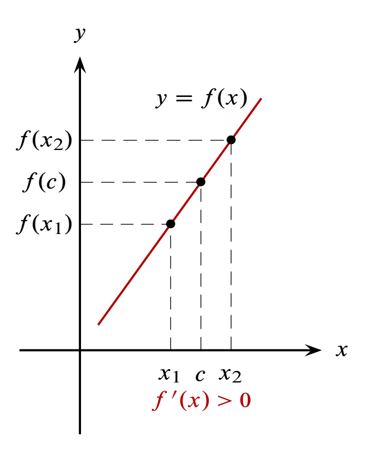
Lo que implica que f es una función estrictamente decreciente en el intervalo $[a,b]$.

Lo anterior, según el caso, puede ilustrarse como sigue:

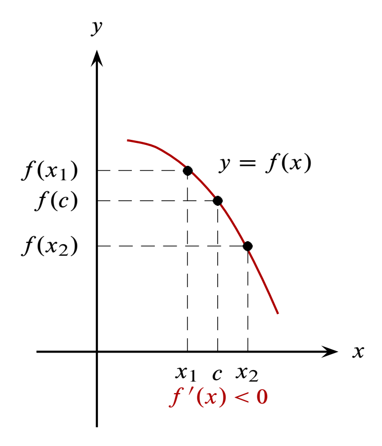
- Si $f'(x) > 0$, entonces la función f es estrictamente creciente.

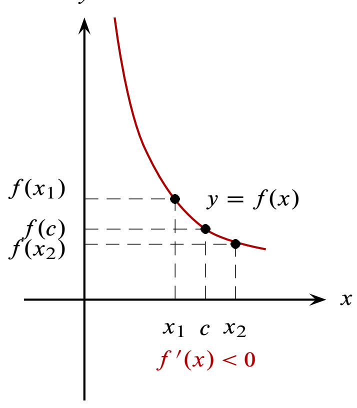


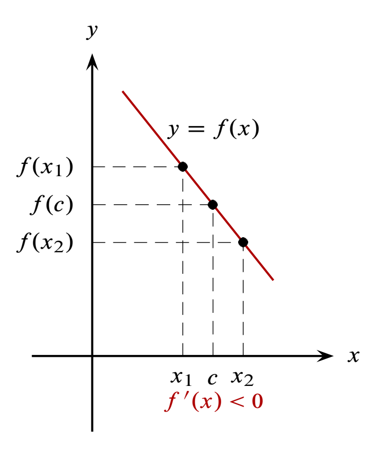




- Si $f'(x) < 0$, entonces la función f es estrictamente decreciente.







De aquí que:

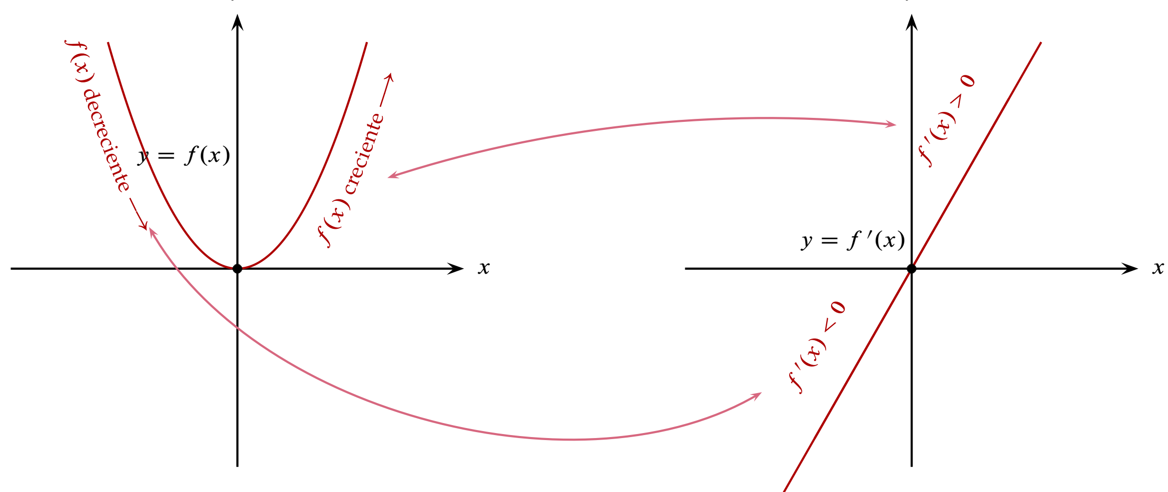
- Si f está definida en un intervalo y f' es continua con un número finito de raíces entonces f es monótona por partes.

Las funciones polinomiales y las racionales son monótonas por partes.

Ejemplo 8.1.1 *Sea la función* $f(x) = x^2$.

▼ Calculamos la derivada, $f'(x) = 2x$, entonces:

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$ es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

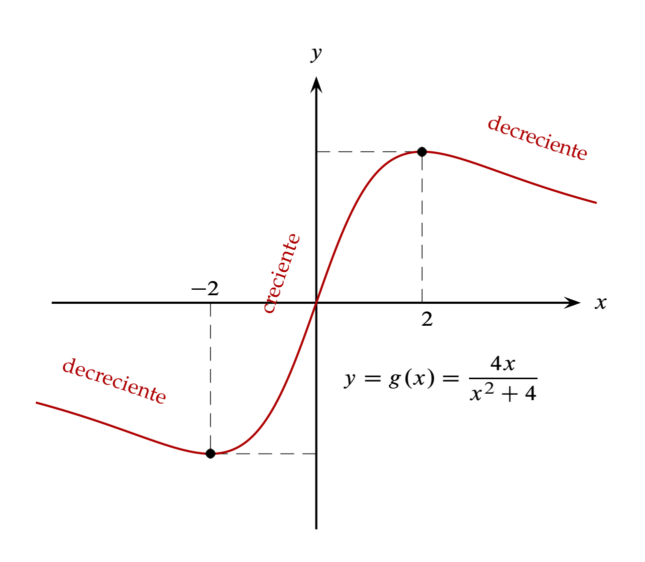


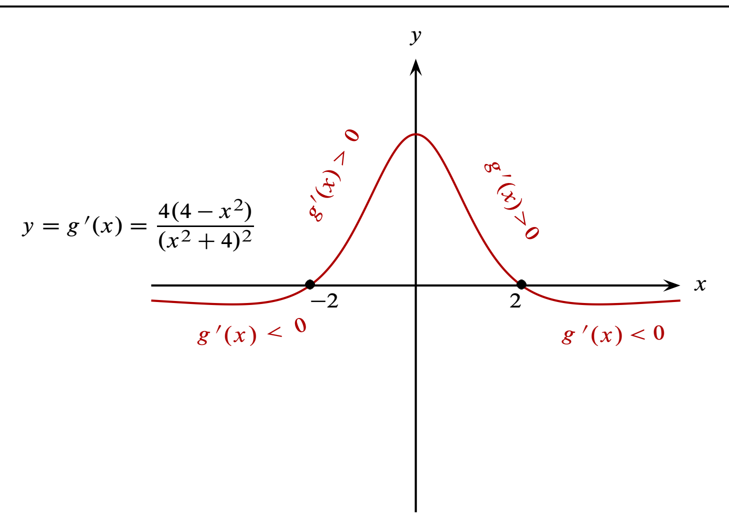
□

Ejemplo 8.1.2 *Dada la función* $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$.

▼ Tenemos que

$$g'(x) = \frac{(x^2+4)4 - 4x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{4x^2+16-8x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{16-4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2} .$$





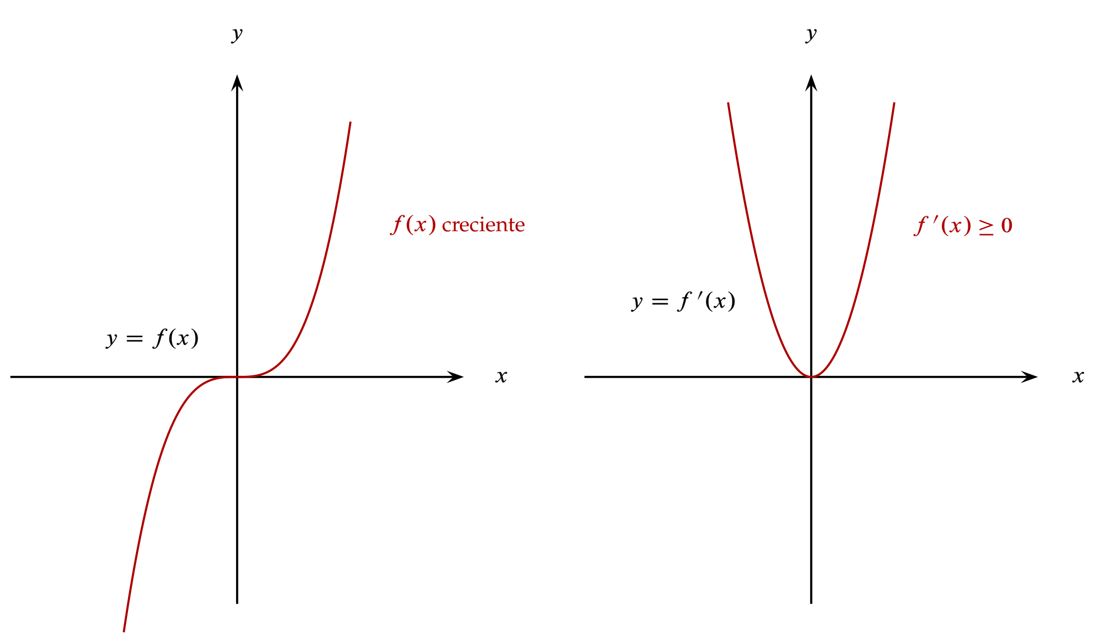
Puesto que $4 > 0$ y que $(x^2 + 4) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, se puede afirmar lo siguiente:

1. $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \Leftrightarrow g$ es creciente en el intervalo $(-2, 2)$.
2. $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x < -2$ o bien $x > 2 \Leftrightarrow g$ es decreciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$. Lo cual concuerda con que $g'(x)$ es par.

□

Ejemplo 8.1.3 *Sea $\phi(x) = x^3$.*

▼ Puesto que $\phi' = 3x^2 \Rightarrow \phi' > 0$ para cada $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces ϕ es una función creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$ pero de hecho como $x^3 < 0$ si $x < 0$, $x^3 = 0$ si $x = 0$ & $x^3 > 0$ si $x > 0$, entonces $f(x) = x^3$ es creciente en $\mathbb{R}$.



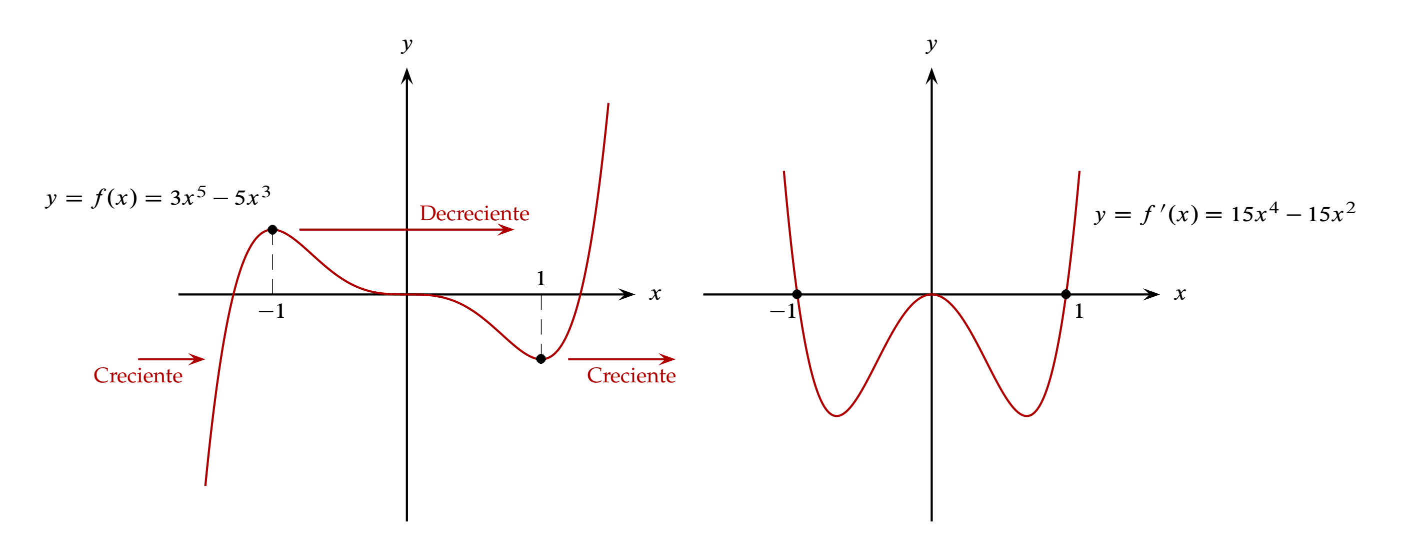
□

Ejemplo 8.1.4 *Sea la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.*

▼ Calculamos la derivada, $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$, entonces:

1. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \;\&\; x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \;\&\; x^2 > 1 \Leftrightarrow x \neq 0 \;\&\; |x| > 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \neq 0 \;\&\; x > 1$ o bien $x < -1 \Rightarrow f$ es creciente en $(-\infty, -1) \bigcup (1, \infty)$.

2. $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \;\&\; x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \;\&\; x^2 < 1 \Leftrightarrow x \neq 0 \;\&\; |x| < 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \neq 0 \;\&\; -1 < x < 1 \Rightarrow f$ es decreciente en $[-1, 1]$.



□

Ejercicios 8.1.1 *Soluciones en la página 11*

Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
2. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.
3. $h(x) = -2x^3 + 6x - 1$.
4. $f(x) = x^4 - 4x^3$.
5. $g(x) = (x^2 - 1)^2$.
6. $h(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$.
7. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.
8. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$.
9. $h(x) = \sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt[3]{x}$.
10. $f(x) = x^3 + \dfrac{48}{x}$.

Ejercicios 8.1.1 *Derivabilidad y monotonía, página 10*

1. a. f es creciente en $(2, +\infty)$;
   b. f es decreciente en $(-\infty, 2)$.
2. a. g es creciente en $(-\infty, 1)$ y en $(3, +\infty)$;
   b. g es decreciente en $(1, 3)$.
3. a. h es creciente en $(-1, 1)$;
   b. h es decreciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$.
4. a. f es creciente en $(3, +\infty)$;
   b. f es decreciente en $(-\infty, 3)$.
5. a. g es creciente en $(-1, 0)$ y en $(1, +\infty)$;
   b. g es decreciente en $(-\infty, -1)$ y en $(0, 1)$.
6. a. h es creciente en $(2, +\infty)$;
   b. h es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, 2)$.
7. a. f es creciente en $(-\infty - 2)$ y en $(-2, 0)$;
   b. f es decreciente en $(0, 2)$ y en $(2, +\infty)$.
8. a. g es creciente en $(-3, 0)$;
   b. g es decreciente en $(0, 3)$.
9. a. h es creciente en $(1, +\infty)$;
   b. h es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, 1)$.
10. a. f es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$;
    b. f es decreciente en $(-2, 0)$ y en $(0, 2)$.

CAPÍTULO

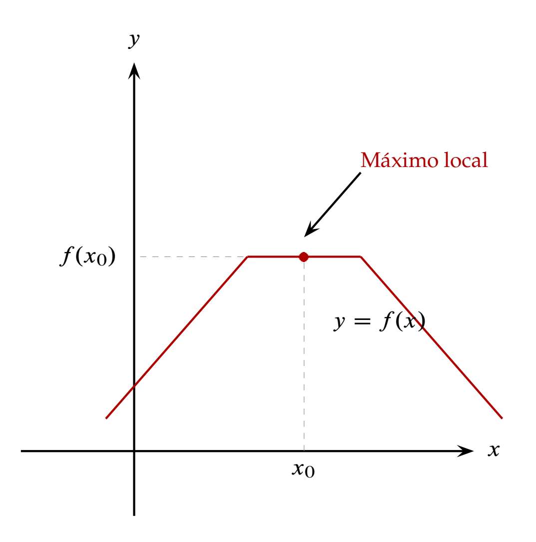
8

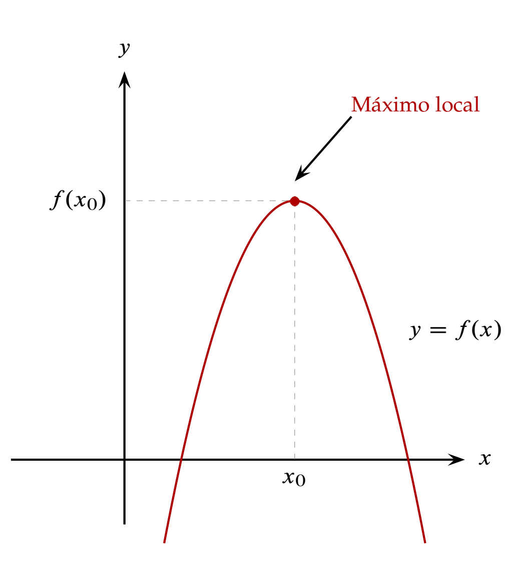
Aplicaciones de la derivada

[1]

8.2 Máximos y mínimos locales

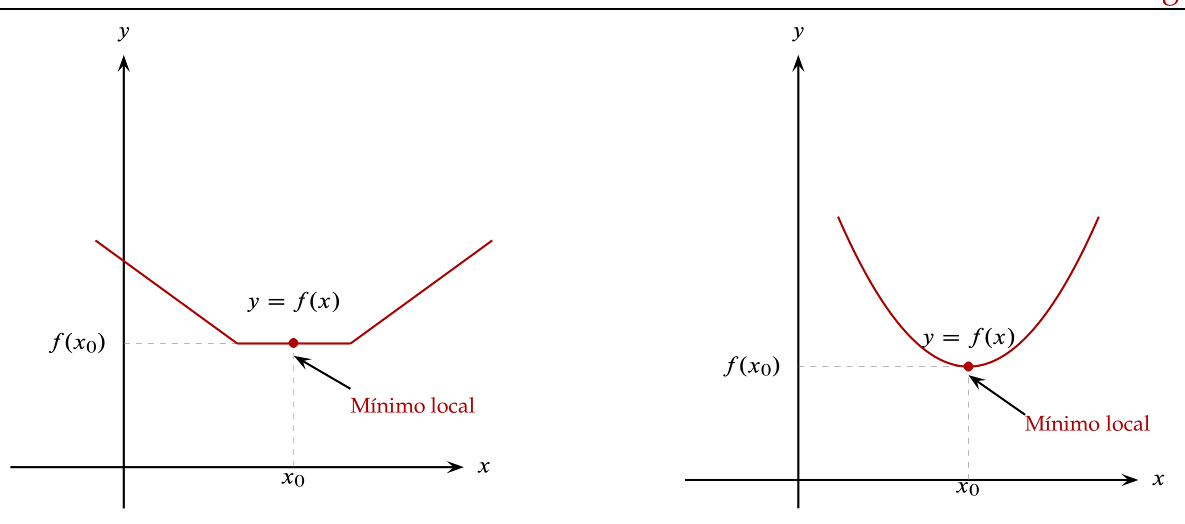
- Si $f(x_0) \geq f(x)$ para cada x cerca de x_0, es decir, en un intervalo abierto que contenga a x_0, diremos que f alcanza un máximo local o un máximo relativo en x_0.



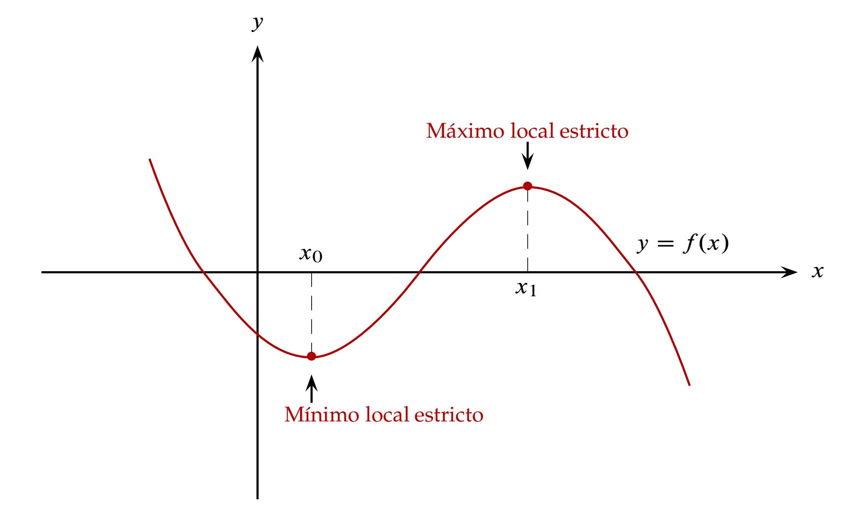


- Si $f(x_0) \leq f(x)$ para cada x cerca de x_0, es decir, en un intervalo abierto que contenga a x_0, diremos que f alcanza un mínimo local o un mínimo relativo en x_0.

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



- Si $f(x_0) > f(x)$ para cada x cerca de x_0, entonces el máximo local es estricto.
- Si $f(x_0) < f(x)$ para cada x cerca de x_0, entonces el mínimo local es estricto.
- A un máximo y a un mínimo local se les llaman valores extremos.



Si f es continua en un intervalo que contiene a x_0 y si f' cambia de signo en x_0, es decir, si en un intervalo de la forma (x_1, x_0) f' tiene un signo y en (x_0, x_2) el otro, entonces en x_0 hay un valor extremo, de hecho:

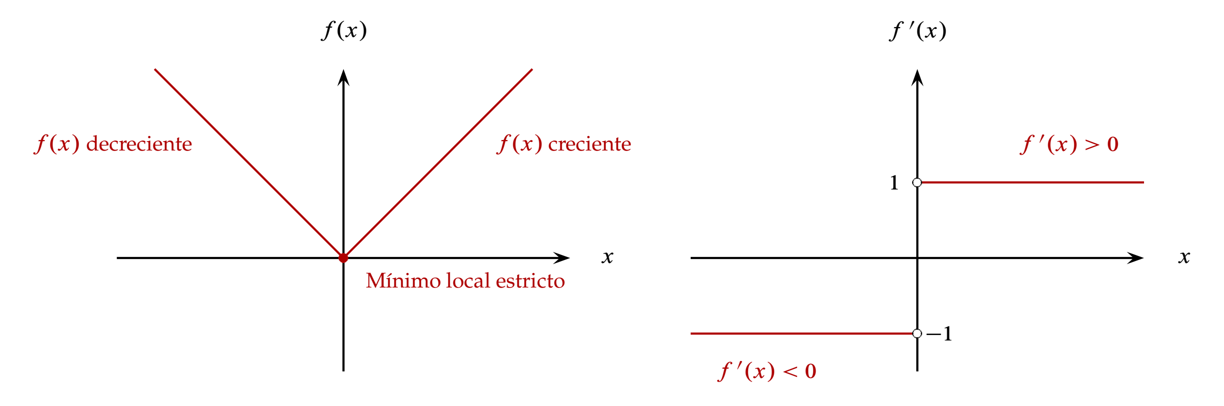
- Si f' pasa de positiva a negativa, hay un máximo local estricto. Es claro pues la función pasa de ser creciente a ser decreciente.
- Si f' pasa de negativa a positiva, hay un mínimo local estricto. Es claro pues la función pasa de ser decreciente a ser creciente.

Si no cambia de signo la derivada, entonces la función no tiene valor extremo.

Ejemplo 8.2.1 *La función* $f(x) = |\,x\,|$ *es continua en* $\mathbb{R}$, *pero no derivable en* $x = 0$.

▼ También

$$f(x) = |\,x\,| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f\,'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \text{ es un mínimo estricto.}$$



□

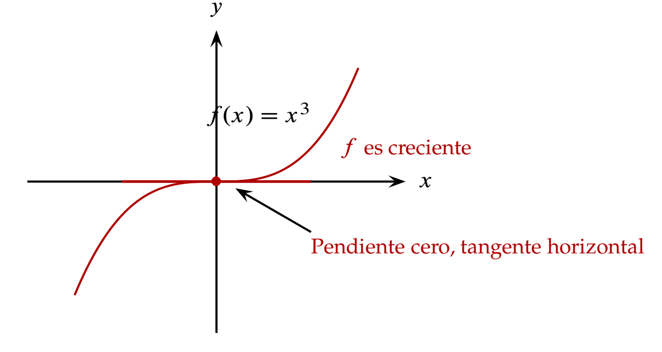
Por otro lado, es claro que (véase el teorema de Rolle):

- Si f tiene un valor extremo en x_0 y es derivable en x_0 entonces $f\,'(x_0) = 0$.

El recíproco no es verdadero; veamos un contraejemplo: una función f derivable en x_0 con $f\,'(x_0) = 0$, pero tal que f no tiene un valor extremo en x_0.

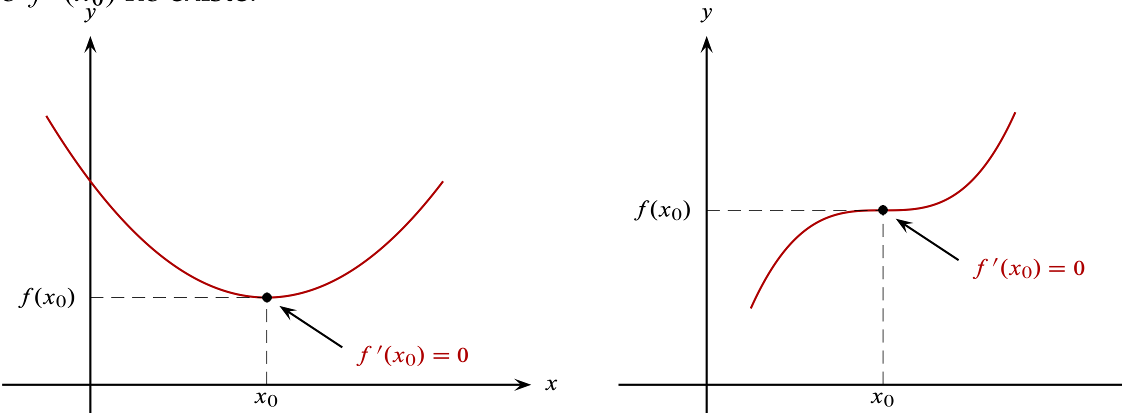
Ejemplo 8.2.2 *Sea* $f(x) = x^3$.

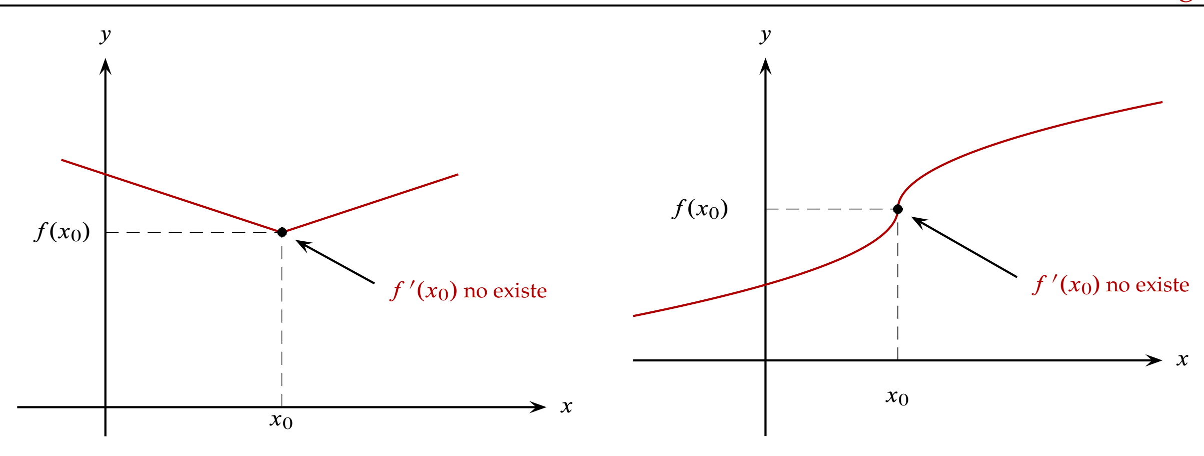
▼ La derivada de f es $f\,'(x) = 3x^2 \;\Rightarrow\; f\,'(0) = 0$; en 0 no hay valor extremo pues f es creciente. Entonces $x_1 < 0 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(0) = 0 < f(x_2)$; 0 no es ni máximo ni mínimo local.



□

- Punto crítico. Una función f tiene un punto crítico en $x_0 \in D_f$ cuando $f\,'(x_0) = 0$ o bien cuando $f\,'(x_0)$ no existe.





Geométricamente es claro que un punto crítico puede ser, o bien no puede ser, un máximo local o un mínimo local.

Para decidir si un punto crítico es un máximo o un mínimo local se cuenta con el siguiente criterio:

- Criterio de la primera derivada si f tiene en x_0 un punto crítico y además:

Para $x < x_0$	*y para* $x_0 < x$	*entonces,* f *tiene en* x_0 *un*
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	máximo local estricto
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	miníno local estricto

Ejemplo 8.2.3 *Obtener y clasificar los puntos críticos de la función* $g(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$.

▼ Por el ejemplo **??** anterior sabemos que $g'(x) = \dfrac{4(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2}$. Entonces

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2} = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2\,.$$

Esto implica que la función g tiene dos puntos críticos, uno en $x_1 = -2$ y otro en $x_2 = 2$.

Para clasificarlos, utilizamos la información que se tiene en el mismo ejemplo **??** sobre crecimiento y decrecimiento de g.

Para	f' *es*	f *es*	*entonces,* f *tiene*
$x < -2$	$-$	decreciente $\searrow$	
$x_1 = -2$	0		un mínimo local estrictro
$-2 < x < 2$	$+$	creciente $\nearrow$	
$x_2 = 2$	0		un máximo local estricto
$2 < x$	$-$	decreciente $\searrow$	

Esto es, la función $g(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$ tiene

1. un punto minímo local estricto en $x_1 = -2$, y
2. un punto máximo local estricto en $x_2 = 2$.

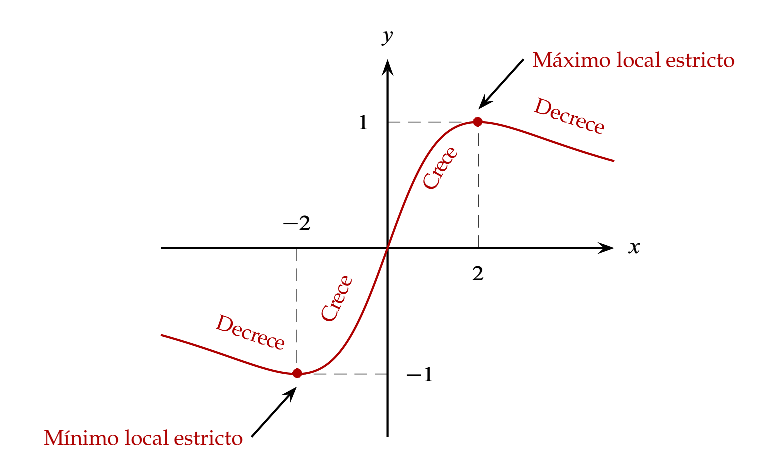
El punto mínimo local estricto está en

$$P[-2, g(-2)] = P\left(-2, \frac{-8}{4+4}\right) = P(-2, -1)\,.$$

El punto máximo local estricto está en

$$Q[-2, f(2)] = Q\left(2, \frac{8}{4+4}\right) = Q(2, 1)\,.$$

Todo ello sigue concordando, naturalmente, con que $g(x)$ es impar.



□

Ejemplo 8.2.4 *Obtener y clasificar los puntos críticos de la función* $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

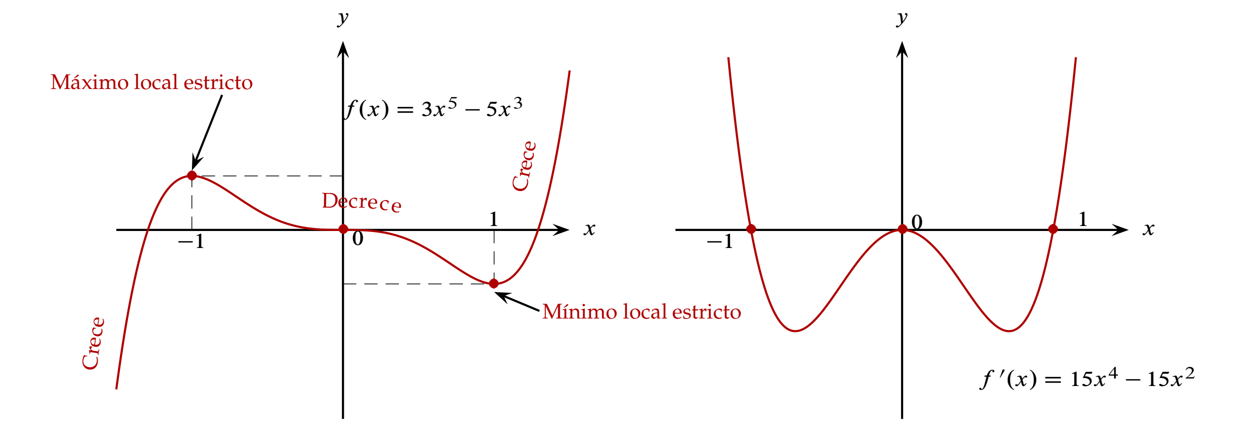
▼
$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x+1)(x-1)$;
$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 15x^2(x+1)(x-1) = 0$ esto se cumple si:

$$\begin{aligned} x^2 = 0 &\;\Rightarrow\; x = 0 \text{ o bien} \\ x + 1 = 0 &\;\Rightarrow\; x = -1 \text{ o bien} \\ x - 1 = 0 &\;\Rightarrow\; x = 1\,. \end{aligned}$$

Esto implica que la función f tiene tres puntos críticos: en $x_1 = -1$, en $x_2 = 0$ y en $x_3 = 1$.
Para clasificarlos, utilizamos la información que se tiene en el ejemplo **??** anterior sobre crecimiento

y decrecimiento de f.

Para	f' *es*	f *es*	*entonces,* f *tiene*
$x < -1$	$+$	creciente $\nearrow$	
$x_1 = -1$	0		un máximo local estricto
$1 < x < 0$	$-$	decreciente $\searrow$	
$x_2 = 0$	0		ni mínimo, ni máximo
$0 < x < 1$	$-$	decreciente $\searrow$	
$x_3 = 1$	0		un mínimo local estricto
$1 < x$	$+$	creciente $\nearrow$	



El punto máximo local estricto está en $P[-1, f(-1)] = P(-1, 2)$.
El punto mínimo local estricto está en $Q[1, f(1)] = Q(1, -2)$.
Todo ello concuerda con que $f(x)$ es impar. □

Ejemplo 8.2.5 *Sea $f(x)$ una función cuya derivada es*

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x}{(3 + 2x)\sqrt{50 + 6x}}$$

y con dominio igual al de su derivada. Determine los intervalos de monotonía de $f(x)$ y sus puntos extremos.

▼ Para determinar el dominio de f' observemos que

$$50 + 6x > 0 \;\Leftrightarrow\; 6x > -50 \;\Leftrightarrow\; x > -\frac{50}{6} = -\frac{25}{3}$$

y también que

$$3 + 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x = -3 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{3}{2};$$

entonces,

$$D_f = D_{f'} = \left(-\frac{25}{3}, -\frac{3}{2}\right) \bigcup \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) = \left(-\frac{25}{3}, +\infty\right) - \left\{-\frac{3}{2}\right\}.$$

Por otra parte

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = x(x+1)(x-4) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -1, 0 \,\&\, 4.$$

Veamos el signo de f' en los distintos intervalos, tomando en cuenta que $\sqrt{50 + 6x} > 0$ siempre.

	Signo de					
Intervalo	$3 + 2x$	$x + 1$	x	$x - 4$	$f'(x)$	$f(x)$ *es*
$-\frac{25}{3} < x < -\frac{3}{2} (< -1 < 0 < 4)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	creciente
$\left(-\frac{25}{3} <\right) -\frac{3}{2} < x < -1 (< 0 < 4)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	decreciente
$\left(-\frac{25}{3} < -\frac{3}{2} <\right) -1 < x < 0 (< 4)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	creciente
$\left(-\frac{25}{3} < -\frac{3}{2} < -1\right) < 0 < x < 4$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	decreciente
$\left(-\frac{25}{3} < -\frac{3}{2} < -1 < 0 <\right) 4 < x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	creciente

Luego $f(x)$ tiene los siguientes puntos extremos: en $x = -\frac{3}{2}$ un máximo local estricto pues f pasa de ser creciente a ser decreciente; en $x = -1$ un mínimo local estricto pues f pasa de ser decreciente a ser creciente; en $x = 0$ un máximo local estricto pues f pasa de ser creciente a ser decreciente y en $x = 4$ un mínimo local estricto pues f nuevamente pasa de ser decreciente a ser creciente.

□

Ejemplo 8.2.6 *Dada la siguiente función:* $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-2}$, *determine los intervalos de monotonía de* $f(x)$, *los puntos extremos y grafique esa función.*

▼ Como $f(x) = x + 1 + (x-2)^{-1}$, entonces:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{(x-2)^2} < 1 \;\Leftrightarrow\; (x-2)^2 > 1 \;\Leftrightarrow\; |x-2| > 1 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x - 2 > 1 \text{ o bien } x - 2 < -1 \;\Leftrightarrow\; x > 3, \text{ o bien } x < 1.$$

Luego, f es creciente en

$$(-\infty, 1) \text{ y en } (3, +\infty)$$

y decreciente en

$$(1, 2) \text{ y en } (2, 3)\,.$$

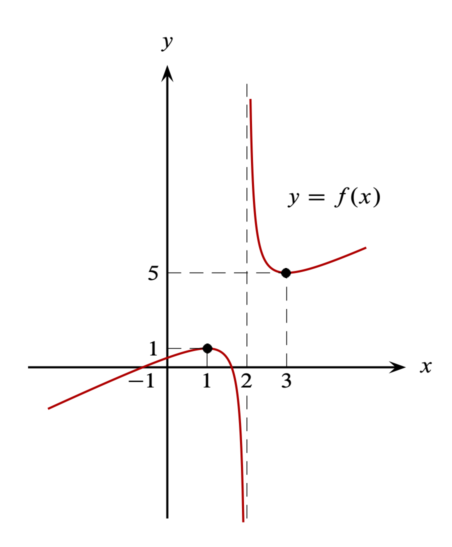
(Observe que $x = 2 \notin D_f$.)
Los puntos críticos aparecen cuando

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-2| = 1 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o bien } x = 3.$$

Como en $x = 1$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, en el punto $[1, f(1)] = \left(1, 1 + 1 + \frac{1}{1-2}\right) = (1, 1)$ la función tiene un máximo relativo.
Y en $x = 3$, un mínimo relativo pues la función pasa de ser decreciente a ser creciente;
El mínimo es $f(3) = 3 + 1 + \frac{1}{3-2} = 5$.
También tenemos que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ y que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$.
Además

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2} = \frac{x^2 - 2x + x - 2 + 1}{x-2} = \frac{x^2 - x - 1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \approx \begin{cases} 1.6 \\ -0.6 \end{cases} \quad \text{son las raíces.}$$

La gráfica es



□

- Si $f(x_0) \geq f(x)$ para cualquier $x \in D_f$ diremos que $f(x_0)$ es el máximo absoluto de la función f.
- Si $f(x_0) \leq f(x)$ para cualquier $x \in D_f$ diremos que $f(x_0)$ es el mínimo absoluto de la función f.

Ya sabemos que como $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, existen el máximo y el mínimo absolutos de f.

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y derivable en (a, b), el máximo y el mínimo absolutos los toma la función en los extremos del intervalo o bien con el mayor de los máximos locales o con el menor de los mínimos locales respectivamente.

Ejercicios 8.2.1 *Soluciones en la página 10*

Utilizando el criterio de la primera derivada, determinar los máximos y mínimos locales o relativos de las siguientes funciones.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
2. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.
3. $h(x) = -2x^3 + 6x - 1$.
4. $f(x) = x^4 - 4x^3$.
5. $g(x) = (x^2 - 1)^2$.
6. $h(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$.
7. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.
8. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$.
9. $h(x) = \sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt[3]{x}$.
10. $f(x) = x^3 + \dfrac{48}{x}$.

Nótese que estas funciones son las mismas que están en los ejercicios 8.1.1. Esto se hace con el propósito de utilizar la información obtenida, sobre crecimiento y decrecimiento, en cada una de las funciones.

Ejercicios 8.2.1 *Máximos y mínimos locales, página 9*

1. f tiene un mínimo local $A(2,-1)$.
2. g tiene un máximo local $A(1,2)$;
   g tiene un mínimo local $B(3,-2)$.
3. h tiene un mínimo en $A(-1,-5)$;
   h tiene un máximo en $B(1,3)$.
4. f tiene un mínimo local en $P(3,-27)$;
   f no tiene máximos locales.
5. En $x = -1$ un mínimo local;
   en $x = 0$ un máximo local;
   en $x = 1$ un mínimo local.
6. h tiene un mínimo local en $P(2,12)$.
7. f tiene en $P(0,0)$ un máximo local.
8. g tiene en $A(0,3)$ un máximo local.
9. h tiene en $Q(1,-3)$ un mínimo local.
10. Máximo local en $P(-2,-32)$;
    mínimo local en $Q(2,32)$.

CAPÍTULO

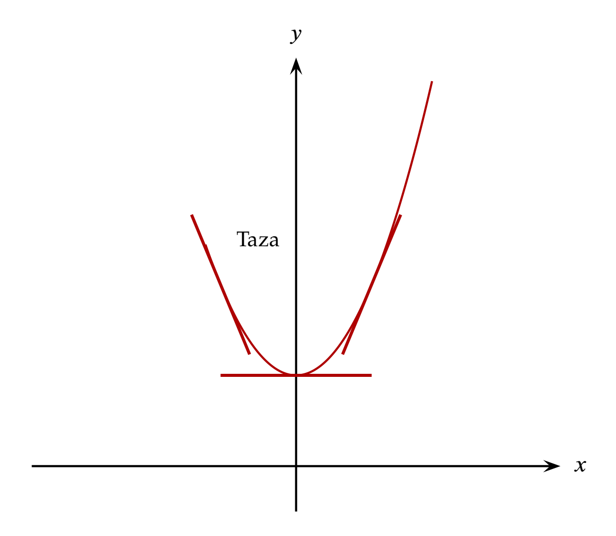
8

Aplicaciones de la derivada

[1]

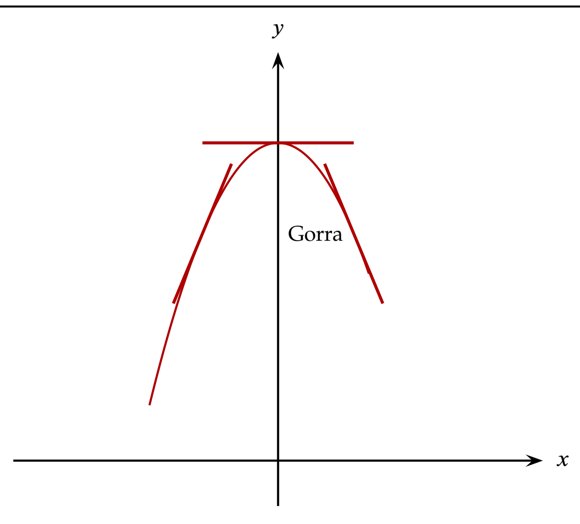
8.3 Concavidad y convexidad

- Observemos que $f''(x) > 0$ en un intervalo $\Rightarrow$ $f'(x)$ es creciente en dicho intervalo, por lo tanto, al recorrer la gráfica de la función f de izquierda a derecha, debe presentar forma de taza. Ya que la inclinación de la tangente crece en sentido directo diremos que la función es cóncava. En este caso la gráfica está encima de sus tangentes y debajo de sus secantes.



- Observemos que $f''(x) < 0$ en un intervalo $\Rightarrow$ $f'(x)$ es decreciente en dicho intervalo; entonces al recorrer la gráfica de la función f de izquierda a derecha, debe presentar forma de gorra. Ya que la inclinación de la tangente decrece en sentido directo diremos que la función es convexa. En este caso la gráfica está debajo de sus tangentes y encima de sus secantes.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



Concretando:

- La función (curva) $y = f(x)$ es cóncava en el intervalo I si $f''(x) > 0$ para cada $x \in I$.
- La función (curva) $y = f(x)$ es convexa en el intervalo I si $f''(x) < 0$ para cada $x \in I$.

- De aquí surge el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos locales:

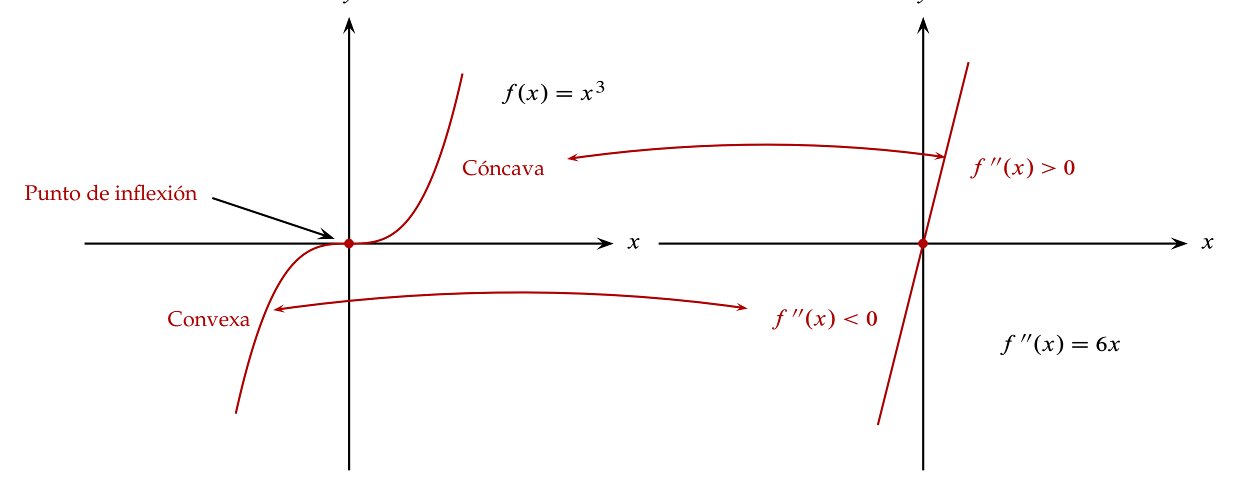
  1. Si $f'(x_0) = 0$ y si $f''(x_0) > 0$, en x_0 hay un mínimo local.
  2. Si $f'(x_0) = 0$ y si $f''(x_0) < 0$, en x_0 hay un máximo local.

Se llama punto de inflexión de f a un punto donde la segunda derivada de la función es cero y en el punto cambia de signo, esto es, la segunda derivada pasa de ser positiva antes del punto a ser negativa después del punto, o viceversa, siendo continua la funció en dicho punto. En ellos la función pasa de ser cóncava a convexa, o viceversa.

Ejemplo 8.3.1 *Para la función* $f(x) = x^3$

▼ Calculamos $f'(x) = 3x^2$, entonces

1. $f''(x) = 6x > 0$ si $x > 0$ luego f es cóncava en el intervalo $(0, +\infty)$.
2. $f''(x) = 6x < 0$ si $x < 0$ luego f es convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$.
3. $f''(x) = 6x = 0$ si $x = 0$ luego f tiene un punto de inflexión en $x = 0$.



□

Otra nomenclatura usual es la siguiente:

- Si f es una función cóncava, entonces f es cóncava hacia arriba, ($f''(x) > 0$).
- Si f es una función convexa, entonces f es cóncava hacia abajo, ($f''(x) < 0$).
- Podemos decir que la curva (función) $y = f(x)$ en x_0 tiene un punto de inflexión si en x_0 hay un cambio de concavidad y si hay continuidad.

Ejemplo 8.3.2 *Determine los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la función* $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$ *(del ejemplo **??**).*

▼

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{4x}{x^2+4} \;\Rightarrow\; g'(x) = \frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2} \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; g''(x) &= 4\frac{(x^2+4)^2(-2x) - (4-x^2)2(x^2+4)(2x)}{[(x^2+4)^2]^2} = 4\frac{(-2x)(x^2+4)^2 - (4x)(x^2+4)(4-x^2)}{(x^2+4)^4} = \\
&= 4\frac{(-2x)(x^2+4)[(x^2+4)+2(4-x^2)]}{(x^2+4)(x^2+4)^3} = \frac{4(-2x)[x^2+4+8-2x^2]}{(x^2+4)^3} = \\
&= \frac{-8x(-x^2+12)}{(x^2+4)^3} = \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; g''(x) &= \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}\,.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, debido a que $8 > 0$ y a que $(x^2+4)^3 > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
g''(x) > 0 \;&\Leftrightarrow\; \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} > 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2-12) > 0 \text{ y} \\
g''(x) < 0 \;&\Leftrightarrow\; \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} < 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2-12) < 0\,.
\end{aligned}
$$

Pero $x(x^2-12) = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x+\sqrt{12})(x-\sqrt{12}) = 0$. Esto se cumple si

1. $x = 0$ o bien
2. $x + \sqrt{12} = 0 \;\Rightarrow\; x = -\sqrt{12}$ o bien
3. $x - \sqrt{12} = 0 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{12}$.

Con los números $x_1 = -\sqrt{12}$, $x_2 = 0$ & $x_3 = \sqrt{12}$ generamos los intervalos:

$$
\left(-\infty, -\sqrt{12}\right),\; \left(-\sqrt{12}, 0\right),\; \left(0, \sqrt{12}\right) \text{ y } \left(\sqrt{12}, = \infty\right).
$$

Como $g''(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, en cada uno de esos intervalos tomaremos una x fija (valor de prueba) para determinar el signo de $g''(x)$.

Para	*valor de prueba*	*$g''(x)$ es*	*entonces g es cóncava*
$-\infty < x < -\sqrt{12}$	$x = -4$	$-$	hacia abajo o convexa
$-\sqrt{12} < x < 0$	$x = -1$	$+$	hacia arriba
$0 < x < \sqrt{12}$	$x = 1$	$-$	hacia abajo o convexa
$\sqrt{12} < x < +\infty$	$x = 4$	$+$	hacia arriba

Por lo tanto,

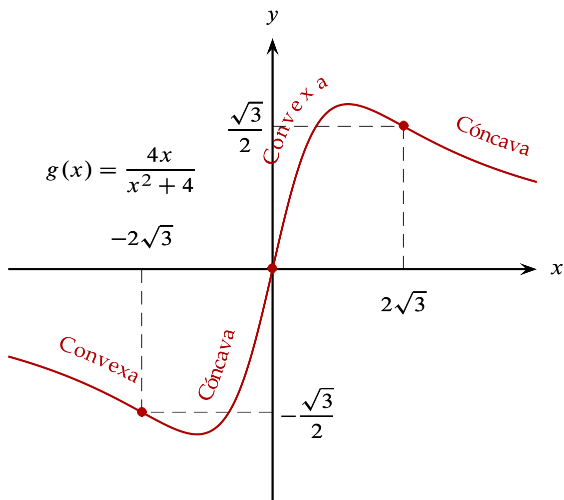
- la curva (función) $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en los intervalos: $\left(-\sqrt{12}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{12}, +\infty\right)$;
- la función (curva) $y = f(x)$ es cóncava hacia abajo o convexa en los intervalos: $\left(-\infty, -\sqrt{12}\right)$ y $\left(0, \sqrt{12}\right)$;
- la curva (función) $y = f(x)$ tiene puntos de inflexión en $x_1 = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3} \approx -3.464$, $x_2 = 0$ y en $x_3 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

  Concretamente, en:

$$P_1[x_1, f(x_1)] = P_1[-\sqrt{12}, f(-\sqrt{12})] = P_1\left(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (-3.464, -0.866)\,;$$

$$P_2[x_2, f(x_2)] = P_2[0, f(0))] = P_2(0, 0) \text{ y en}$$

$$P_3[x_3, f(x_3)] = P_3[\sqrt{12}, f(\sqrt{12})] = P_3\left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (3.464, 0.866)\,.$$



Nuevamente todos los resultados son congruentes con el hecho de que $g(x)$ es impar.

□

Ejemplo 8.3.3 *Determinar los intervalos de concavidad y puntos de inflexión de la función* $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ *(del ejemplo* **??***).*

▼

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 15x^4 - 15x^2 \Rightarrow f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1)\,.$$

Entonces

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - 1) > 0 \;\&\; f''(x) < 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - 1) < 0\,.$$

Ahora bien $x(2x^2 - 1) = 0$. Esto ocurre cuando:

1. $x = 0$.
2. $2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Con los números $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = 0$ y con $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ generamos los intervalos

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right).$$

Como $f''(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ en cada uno de esos intervalos, tomamos un x fijo (valor de prueba) para determinar el signo de f''.

Para	*valor de prueba*	*$f''(x)$ es*	*entonces f es cóncava hacia*
$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = -1$	$-$	abajo o convexa
$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$	$x = -\frac{1}{2}$	$+$	arriba
$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = \frac{1}{2}$	$-$	abajo o convexa
$\frac{1}{\sqrt{2}} < x$	$x = 1$	$+$	arriba

Por lo tanto

- La función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ es cóncava hacia arriba en los intervalos: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$.
- La curva $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ es cóncava hacia abajo o convexa en los intervalos: $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

- La función f tiene puntos de inflexión en:

$$P_1\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\, f(-\frac{1}{\sqrt{2}})\right] = P_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1.2374\right) ;$$
$$P_2[0,\, f(0)] = P_2(0,0) \text{ y en}$$
$$P_3\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\, f(\frac{1}{\sqrt{2}})\right] = P_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1.2374\right) .$$

Nuevamente vemos que todo es consistente con el hecho de ser $f(x)$ impar.

□

Ejemplo 8.3.4 *Sea la función*

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)^2} ,$$

diga en qué intervalos es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo y determine los puntos de inflexión.

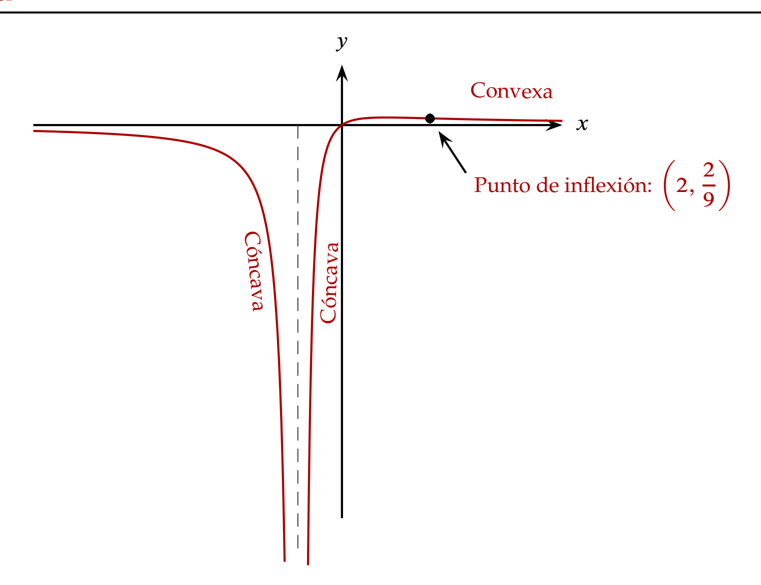
▼ Calculemos la segunda derivada de f

$$f'(x) = \frac{(1+x)^2 - 2(1+x)x}{(1+x)^4} = \frac{1+x-2x}{(1+x)^3} = \frac{1-x}{(1+x)^3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-(1+x)^3 - 3(1+x)^2(1-x)}{(1+x)^6} = \frac{-1-x-3+3x}{(1+x)^4} = \frac{2x-4}{(1+x)^4} .$$

El signo de esta segunda derivada nos lo da el numerador $2x - 4$, pues el denominador es siempre positivo:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > \frac{4}{2} = 2.$$

Entonces, la función $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(2, +\infty)$.
Y cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-1, 2)$, pues $-1 \notin D_f$.
Para $x = 2$ (raíz de f'') se tiene un punto de inflexión, ya que ahí la gráfica de f cambia el sentido de la concavidad.
El punto de inflexión es $[2, f(2)] = \left(2, \frac{2}{9}\right)$.



□

Ejemplo 8.3.5 *Para la función $f(x) = (x^2 - 4)^3$, determine:*

1. *Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento. Los extremos relativos.*
2. *Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo. Los puntos de inflexión.*
3. *La gráfica.*

▼ Calculemos:

1. $f'(x) = 3(x^2 - 4)^2 2x = 6x(x + 2)^2(x - 2)^2$.

   Los puntos críticos están en $x = -2$, 0 y en 2.

   $f'(x) > 0$ si $x > 0$ & $x \neq 2$; luego, $f(x)$ es creciente en $(0, 2)$, en $(2, +\infty)$ y también en $[0, +\infty)$.

   $f'(x) < 0$ si $x < 0$ & $x \neq -2$; luego, $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$, en $(-2, 0)$ y también en $(-\infty, 0)$.

   Entonces el único extremo relativo es $(0, -64)$, donde la función pasa de ser decreciente a ser creciente; por lo tanto es un mínimo.

2. Calculemos la derivada de $f'(x) = 6x(x^2 - 4)^2$:

$$f''(x) = 6(x^2 - 4)^2 + 6x \times 2(x^2 - 4) \times 2x = 6(x^2 - 4)(x^2 - 4 + 4x^2) =$$
$$= 6(x^2 - 4)(5x^2 - 4) = 6(x + 2)(x - 2)(\sqrt{5}x + 2)(\sqrt{5}x - 2)\,.$$

La segunda derivada es 0 en ± 2 y en $\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}} \approx \pm 0.89$, y su signo está dado en la tabla siguiente:

	Signo de					
Intervalo	$x+2$	$\sqrt{5}x+2$	$\sqrt{5}x-2$	$x-2$	$f''(x)$	*$f(x)$ es cóncava hacia*
$x < -2 \left(< -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < \dfrac{2}{\sqrt{5}} < 2\right)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	arriba
$-2 < x < -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \left(< \dfrac{2}{\sqrt{5}} < 2\right)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	abajo
$(-2 <) -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < x < \dfrac{2}{\sqrt{5}} (< 2)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	arriba
$\left(-2 < -\dfrac{2}{\sqrt{5}} <\right) \dfrac{2}{\sqrt{5}} < x < 2$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	abajo
$\left(-2 < -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < \dfrac{2}{\sqrt{5}} <\right) 2 < x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	arriba

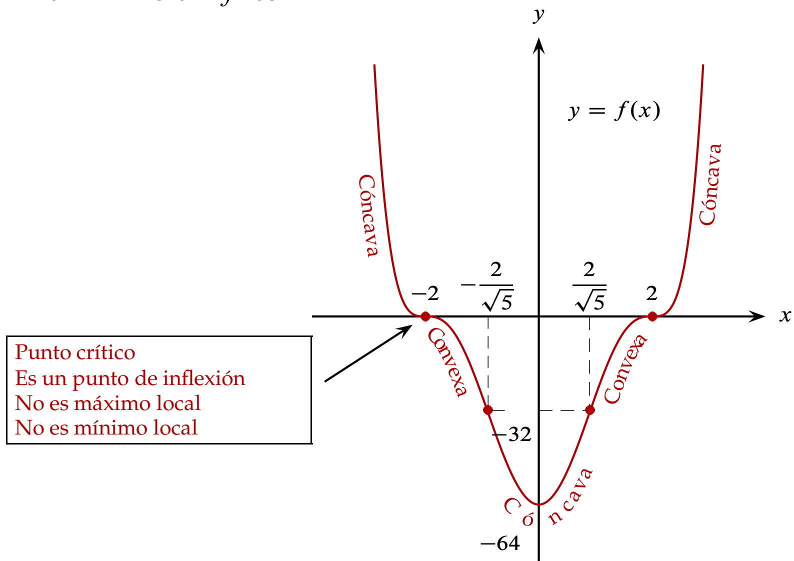
Vemos entonces que en $\left(-2, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y en $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 2\right)$ la función es cóncava hacia abajo.

Vemos también que en $(-\infty, -2)$, en $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y en $(2, +\infty)$ lo es hacia arriba.

Los puntos $(\pm 2, 0)$ & $\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{-16^3}{125}\right) \approx (\pm 0.89, -32.77)$ son de inflexión.

Tenemos además que $f(0) = -64$ & $f(\pm 2.8) = 56.62$.

3. La gráfica de la función f es



Todo concuerda con que f es par; $(0, -64)$ resulta ser mínimo absoluto y f no tiene máximo absoluto.

□

Ejercicios 8.3.1 *Soluciones en la página 11*

Determinar los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

1. $g(x) = 4 - 3x^2$.
2. $f(x) = (x-1)^3$.
3. $h(x) = x^4 - 6x^2 + 9$.
4. $\phi(x) = x^6 - 3x^4$.
5. $f(x) = \dfrac{-2x}{x^2+1}$.
6. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.
7. $h(x) = x^2 + \dfrac{8}{x}$.
8. $\phi(x) = x^{5/3} - x^{2/3}$.
9. $f(x) = x^4 - 2x^3$.
10. $g(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$.

Ejercicios 8.3.2 *Soluciones en la página 11*

Utilizando el criterio de la segunda derivada, determinar los máximos y/o mínimos locales de las anteriores funciones.

1. $g(x) = 4 - 3x^2$.
2. $f(x) = (x-1)^3$.
3. $h(x) = x^4 - 6x^2 + 9$.
4. $\phi(x) = x^6 - 3x^4$.
5. $f(x) = \dfrac{-2x}{x^2+1}$.
6. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.
7. $h(x) = x^2 + \dfrac{8}{x}$.
8. $\phi(x) = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$.
9. $f(x) = x^4 - 2x^3$.
10. $g(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$.

Ejercicios 8.3.1 *Concavidad y convexidad, página 9*

1. g es convexa en todo su dominio.
2. f es cóncava en $(1, +\infty)$;
   f es convexa en $(-\infty, 1)$;
   f tiene en $x = 1$ un punto de inflexión.
3. h es cóncava en $(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$;
   h es convexa en $(-1, 1)$;
   h tiene puntos de inflexión en $x = -1$ y en $x = 1$.
4. ϕ es cóncava en $(-\infty, -1.1)$ y en $(1.1, +\infty)$;
   ϕ es convexa en $(-1.1, 1.1)$;
   ϕ tiene puntos de inflexión en $x = -1.1$ y en $x = 1.1$.
5. f es cóncava en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{3}\right)$;
   f es convexa en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y en $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$;
   f tiene puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y en $x = \sqrt{3}$.
6. g es cóncava en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$;
   g es convexa en $(-2, 2)$;
   no tiene puntos de inflexión.
7. h es cóncava en $(-\infty, -2)$ y en $(0, +\infty)$;
   h es convexa en $(-2, 0)$;
   h tiene un punto de inflexión en $x = -2$.
8. ϕ es convexa en $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)$;
   ϕ es cóncava en $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ y en $(0, +\infty)$;
   tiene un cambio de concavidad en $x = -\frac{1}{5}$;
   ϕ tiene un sólo punto de inflexión.
9. f es cóncava en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$;
   f es convexa en $(0, 1)$;
   f tiene puntos de inflexión en $x = 0$ y en $x = 1$.
10. g es cóncava en todo su dominio;
    no tiene puntos de inflexión.

Ejercicios 8.3.2 *Concavidad y convexidad, página 10*

1. g tiene en $x = 0$ un máximo local.
2. Un punto crítico en $x = 1$;
   no es un máximo local ni un mínimo local.
3. Puntos críticos en $x = 0$ y en $x = \pm\sqrt{3}$. En el primero hay un máximo local estricto y en los otros dos mínimos absolutos.
4. Tres puntos críticos: en $x = 0$ y en $x = \pm\sqrt{2}$. En el primero hay un máximo local estricto y en los otros mínimos absolutos.
5. Dos puntos críticos: en $x = \pm 1$. En -1 hay máximo absoluto y en 1 mínimo absoluto.
6. $x = 0$ es máximo local estricto.
7. h tiene un punto crítico en $x = \sqrt[3]{4}$;
   es un mínimo local.
8. ϕ tiene dos puntos críticos en:
   $x = \frac{2}{5}$ (mínimo local);
   $x = 0$ (máximo local).
9. ϕ tiene dos puntos críticos en:
   $x = 0$ (ni mínimo local ni máximo local);
   $x = \frac{3}{2}$ (mínimo local).
10. g tiene un punto crítico en:
    $x = 0$ (mínimo local).

CAPÍTULO

9

Gráfica de una función

[1]

9.1 Bosquejo de la gráfica de una función

Para gráficar una función es necesario:

1. Hallar su dominio y sus raíces.
2. Decidir si es par o impar, o bien ninguna de las dos cosas.
3. Determinar sus intervalos de continuidad.
4. Determinar sus discontinuidades y clasificarlas
5. Hallar sus asíntotas horizontales y verticales.
6. Calcular su derivada y averiguar dónde existe. Hallar sus puntos críticos. Averiguar si tiene tangentes verticales.
7. Resolver las desigualdades $f'(x) > 0$ & $f'(x) < 0$. Determinar sus intervalos de monotonía.
8. Hallar sus máximos y mínimos locales.
9. Hallar su segunda derivada y sus raíces. Resolver las desigualdades $f''(x) > 0$ & $f''(x) < 0$, discernir dónde es cóncava y dónde es convexa la función. Hallar sus puntos de inflexión. Evaluar la función y la primera derivada en los puntos de inflexión.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

10. Si es preciso: tabular algunos puntos y algunas pendientes adicionales.

Ejemplo 9.1.1 *Bosquejar la gráfica de la función* $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

▼

1. Dominio: por ser f una función polinomial su dominio es $D_f = \mathbb{R}$.

   Raíces:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3x^5 - 5x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(3x^2 - 5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ \text{o bien} \\ 3x^2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o bien} \\ x^2 = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o bien} \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ o bien} \\ x = \sqrt{\dfrac{5}{3}} \text{ o bien} \\ x = -\sqrt{\dfrac{5}{3}}. \end{cases}$$

   Entonces f tiene 3 raíces: $r_1 = -\sqrt{\dfrac{5}{3}}$, $r_2 = 0$ & $r_3 = \sqrt{\dfrac{5}{3}} \approx 1.29$.

2. Paridad:

$$f(-x) = 3(-x)^5 - 5(-x)^3 = 3(-x^5) - 5(-x^3) = -3x^5 + 5x^3 = -(3x^5 - 5x^3) = -f(x).$$

   La función f es impar. Por lo cual su gráfica resultará simétrica con respecto al origen.

3. Intervalos de continuidad:

   Por ser f una función polinomial es continua en todo $\mathbb{R}$. Por lo mismo no tiene discontinuidades.

4. Asíntotas verticales:

   Por ser continua en todo $\mathbb{R}$, la función f no tiene asíntotas verticales.

5. Asíntotas horizontales: no tiene, pues

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (3x^5 - 5x^3) = \lim_{x\to+\infty} \left[x^5\left(3 - \frac{5}{x^2}\right)\right] = +\infty.$$

   Además (por ser impar)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

   Comentario: el comportamiento de estos límites se conoce como ramas parábolicas de la función.

6. Derivabilidad:

   Por ser f una función polinomial, es derivable en todo $\mathbb{R}$. De hecho

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 \text{ existe para cada } x \in \mathbb{R} \; (f' \text{ es par}).$$

7. Monotonía: por el ejemplo 8.1.4 sabemos que

   - La función f es creciente en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, +\infty)$.
   - La función f es decreciente en el intervalo $[-1, 1]$.

8. Puntos críticos: por el ejemplo 8.2.4 sabemos que

   - En $x = 0$ existe un punto crítico que no es ni máximo ni mínimo local.
   - La función f tiene un máximo local estricto en el punto $P(-1, 2)$.
   - La función f tiene un mínimo local estricto en el punto $Q(1, -2)$.

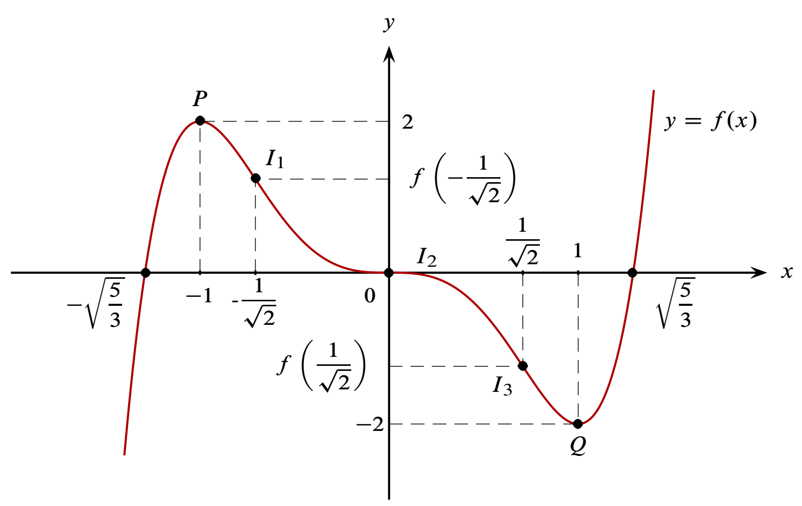
9. Concavidades: por el ejemplo 8.3.3 sabemos que

   - La función f es cóncava hacia arriba en los intervalos $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right) \approx (0.7071, +\infty)$.
   - La función f es cóncava hacia abajo en los intervalos $\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
   - La función f tiene 3 puntos de inflexión, que son

   $$I_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1.2374\right), \ I_2(0,0) \ \& \ I_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1.2374\right).$$

   Corroboramos que siendo $I_2(0, 0)$ un punto crítico y al mismo tiempo un punto de inflexión no es ni un máximo local ni un mínimo local.

10. Bosquejo de la gráfica de $f(x)$:



□

Ejemplo 9.1.2 *Bosquejar la gráfica de la función* $g(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$.

▼

1. Dominio: por ser g una función racional su dominio es

$$D_g = \mathbb{R} - \{ x \mid x^2 + 4 = 0 \} = \mathbb{R} - \varnothing = \mathbb{R} \text{ ya que } x^2 + 4 > 0 \text{ para cada } x \in \mathbb{R} .$$

   Raíces:

$$g(x) = \frac{4x}{x^2 + 4} = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 .$$

2. Paridad:

$$g(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 4} = \frac{-4x}{x^2 + 4} = -\left(\frac{4x}{x^2 + 4}\right) = -g(x) .$$

   Puesto que $g(x) = -g(-x)$, entonces g es una función impar.

3. Intervalos de continuidad:

   Por ser g una función racional es continua en todo su dominio $D_g = \mathbb{R}$.

4. Asíntotas verticales: no tiene debido a que g no tiene discontinuidades.

5. Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x}{x^2 + 4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 \left(\frac{4}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1 + \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0 .$$

   Entonces g tiene una asíntota horizontal que es la recta $y = 0$ (el eje x).

6. Derivabilidad:

$$g'(x) = \frac{4(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2} \text{ para cada } x \in \mathbb{R}, (g' \text{ es par}) .$$

7. Intervalos de monotonía: por el ejemplo 8.1.2 sabemos que

   - La función g es creciente en el intervalo $(-2, 2)$.
   - La función g es decreciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$.

8. Puntos críticos: por el ejemplo 8.2.3 sabemos que

   - La función g tiene un mínimo local estricto en el punto $P(-2, -1)$.
   - La función g tiene un máximo local estricto en el punto $Q(2, 1)$.

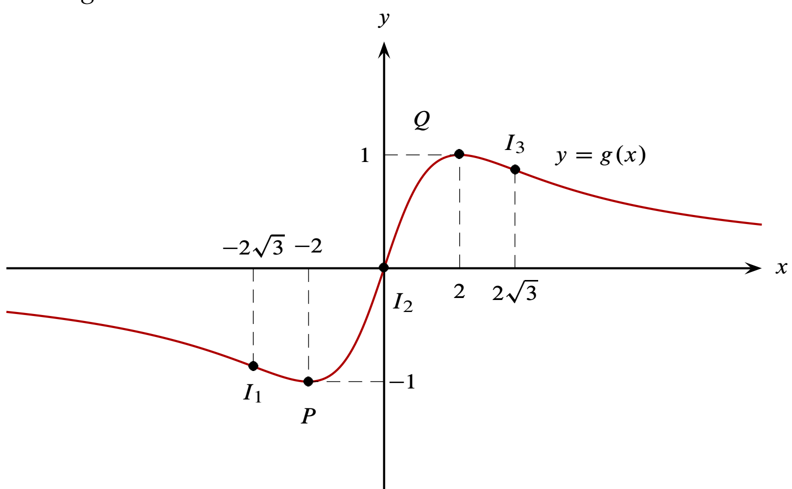
   Por ser $y = 0$ asíntota horizontal y en ausencia de otros puntos críticos, tales valores extremos son globales. Por lo tanto el punto P es un mínimo absoluto y el punto Q es un máximo absoluto.

9. Intervalos de concavidad: por el ejemplo 8.3.2 sabemos que

   - La función g es cóncava hacia arriba en los intervalos $\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(2\sqrt{3}, +\infty\right)$.

- La función g es cóncava hacia abajo en los intervalos $\left(-\infty, -2\sqrt{3}\right)$ y $\left(0, 2\sqrt{3}\right)$.
- La función g tiene puntos de inflexión en $I_1\left(-2\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $I_2(0,0)$ e $I_3\left(2\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (3.46, 0.87)$.

10. Bosquejo de la gráfica de g:



□

Ejemplo 9.1.3 *Para la función* $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)^2}$, *obtener: dominio, raíces y paridad, intervalos de continuidad, asíntotas horizontales y verticales , intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos críticos y su clasificación, intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, puntos de inflexión. Con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función.*

▼

1. El dominio de f:

$$\begin{aligned} D_f &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid (x+1)^2 \neq 0 \,\} = \\ &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x+1 \neq 0 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \,\} = \mathbb{R} - \{-1\}\,. \end{aligned}$$

2. Las raíces de f y paridad:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x-2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2\,.$$

   La función f no es par ni impar, ya que por ejemplo:

   $f(2) = 0$ & $f(-2) = 16 \Rightarrow f(-2) \neq f(2)$ & $f(-2) \neq -f(2)$.

3. Intervalos de continuidad:

   Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$; es decir, f es continua en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-1, +\infty)$.

4. Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4x+4}{x^2+2x+1} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Entonces la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

5. Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-1} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 .$$

Ya que $\lim_{x\to-1}(x-2) = -1-2 = -3$ & $\lim_{x\to-1}(x+1) = 0$, entonces $\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x+1} = +\infty$ o bien $-\infty$; por lo cual $\lim_{x\to-1}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 = +\infty$, no importando si $x \to -1^-$ o bien $x \to -1^+$.

Por lo anterior, la función tiene una discontinuidad esencial infinita en $x = -1$. Por lo tanto, la recta $x = -1$ es la única asíntota vertical de f.

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 = 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{x-2}{x+1}\right) =$$
$$= 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\frac{(x+1)1-(x-2)1}{(x+1)^2} = 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\frac{x+1-x+2}{(x+1)^2} =$$
$$= 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\frac{3}{(x+1)^2} = \frac{6(x-2)}{(x+1)^3}.$$

Debemos ver dónde $\frac{6(x-2)}{(x+1)^3} > 0$ y dónde $\frac{6(x-2)}{(x+1)^3} < 0$.

Ya que $\frac{6(x-2)}{(x+1)^3}$ no está definido cuando $x+1 = 0$, excluimos el número $x = -1$.

Ya que $\frac{6(x-2)}{(x+1)^3} = 0$ cuando $x-2 = 0$, excluimos también el número $x = 2$.

Los números excluidos generan los intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$ y $(2,+\infty)$.

Para saber el signo de f' en cada uno de los intervalos, se elige un valor de prueba y se evalúa

$f'(x)$ en dicho valor. Observe la siguiente tabla:

Intervalo	*Valor de prueba*	$f'(x)$	*f es estrictamente*
$-\infty < x < -1$	$x = -2$	$24 > 0$	creciente
$-1 < x < 2$	$x = 0$	$-12 < 0$	decreciente
$2 < x < +\infty$	$x = 3$	$\frac{3}{32} > 0$	creciente

Por lo tanto f es estrictamente creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$, y $(2, +\infty)$ y es estrictamente decreciente en el intervalo $(-1, 2)$.

7. Puntos críticos y su clasificación:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{6(x-2)}{(x+1)^3} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2;$$

entonces f tiene un punto crítico en $x = 2$.

Ya que para $-1 < x < 2$, la función f es decreciente y para $x > 2$ es creciente; entonces (por el criterio de la primera derivada) f tiene en $x = 2$ un mínimo local estricto. Las coordenadas de este punto crítico son $(2, f(2)) = (2, 0)$.

8. Concavidad:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\frac{6(x-2)}{(x+1)^3} = 6\frac{(x+1)^3 1 - (x-2)3(x+1)^2 1}{[(x+1)^3]^2} = \\ &= 6\frac{(x+1)^3 - 3(x+1)^2(x-2)}{(x+1)^6} = 6\frac{(x+1)^2[(x+1) - 3(x-2)]}{(x+1)^6} = \\ &= \frac{6(x+1-3x+6)}{(x+1)^4} = \frac{6(-2x+7)}{(x+1)^4} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; f''(x) &= \frac{6(7-2x)}{(x+1)^4}; \end{aligned}$$

Debemos ver dónde $\frac{6(7-2x)}{(x+1)^4} > 0$ y dónde $\frac{6(7-2x)}{(x+1)^4} < 0$.

Observando que para $x \neq -1$ el denominador $(x+1)^4$ siempre es positivo (por el exponente par), podemos afirmar que el signo de $f''(x)$ depende exclusivamente del signo del factor $(7 - 2x)$.

$$7 - 2x > 0 \;\Leftrightarrow 7 > 2x \;\Leftrightarrow\; x < \frac{7}{2};$$
$$7 - 2x < 0 \;\Leftrightarrow 7 < 2x \;\Leftrightarrow\; x > \frac{7}{2}.$$

Entonces,

$$\frac{6(7-2x)}{(x+1)^4} > 0 \text{ para } x < \frac{7}{2} \ \& \ x \neq -1.$$
$$\frac{6(7-2x)}{(x+1)^4} < 0 \text{ para } x > \frac{7}{2}.$$

Por lo tanto:

La función f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$.

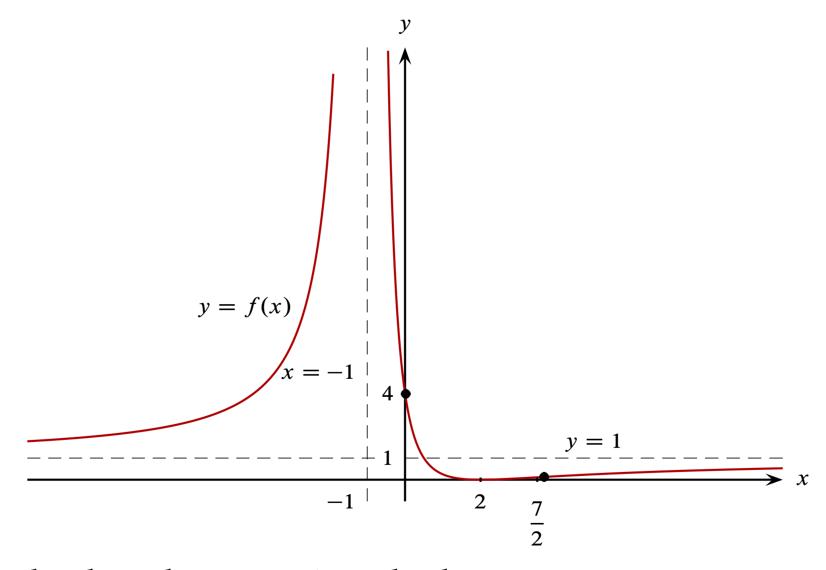
La función f es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

9. Puntos de inflexión:

Debido a que en $x = \frac{7}{2}$ existe un cambio de concavidad y a que la función f es continua ahí, podemos afirmar que f tiene en $x = \frac{7}{2}$ un punto de inflexión. Las coordenadas de este punto de inflexión son $\left(\frac{7}{2}, f\left(\frac{7}{2}\right)\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{9}\right)$.

10. Bosquejo de la gráfica:

Con los elementos obtenidos, un bosquejo de la gráfica de $f(x)$ es el siguiente



En $x = 2$ el mínimo local resulta ser mínimo absoluto.

□

Ejemplo 9.1.4 *Dada la función definida por* $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$, *determinar: dominio, raíces y paridad; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos y mínimos locales; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, así como los puntos de inflexión.*
A partir del análisis anterior, hacer un esbozo de la gráfica de f.

▼ Se tiene:

1. Dominio:

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \neq 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq 1 \} = \mathbb{R} - \{-1, 1\} .$$

2. Raíces:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 .$$

3. Paridad:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{1 - (-x)^2} = \frac{x^2}{1 - x^2} = f(x) .$$

La función f es par por lo cual su gráfica es simétrica respecto al eje y.

4. Intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades:

Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio.

Es decir, f es continua en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$. Esto implica que f tiene discontinuidades en $x = -1$ y en $x = 1$.

Veamos ahora $\lim_{x \to 1} f(x)$ & $\lim_{x \to -1} f(x)$.

Cuando $x \to 1$ ocurre que: $x^2 \to 1$; $1 - x^2 \to 0$ & $\dfrac{x^2}{1 - x^2} \to -\infty$ o bien $+\infty$.

Cuando $x \to -1$ ocurre que: $x^2 \to 1$; $1 - x^2 \to 0$ & $\dfrac{x^2}{1 - x^2} \to -\infty$ o bien $+\infty$.

Entonces dado que $\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$ o bien $+\infty$ & $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$ o bien $+\infty$ las discontinuidades son esenciales e infinitas.

5. Asíntotas verticales:

Precisamos los límites infinitos anteriores determinando los límites laterales.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{1 - x^2} ;$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow 1 - x^2 > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{1 - x^2} > 0 \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{1 - x^2} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{1 - x^2} ;$$

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow 1 - x^2 < 0 \Rightarrow \frac{x^2}{1 - x^2} < 0 \Rightarrow \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{1 - x^2} = -\infty.$$

Luego, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Por ser f una función par, su gráfica es simétrica respecto al eje y. Utilizando este hecho se puede afirmar que $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ y además que la recta $x = -1$ es también una asíntota vertical.

6. Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{x^2}-1} = \frac{1}{0-1} = -1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1\,.$$

De nuevo, por simetría con respecto al eje y, se tiene que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

Por lo tanto f tiene una sola asíntota horizontal que es la recta $y = -1$.

7. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) = \frac{(1-x^2)2x - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x-2x^3+2x^3}{(1-x^2)^2}\,;$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}\,.$$

Notando que siendo $x \neq \pm 1$ y que $(1-x^2)^2 > 0$, podemos asegurar que $f'(x) > 0$ para $x > 0$ y que $f'(x) < 0$ para $x < 0$. Entonces, f es estrictamente creciente en los intervalos $(0,1)$ y $(1,+\infty)$, y es estrictamente decreciente en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(-1,0)$.

8. Máximos y mínimos locales:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0\,;$$

entonces en $x = 0$ se tiene un punto crítico.

Debido a que f es decreciente para $x < 0$ y creciente para $x > 0$, por el criterio de la primera derivada se puede asegurar que f tiene en $x = 0$ un mínimo local estricto.

Ya que $f(0) = \dfrac{0^2}{1-0^2} = \dfrac{0}{1} = 0$, las coordenadas del punto mínimo local son $[0, f(0)] = (0,0)$.

9. Intervalos de concavidad:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{2x}{(1-x^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{(1-x^2)^2 2 - 2x(2)(1-x^2)(-2x)}{[(1-x^2)^2]^2} = \frac{2(1-x^2)^2 + 8x^2(1-x^2)}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{2(1-x^2)[(1-x^2)+4x^2]}{(1-x^2)^4} = \frac{2(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}\,.$$

Notando que $2(3x^2+1) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, podemos asegurar que el signo de $f''(x)$ es el de $(1-x^2)^3$, que es el mismo de $1-x^2$.

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow 1 > x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\,x\,| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1\,.$$

Entonces, $f''(x) > 0$ en el intervalo $(-1, 1)$.

$$f''(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - x^2 < 0 \;\Leftrightarrow\; 1 < x^2 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; |\,x\,| > 1 \;\Leftrightarrow\; x < -1 \text{ o bien } x > 1\,.$$

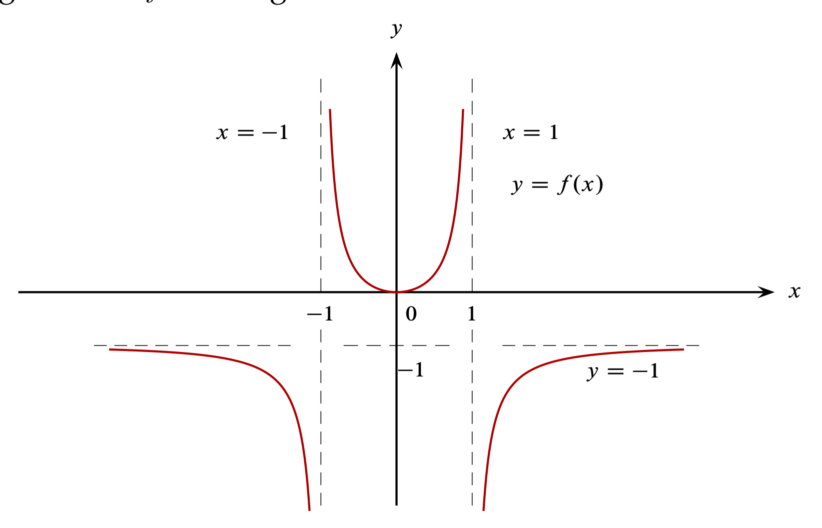
Luego, $f''(x) < 0$ en $(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$.

Por lo tanto, f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-1, 1)$ y cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$.

10. Puntos de inflexión:

    Existen cambios de concavidad en $x = -1$ y en $x = 1$. Pero debido a que f no está definida en dichos puntos, f no tiene puntos de inflexión. Nótese que $f''(x)$ no tiene raíces.

11. Un bosquejo de la gráfica de f es el siguiente:



$R_f = (-\infty, -1) \bigcup [0, +\infty)$. □

Ejemplo 9.1.5 *Dada la función definida por $f(x) = (4 - x)x^{1/3}$, obtener: dominio, raíces, paridad, intervalos de continuidad, discontinuidades y su clasificación, asíntotas verticales y horizontales, intervalos de crecimiento y de decrecimiento; puntos críticos y su clasificación; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.*

▼

1. Dominio: $D_f = \mathbb{R}$.

2. Raíces:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (4 - x)x^{\frac{1}{3}} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\&\; x = 4\,.$$

3. Paridad: f no es par ni impar pues $f(x) \neq \pm f(-x) = \pm(4 + x)x^{\frac{1}{3}}$.

4. Intervalos de continuidad: por ser producto de funciones continuas en $\mathbb{R}$, f es continua en $\mathbb{R}$ por lo que no tiene discontinuidades ni asíntotas verticales.

5. Asíntotas horizontales: tampoco tiene asíntotas horizontales pues

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty\,.$$

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

Derivamos

$$f(x) = (4-x)x^{1/3} = 4x^{1/3} - x^{4/3}\,;$$
$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{-2/3} - \frac{4}{3}x^{1/3} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^{2/3}} - x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{1-x}{x^{2/3}}\right).$$

Primero resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$, para encontrar sus raíces

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{4}{3}\left(\frac{1-x}{x^{2/3}}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1-x=0 \;\Leftrightarrow\; x = 1.$$

Luego excluimos $x = 0$ ya que $f'(0)$ no existe y así obtenemos los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

En el siguiente cuadro se puede apreciar el signo de $f'(x)$ para un valor de prueba dentro de un intervalo. Con esto obtenemos el signo de la primera derivada dentro de dicho intervalo y por lo tanto el tipo de monotonía ahí.

Intervalo	*Valor de prueba*	$f'(x)$	*f es estrictamente*
$-\infty < x < 0$	$x = -1$	$\frac{8}{3} > 0$	creciente
$0 < x < 1$	$x = \frac{1}{8}$	$\frac{14}{3} > 0$	creciente
$1 < x < +\infty$	$x = 8$	$-\frac{7}{3} < 0$	decreciente

Entonces, la función f es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y estrictamente decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

Esto es claro ya que el signo de $f'(x)$ es el de $(1-x)$ pues $\frac{4}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} > 0$ siempre.

7. Puntos críticos y su clasificación:

Por el inciso anterior se sabe que: $f'(x) = 0$ en $x = 1$; que la función f es creciente en el intervalo $(0, 1)$ y que es decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

Entonces, por el criterio de la primera derivada, la función f tiene en $x = 1$ un máximo local estricto. Las coordenadas de dicho punto son $[1, f(1)] = (1, 3)$.

8. Intervalos de concavidad:

$$f''(x) = \frac{4}{3}\frac{d}{dx}\left(x^{-2/3} - x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}\left(-\frac{2}{3}x^{-5/3} - \frac{1}{3}x^{-2/3}\right) =$$
$$= -\frac{4}{9}\left(\frac{2}{x^{5/3}} + \frac{1}{x^{2/3}}\right) = -\frac{4}{9}\left(\frac{2+x}{x^{5/3}}\right).$$

Primero resolvemos la igualdad $f''(x) = 0$ para determinar sus raíces

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{4}{9}\left(\frac{x+2}{x^{5/3}}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; x+2=0 \;\Leftrightarrow\; x=-2.$$

Luego excluimos $x = 0$ ya que $f''(0)$ no existe y así obtenemos los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ y $(0, +\infty)$.

Intervalo	*Valor de prueba*	$f''(x)$	*f es cóncava hacia*
$-\infty < x < -2$	$x = -8$	$-\frac{1}{12} < 0$	abajo
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$\frac{4}{9} > 0$	arriba
$0 < x < +\infty$	$x = 8$	$-\frac{5}{36} < 0$	abajo

Entonces, la función f es cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(0, +\infty)$ y es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-2, 0)$.

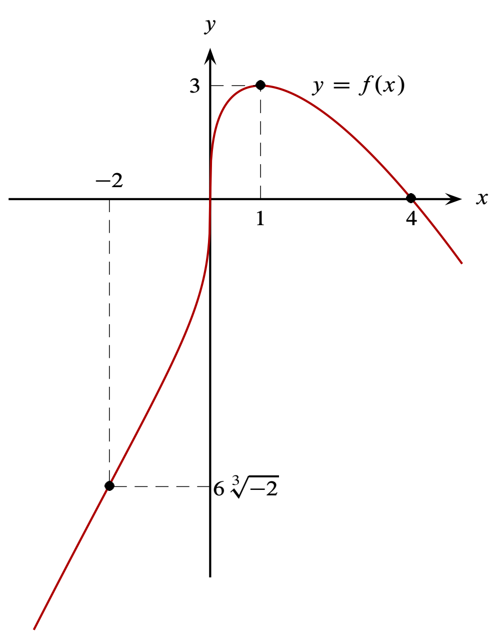
9. Puntos de inflexión:

La función f tiene cambios de concavidad en $x = -2$ y en $x = 0$; además es continua en dichos puntos. Por esto tiene puntos de inflexión en $x = -2$ y en $x = 0$. Las coordenadas de dichos puntos de inflexión son $[-2, f(-2)] = (-2, 6\sqrt[3]{-2}\,) \approx (-2, -7.56)$ y $[0, f(0)] = (0, 0)$.

Es importante notar que en $x = 0$ la función f es continua, no es derivable y tiene un punto de inflexión. De hecho tiene tangente vertical, pues:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{(4-h)h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{4-h}{h^{\frac{2}{3}}} = \text{“}\left(\frac{4}{0^+}\right)\text{”} = +\infty\,.$$

10. Un bosquejo de la gráfica es el siguiente:



El máximo local resulta ser el máximo absoluto y $R_f = (-\infty, 3]$.

□

Ejercicios 9.1.1 *Soluciones en la página* **??**

Gráfica de una función polinomial.

1. Sea la función $f(x) = 1 - (x-3)^3$.

   Encuentre los extremos relativos y absolutos (si tiene), los intervalos donde sea creciente y donde sea decreciente, también calcule dónde es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo. Finalmente haga la gráfica.

2. Dada la función $f(x) = x^4 - 2x^3$, determinar:

   a. Puntos críticos y clasificación.
   b. Intervalos donde crece o bien decrece.
   c. Puntos de inflexión.
   d. Los intervalos de concavidad.
   e. Gráfica de f.

3. Para la función $h(x) = x^4 - 8x^2 + 18$, encuentre:

   a. Los intervalos en los cuales h es creciente o bien decreciente.
   b. Los valores máximos y mínimos locales de h.
   c. Los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. Los puntos de inflexión.
   d. Bosqueje la gráfica de esa función.

4. Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + 1$.

   a. Encontrar los intervalos de monotonía de la función. Es decir, aquellos intervalos donde la función es creciente y aquellos donde es decreciente.

b. Encontrar los intervalos de concavidad de la función. Es decir, aquellos intervalos donde la función es cóncava hacia abajo y aquellos donde es cóncava hacia arriba.
c. Hacer un bosquejo de la gráfica de la función.

5. Para la función $f(x) = (x^2 - 4)^3$, determine:
   a. Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento. Los extremos relativos.
   b. Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo. Los puntos de inflexión.
   c. La gráfica.

6. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^4}{2} - x^2 + 3$.
   a. Determinar dominio, intervalos de continuidad y $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. (No determine las raíces de f.)
   b. Determine los puntos críticos y los intervalos de monotonía.
   c. Clasifique los puntos críticos (extremos) y determine los intervalos de concavidad.
   d. Obtenga los puntos de inflexión, la gráfica de f y el número de raíces de f. (No intente calcular las raíces de f.)

Ejercicios 9.1.2 *Soluciones en la página* **??**

Gráfica de una función racional.

1. Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{1 - x^2}$, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos críticos y su clasificación, así como los intervalos de concavidad hacia abajo y hacia arriba. Finalmente, con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función.

2. Para la función $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos críticos y su clasificación, así como los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. Finalmente, con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función.

3. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{(x-1)^2}$. Proporcione:
   a. El dominio de la función : D_f.
   b. Las raíces de la función.
   c. Los intervalos de monotonía.
   d. Los intervalos de concavidad.
   e. La gráfica de la función.

4. Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Proporcione:

a. El dominio de la función.
b. Los intervalos de monotonía.
c. Los intervalos de concavidad.
d. Los puntos de inflexión.
e. La gráfica de la función.

5. Considere la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$. Halle el dominio y las raíces de la función. Las asíntotas verticales y las horizontales. Los puntos críticos. Los intervalos de concavidad. Haga un bosquejo de esa función.

6. Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. Diga en qué intervalos es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo, determine los puntos de inflexión y grafique.

7. Dada la siguiente función: $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x - 2}$, determine los intervalos de monotonía de $f(x)$, los puntos extremos y grafique esa función.

8. Graficar la función $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$, determinando:
   a. Dominio, raíces y simetría.
   b. Asíntotas.
   c. Intervalos de monotonía.
   d. Intervalos de concavidad.
   e. Puntos críticos y su clasificación. Puntos de inflexión.

9. Sea la función $f(x) = -\dfrac{x^2}{(x - 5)^2}$.
   a. Encuentre los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   b. Encuentre los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad.
   c. Encuentre las asíntotas verticales y horizontales.
   d. Haga un bosquejo de la gráfica.

10. Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$, determine:
    a. Dominio, raíces y paridad.
    b. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
    c. Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo y puntos de inflexión.
    d. Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades.
    e. Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales.
    f. Máximos y mínimos relativos y absolutos.
    g. Esbozo gráfico y rango.

11. Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-4}$, determine:
   a. El dominio y las raíces de la función.
   b. Los intervalos en los cuales f es creciente o bien decreciente.
   c. Los valores máximos y mínimos locales de f.
   d. Los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.
   e. Las asíntotas verticales y horizontales.
   f. La gráfica de esa función.
12. Considere la función $f(x) = \dfrac{2x}{(2x-4)^2}$ y determine:
   a. El dominio, raíces e intervalos de continuidad.
   b. Asíntotas verticales y horizontales.
   c. Los intervalos de monotonía, los puntos máximos y mínimos (absolutos y relativos).
   d. Los intervalos de concavidad y puntos de inflexión.
   e. Bosquejo gráfico y rango.
13. Para la función $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x}$, determine:
   a. Dominio, raíces, paridad.
   b. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
   c. Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión.
   d. Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades.
   e. Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales.
   f. Máximos y mínimos relativos y absolutos.
   g. Esbozo gráfico y rango.
14. Para la función $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$, determine:
   a. Dominio, raíces, paridad.
   b. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
   c. Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión.
   d. Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades.
   e. Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales.
   f. Máximos y mínimos relativos y absolutos.
   g. Esbozo gráfico y rango.

Ejercicios 9.1.3 *Soluciones en la página* **??**

Gráfica de una función con radicales.

1. Sea $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}}$, determinar D_f; intervalos de monotonía y de concavidad; máximos y mínimos locales, y puntos de inflexión. Usando esta información, dibujar un esbozo de la gráfica de la función $f(x)$.

2. Sea $f(x) = \sqrt[5]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}$, determinar los intervalos de monotonía y de concavidad de f; máximos y mínimos locales, y puntos de inflexión.

   Usando esta información, esbozar la gráfica de f.

3. Considere la función $f(x) = 4x - \sqrt{2x-1}$. Determinar:

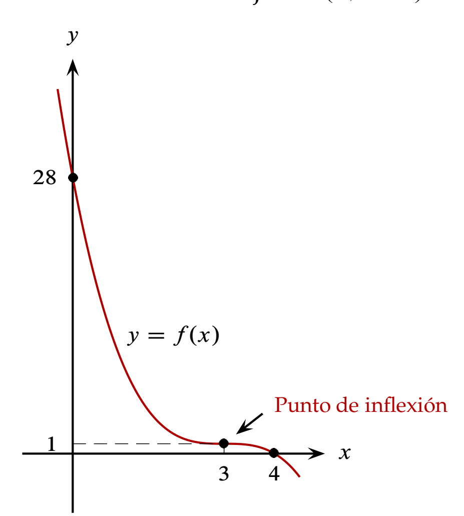
   a. Dominio, raíces, intervalos de continuidad.
   b. Intervalos de monotonía y puntos extremos.
   c. Intervalos de concavidad.
   d. Bosquejo gráfico. Proporcione el rango.

4. Grafique la función $f(x) = x^{\frac{1}{5}}(x+3)$ señalando claramente:

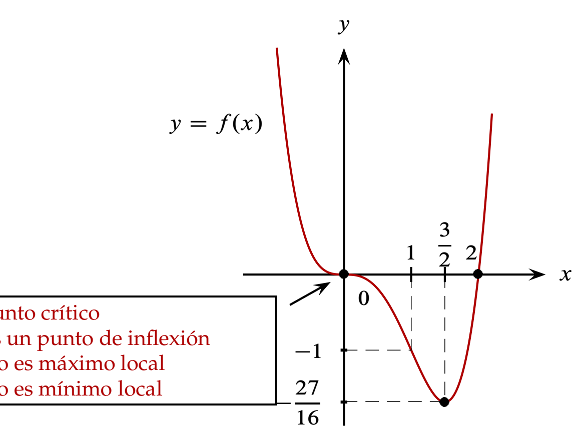
   a. Dominio y raíces.
   b. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   c. Máximos y mínimos relativos.
   d. Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo.
   e. Puntos de inflexión.
   f. Máximos y mínimos absolutos (si los hubiese).
   g. Gráfica de la función.

Ejercicios 9.1.1 *Gráfica de una función polinomial, página* **??**

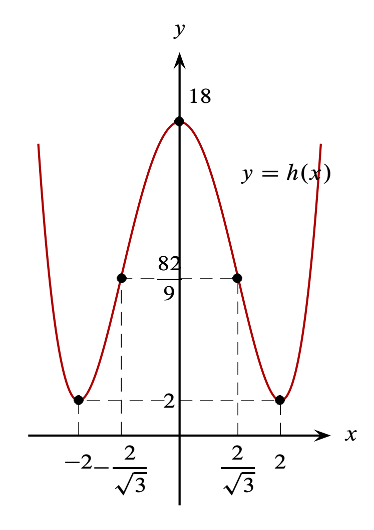
1. Decreciente en $\mathbb{R}$ y no tiene valores extremos;
   cóncava hacia arriba en $(-\infty, 3)$;
   cóncava hacia abajo en $(3, +\infty)$.



2. a. Puntos críticos: $x = 0$ & $x = \dfrac{3}{2}$;
   $x = \dfrac{3}{2}$ es un mínimo;
   b. decreciente en $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$;
   creciente en $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$;
   c. $I_1(0, 0)$ e $I_2(1, -1)$;
   d. cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$;
   cóncava hacia abajo en $(0, 1)$.
   e.

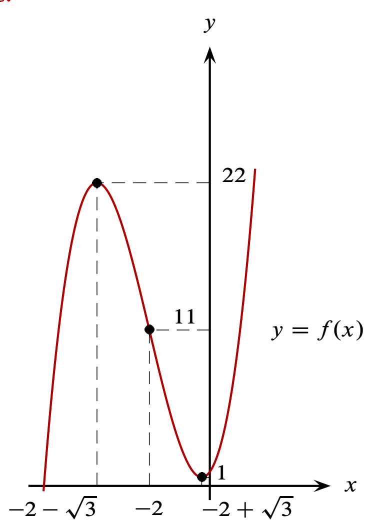


3. a. Crece en $(-2, 0)$ y en $(2, +\infty)$;
   decrece en $(-\infty, -2)$ y en $(0, 2)$;
   b. en $x = -2$ y en $x = 2$ hay mínimos locales;
   en $x = 0$ hay un máximo;
   c. cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ y en $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$;
   cóncava hacia abajo en $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$;
   en $x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y en $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ hay puntos de inflexión.
   d.



4. a. Crece en $\left(-\infty, -2 - \sqrt{3}\right)$ y en $\left(-2 + \sqrt{3}, +\infty\right)$;
   decrece en $\left(-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\right)$;
   b. cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$;
   cóncava hacia arriba en $(-2, +\infty)$;

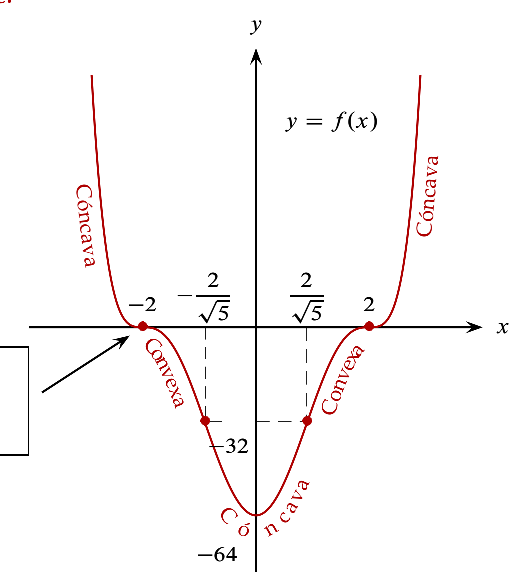
c.



5. a. Creciente en $[0, +\infty)$;
decreciente en $(-\infty, 0]$;
el único extremo relativo es $(0, -64)$, que es un mínimo;

b. cóncava hacia abajo en $\left(-2, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y en $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 2\right)$;
cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$, $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y en $(2, +\infty)$;
los puntos $(\pm 2, 0)$ y $\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{-16^3}{125}\right)$ son de inflexión.

c.

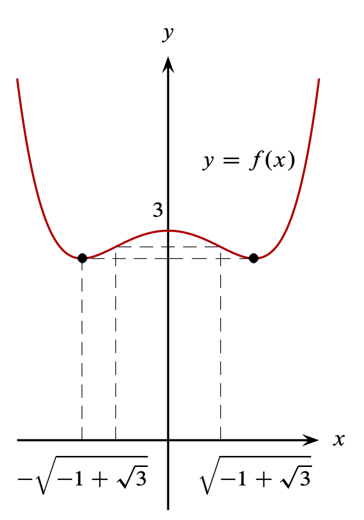


6. a. $D_f = \mathbb{R}$ donde f es continua;
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$;

b. $x \approx \pm 0.8555996$ & $x = 0$ son los puntos críticos;
creciente en $\left(-\sqrt{-1+\sqrt{3}}, 0\right)$ y en $\left(\sqrt{-1+\sqrt{3}}, +\infty\right)$;
decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{-1+\sqrt{3}}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{-1+\sqrt{3}}\right)$;

c. en $x \approx \pm 0.8555996$ hay un mínimo relativo;
en $x = 0$ hay un máximo relativo;
$f(x)$ es cóncava en
$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}, +\infty\right);$$
$f(x)$ es convexa en
$$\left(-\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}, \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right);$$

d.



puntos de inflexión: $(\pm 0.521325, 2.7684981)$;
no tiene raíces.

Ejercicios 9.1.2 *Gráfica de una función racional, página* **??**

1. En $x = 0$ hay punto crítico;

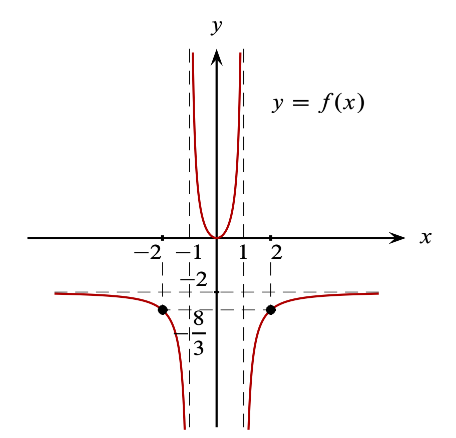
   crece en $(0, 1)$ y en $(1, +\infty)$;

   decrece en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, 0)$;

   $f(0) = 0$ es un mínimo relativo;

   cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$;

   cóncava hacia arriba en $(-1, 1)$;

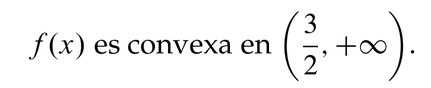


2. Los puntos críticos están en $x = 0$ y en $x = 1$;

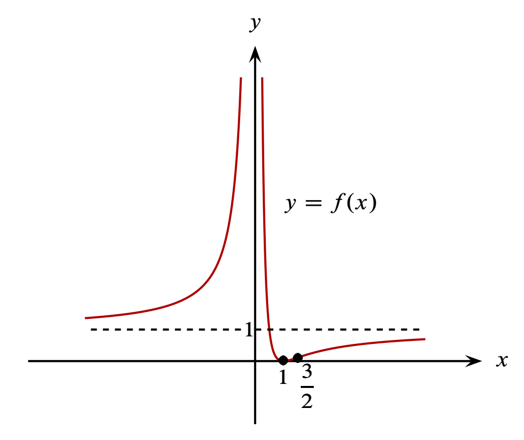
   crece en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$;

   decrece en $(0, 1)$;

   $f(x)$ es cóncava en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$;

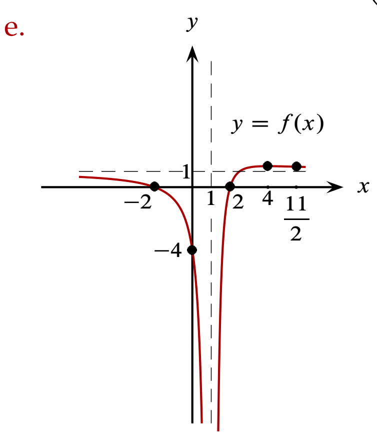


   $f(x)$ es convexa en $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.



3. a. $D_f = R - \{1\}$;
   b. las raíces: $\{-2, 2\}$;
   c. decreciente en: $(-\infty, 1]$ y en $(4, +\infty)$;
      creciente en: $(1, 4)$;
   d. cóncava hacia abajo en: $(-\infty, 1) \bigcup \left(1, \dfrac{11}{2}\right)$;

      cóncava hacia arriba en: $\left(\dfrac{11}{2}, +\infty\right)$.
   e.

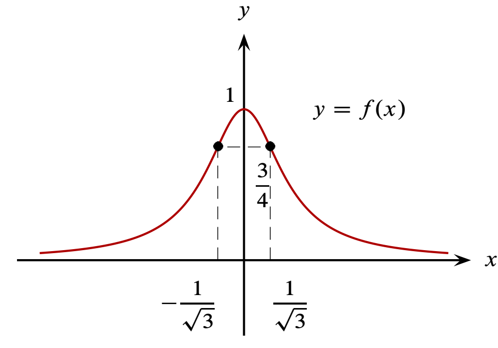


4. a. $D_f = R$;
   b. creciente en: $(-\infty, 0)$;
      decreciente en: $(0, +\infty)$;

c. cóncava hacia arriba en:
$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \bigcup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$;
cóncava hacia abajo en:
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

d. $I_1 \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ e $I_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

e.



5. Puntos críticos: $x = 3$ & $x = -3$;

crreciente en $(-3, 0)$ y en $(0, 3)$;

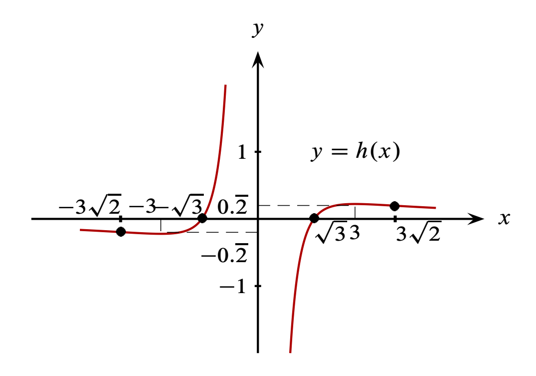
decreciente en $(-\infty, -3)$ y en $(3, +\infty)$;

en $x = -3$ hay un mínimo y en $x = 3$ hay un máximo;

$h(x)$ es cóncava hacia arriba en $\left(-3\sqrt{2}, 0\right) \bigcup \left(3\sqrt{2}, +\infty\right)$;

$h(x)$ es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -3\sqrt{2}\right) \bigcup \left(0, 3\sqrt{2}\right)$;

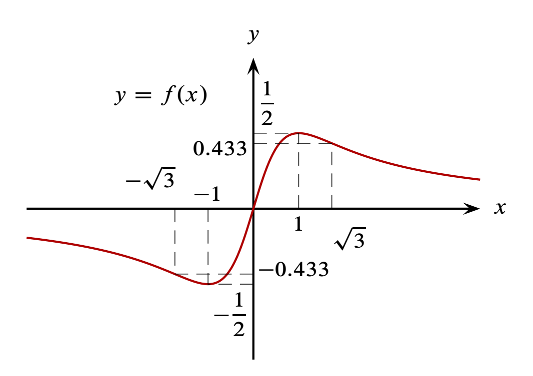
los puntos $\left(-3\sqrt{2}, \frac{-5}{18 \times \sqrt{2}}\right)$ y $\left(3\sqrt{2}, \frac{5}{18 \times \sqrt{2}}\right)$ son de inflexión.



6. Hay puntos de inflexión en $x = 0$ & $x = \pm\sqrt{3}$;

convexa en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{3}\right)$;

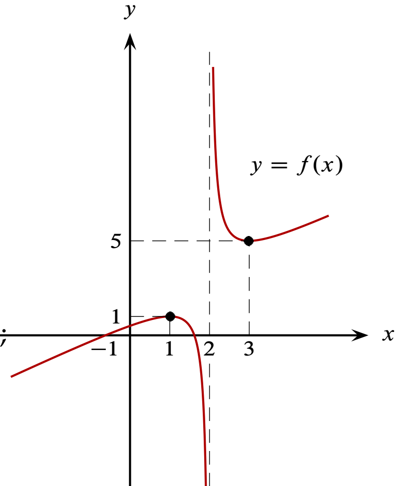
cóncava en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y en $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.



7. $f(x)$ es creciente en: $(-\infty, 1)$ y en $(3, +\infty)$;

decreciente en: $(1, 2)$ y en $(2, 3)$;

hay puntos críticos en $x = 1$ y en $x = 3$.



8. a. $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$;

tiene una raíz en $x = 0$. Es impar;

b. $x = -1$ & $x = 1$ son asíntotas verticales;

$y = 0$ es asíntota horizontal;

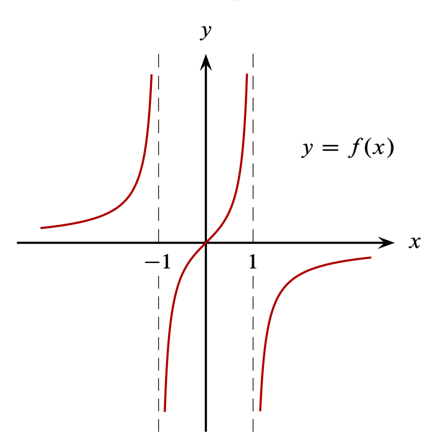
c. creciente en $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y en $(1, +\infty)$;

d. cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1) \bigcup (0, 1)$;

cóncava hacia abajo en $(-1, 0) \bigcup (1, +\infty)$;

e. no tiene puntos críticos;

$(0, 0)$ es un punto de inflexión.

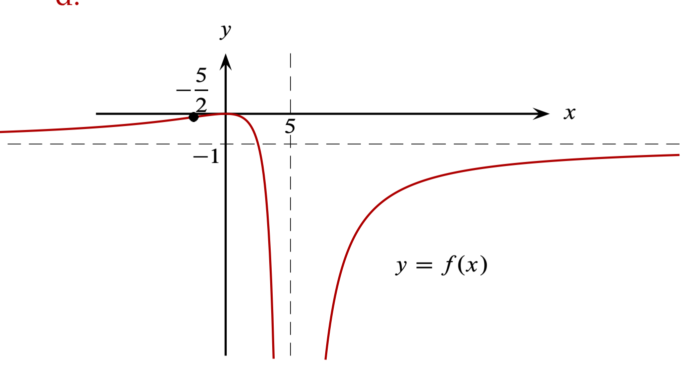


9. a. Punto crítico: $x = 0$;
creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(5, +\infty)$;
decreciente en $(0, 5)$;

b. cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\dfrac{5}{2}\right)$;
cóncava hacia abajo en $\left(-\dfrac{5}{2}, 5\right)$ y en $(5, +\infty)$;
en $x = -\dfrac{5}{2}$ hay un punto de inflexión;

c. $x = 5$ es asíntota vertical;
$y = -1$ es asíntota horizontal.

d.



10. a. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$; raíz: $x = -1$; no es par ni impar;

b. creciente en $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$;
decreciente en $\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$ y en $(0, +\infty)$;

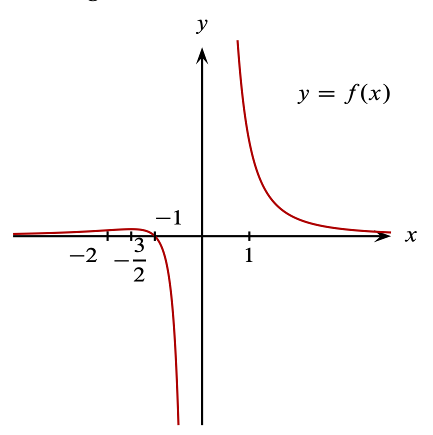
c. cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$ y en $(0, +\infty)$;
cóncava hacia abajo en $(-2, 0)$;
punto de inflexión en $x = -2$;

d. f es continua en $(-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$;
f tiene una discontinuidad esencial infinita en $x = 0$;

e. $x = 0$ es asíntota vertical;
$y = 0$ es asíntota horizontal;

f. en $x = -\dfrac{3}{2}$ hay un punto máximo local estricto;
f no tiene máximo ni mínimo absoluto;

g. el rango de f es $\mathbb{R}$.



11. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$; raíz $x = 0$;

b. creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, 0)$;
decreciente en $(0, 2)$ y en $(2, +\infty)$;

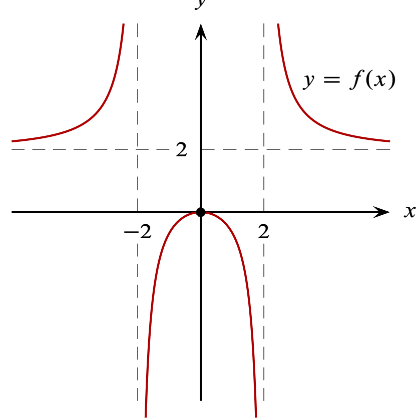
c. en $x = 0$ hay un máximo local;

d. cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$;

e. cóncava hacia abajo en $(-2, 2)$;

f. asíntotas verticales: $x = 2$ & $x = -2$;
asíntota hotizontal: $y = 2$.

g.



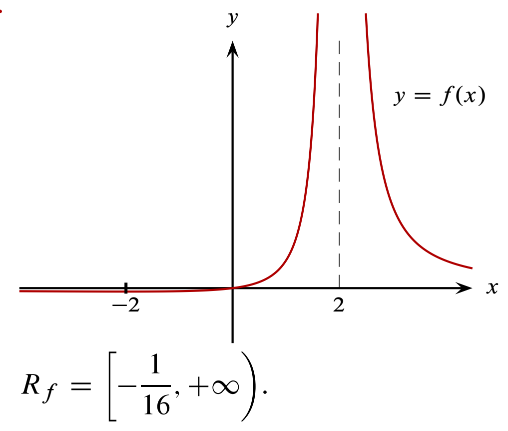
12. a. $D_f = \mathbb{R} - \{ 2 \}$;
raíz: $x = 0$;
$f(x)$ es continua en su dominio;

b. $y = 0$ es asíntota horizontal;
$x = 2$ es asíntota vertical;

c. creciente en $(-2, 2)$;
decreciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$;
f no tiene máximo relativo ni absoluto;
en $x = -2$ hay un mínimo local que es absoluto;

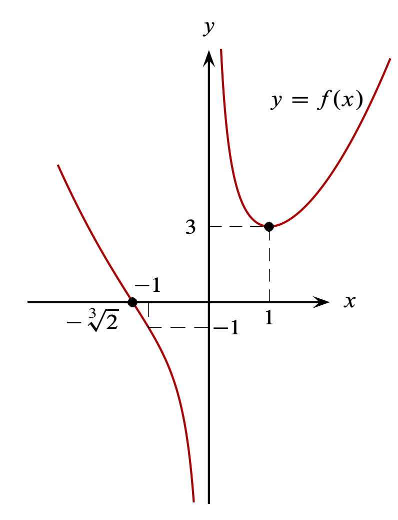
d. cóncava hacia abajo en $(-\infty, -4)$;
cóncava hacia arriba en $(-4, 2)$ y en $(2, +\infty)$;
en $x = -4$ hay un punto de inflexión;

e.



$R_f = \left[-\frac{1}{16}, +\infty\right)$.

g.



El rango: $R_f = \mathbb{R}$.

13. a. Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$;
raíz: $x = -\sqrt[3]{2}$;
no es ni par ni impar;

b. decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $x \in (0, 1)$;
creciente en $(1, +\infty)$;

c. cócava hacia arriba en $\left(-\infty, -\sqrt[3]{2}\right) \bigcup (0, +\infty)$;
cócava hacia abajo en $\left(-\sqrt[3]{2}, 0\right)$;
$x = -\sqrt[3]{2}$ punto de inflexión;

d. la función es continua en todo su dominio;
en $x = 0$ tiene una discontinuidad esencial;

e. $x = 0$ es una asíntota vertical;
no tiene asíntotas horizontales;

f. $x = 1$ es un mínimo local;
no existen máximos ni mínimos absolutos.

14. a. Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$;

raíz: $x = 0$;

no es par ni es impar;

b. decreciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$;

creciente en $(-1, 1)$;

c. cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$;

cóncava hacia arriba en $(-2, +\infty)$;

en $x = -2$ hay un punto de inflexión;

d. continua en su dominio $\mathbb{R} - \{1\}$;

en $x = 1$ hay una discontinuidad esencial infinita;

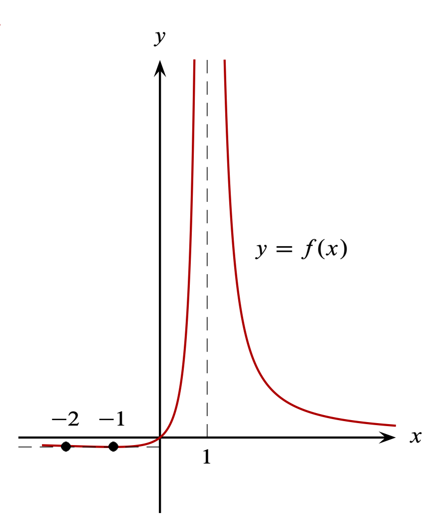
e. $y = 0$ es asíntota horizontal de $f(x)$;

$x = 1$ es asíntota vertical de $f(x)$;

f. en $x = -1$ hay un mínimo local que es un mínimo absoluto;

no tiene máximo absoluto;

g.



rango: $R_f = \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$.

Ejercicios 9.1.3 *Gráfica de una función con radicales, página* **??**

1. $D_f = \mathbb{R}$;

   crece en $(-\infty, -3)$, en $(-1, 0)$ y en $(0, +\infty)$;

   decrece en $(-3, -1)$;

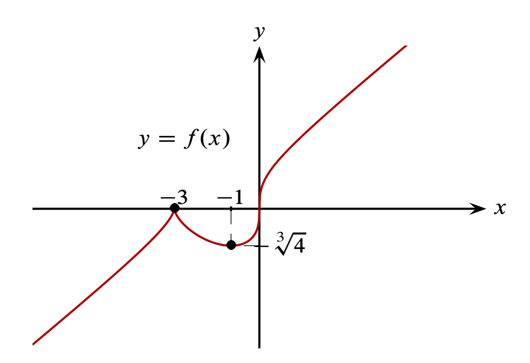
   cóncava hacia arriba en $(-\infty, -3)\bigcup(-3, 0)$;

   cóncava hacia abajo en $(0, +\infty)$;

   puntos críticos en $x = 0$, $x = -1$ y en $x = -3$;

   en $x = -1$ hay un mínimo. En $x = -3$ hay un máximo;

   hay punto de inflexión en $x = 0$.



2. Creciente en $(0, 0.32411)$;

   decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0.32411, +\infty)$;

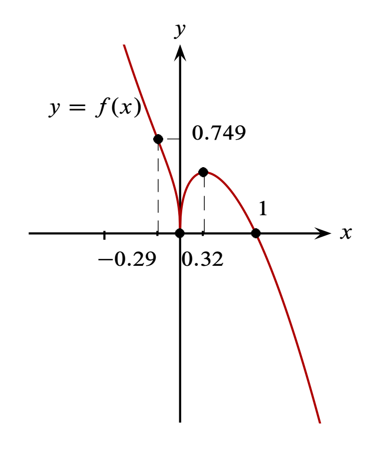
   cóncava hacia arriba en $(-\infty, -0.298242)$;

   cóncava hacia abajo en $(-0.298242, 0)\bigcup(0, +\infty)$;

   $(0, 0)$ es un mínimo local;

   $(0.484273, 0.1529285)$ es un máximo local;

   $(-0.298242, 0.7494817)$ es punto de inflexión.



3. a. $D_f = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$; no tiene raíces;

   es continua en todo su dominio;

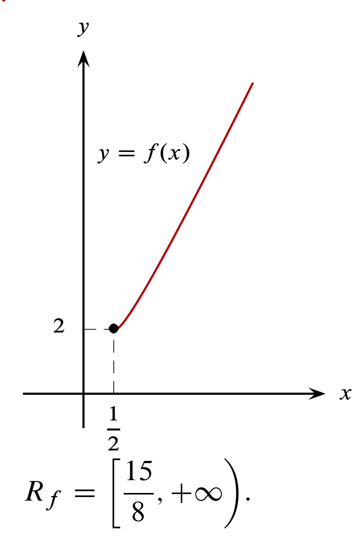
   b. creciente en $\left(\dfrac{17}{32}, +\infty\right)$;

   decreciente en $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{17}{32}\right)$;

   el punto crítico único: $\left(\dfrac{17}{32}, \dfrac{15}{8}\right)$ es un mínimo absoluto;

   c. la función es cóncava hacia arriba.

d.



$R_f = \left[\frac{15}{8}, +\infty\right)$.

4. a. Dominio: $D_f = \mathbb{R}$;
raíces: $x = 0$ & $x = -3$;

b. decreciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$;
creciente en $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$;

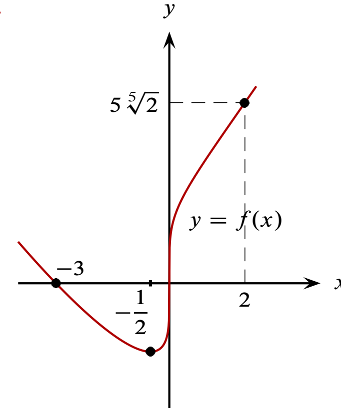
c. $x = -\frac{1}{2}$ es un mínimo local;

d. cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0) \bigcup (2, +\infty)$;
cóncava hacia abajo en $(0, 2)$;

e. $(0, 0)$ y $(2, 5\sqrt[5]{2}) \approx (2, 5.74)$ son puntos de inflexión;

f. en $x = -\frac{1}{2}$ tiene un mínimo absoluto;
$f(x)$ no tiene máximo absoluto.

g.



CAPÍTULO

9

Gráfica de una función

[1]

9.2 Interpretación de gráficas y símbolos

Con la finalidad de reafirmar la relación existente entre el contenido de un concepto, la notación simbólica utilizada para representarlo y la interpretación gráfica de dicho concepto, mediante ejemplos, trataremos de inducir al lector para que lleve a cabo actividades importantes como son las siguientes:

- A partir de la gráfica de una función f desconocida, obtener información sobre características relevantes de dicha función f.
- A partir de condiciones impuestas mediante notación simbólica a una función, bosquejar una posible gráfica de dicha función.
- A partir de la gráfica de f' o bien de f'', obtener información sobre algunas características de la función f.

Para el éxito de estas actividades se debe tener claridad en los conceptos, en las notaciones simbólicas utilizadas para representarlos y en las interpretaciones gráficas asociadas a dichos conceptos.

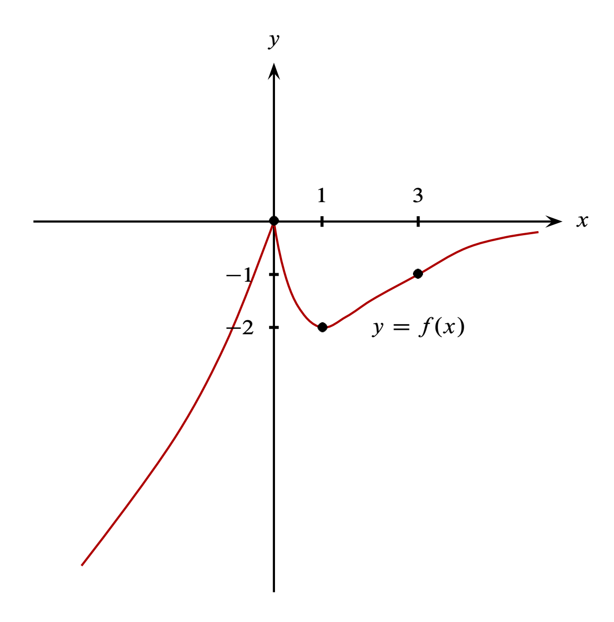
Ejemplo 9.2.1 *Bosquejar la gráfica de una función continua f que satisfaga las condiciones siguientes:*

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;
3. $f(0) = 0$;
4. $f(1) = -2$;
5. $f(3) = -1$;
6. $f'(0)$ *no existe;*
7. $f'(1) = 0$;
8. $f''(3) = 0$;
9. $f'(x) > 0$ *si* $x \in (-\infty, 0) \bigcup (1, +\infty)$;

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

10. $f'(x) < 0$ *si* $x \in (0, 1)$;
11. $f''(x) > 0$ *si* $x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, 3)$;
12. $f''(x) < 0$ *si* $x \in (3, +\infty)$.

▼ Una gráfica posible de la función $f(x)$ es

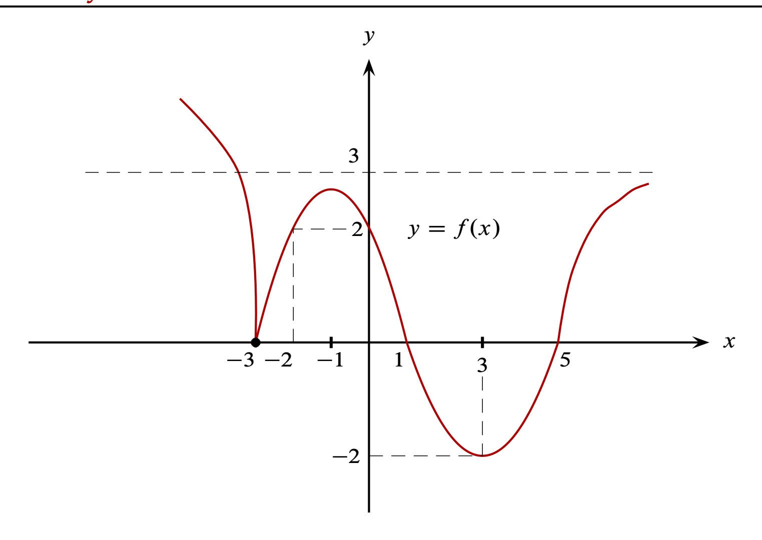


□

Ejemplo 9.2.2 *Bosquejar la gráfica de una función continua $f(x)$ que satisfaga todas las condiciones siguientes:*

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$;
3. $f(-3) = 0$;
4. $f(-2) = 2$;
5. $f(1) = 0$;
6. $f(3) = -2$;
7. $f(5) = 0$;
8. $f'(-3)$ *no existe*;
9. $f'(-1) = 0$;
10. $f'(3) = 0$;
11. $f'(x) < 0$ *si* $x \in (-\infty, -3) \bigcup (-1, 3)$;
12. $f'(x) > 0$ *si* $x \in (-3, -1) \bigcup (3, +\infty)$;
13. $f''(x) < 0$ *si* $x \in (-\infty, -3) \bigcup (-3, 1) \bigcup (5, +\infty)$;
14. $f''(x) > 0$ *si* $x \in (1, 5)$.

▼ Una posible gráfica de la función $f(x)$:



□

Ejemplo 9.2.3 *En la figura siguiente se muestra la gráfica de la temperatura T como función del tiempo t, en un periodo de dos días de primavera en la ciudad de Monterrey, empezando desde las 0 horas del primer día. Conteste lo siguiente:*

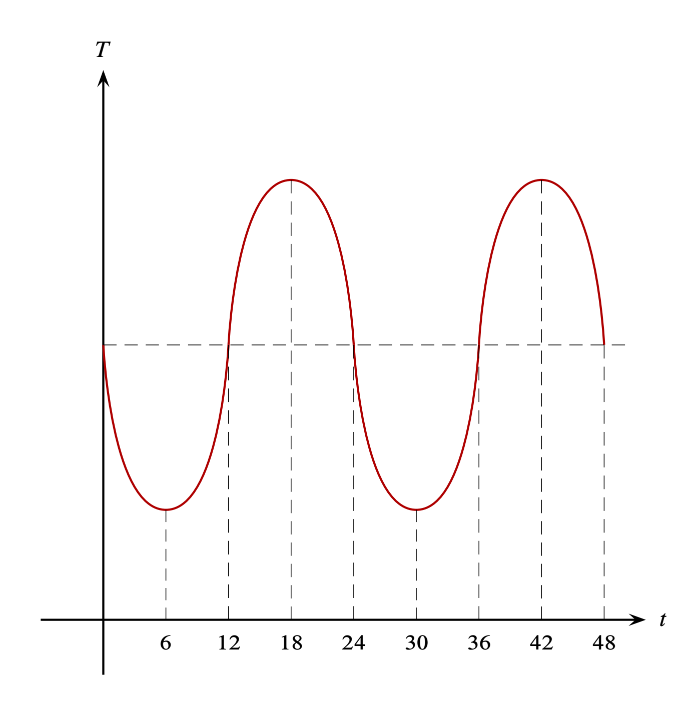
1. *¿En qué intervalos de tiempo la razón de cambio T con respecto a t es positiva?*

2. *¿En qué intervalos de tiempo la temperatura está bajando?*

3. *¿En qué intervalos la gráfica es cóncava hacia arriba y en cuáles hacia abajo?*

4. *¿En qué valores de t se localizan los puntos de inflexión y cómo los interpreta en términos de la temperatura?*

5. *Finalmente, explique con palabras el comportamiento de la temperatura durante los dos días.*



▼

1. $\dfrac{dT}{dt} > 0$ en los intervalos de tiempo $(6, 18)$ y $(30, 42)$.

2. T decrece en los intervalos $(0, 6)$, $(18, 30)$ y $(42, 48)$.

3. La gráfica de T es cóncava hacia arriba en los intervalos $(0, 12)$ y $(24, 36)$.

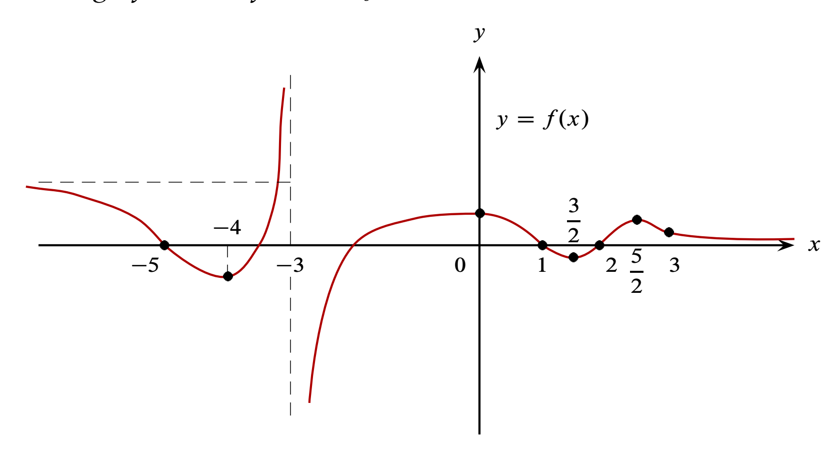
   La gráfica de T es cóncava hacia abajo en los intervalos $(12, 24)$ y $(36, 48)$.

4. Los puntos de inflexión están en $t = 12$, $t = 24$ y en $t = 36$. En estos puntos la razón de cambio $\dfrac{dT}{dt}$ pasa de crecer (12 y 36) a decrecer (24).

5. Durante el segundo día, la temperatura tiene el mismo comportamiento (iguales características) que durante el primer día. La temperatura mínima a las seis de la mañana y la máxima a las seis de la tarde.

□

Ejemplo 9.2.4 *Considere la gráfica de la función f:*



Determinar el conjunto de $x \in D_f$ tales que:

1. $f'(x) > 0$, $f'(x) = 0$, $f'(x) < 0$.

2. $f''(x) > 0$, $f''(x) = 0$, $f''(x) < 0$.

▼

1. $f'(x) > 0$ si $x \in (-4, -3) \bigcup (-3, 0) \bigcup \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$;

   $f'(x) = 0$ si $x \in \left\{-4, 0, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right\}$;

   $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -4) \bigcup \left(0, \dfrac{3}{2}\right) \bigcup \left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

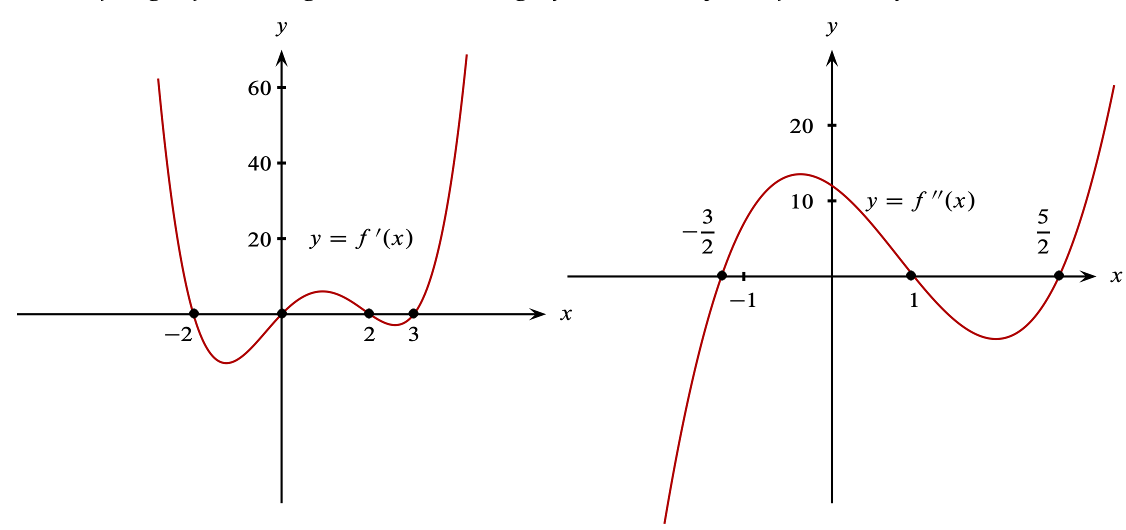
2. $f''(x) > 0$ si $x \in (-5, -3) \bigcup (1, 2) \bigcup (3, +\infty)$;

   $f''(x) = 0$ si $x \in \{-5, 1, 2, 3\}$;

   $f''(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -5) \bigcup (-3, 1) \bigcup (2, 3)$.

□

Ejemplo 9.2.5 *Suponga que las siguientes son las gráficas de f' y f'' para una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*



A partir de las gráficas de f' y f'', determine para f: dónde es creciente y dónde es decreciente; sus intervalos de concavidad; máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión.

▼

1. Intervalos de monotonía:

   La función f es creciente en $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$ y $(3, +\infty)$. Es decir, $f'(x) > 0$ en ellos.

   La función f es decreciente $(-2, 0)$ y $(2, 3)$. Es decir, $f'(x) < 0$ ahí.

2. Intervalos de concavidad:

   La función f es cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ y en $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$. Es decir, $f''(x) > 0$ en ellos.

   La función f es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ y en $\left(1, \frac{5}{2}\right)$. Es decir, $f''(x) < 0$ ahí.

3. Máximos y mínimos:

   La función f tiene extremos en $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ y en $x = 3$.

   En $x = -2$ y en $x = 2$ hay máximos relativos [$f(x)$ pasa de creciente a decreciente].

   En $x = 0$ y en $x = 3$ hay mínimos relativos [$f(x)$ pasa de decreciente a creciente].

4. Puntos de inflexión:

   Hay puntos de inflexión en $x = -\frac{3}{2}$, $x = 1$ y en $x = \frac{5}{2}$ pues ahí f'' cambia de signo ($f'' = 0$ en ellos).

□

Ejercicios 9.2.1 *Soluciones en la página* **??**

Gráfica de una función sujeta a ciertas condiciones.

1. Bosquejar la gráfica de una función continua f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

a. $f(-4) = 0$;
b. $f'(-4) = -1$;
c. $f(-1) = -3$;
d. $f'(-1) = 0$;
e. $f(2) = 5$;
f. $f'(2) = 1$;
g. $f(0) = 0$;
h. $f'(0)$ no existe;
i. $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$;
j. $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -1)$;
k. $f'(x) > 0$ si $x \in [-1, +\infty) - \{0\}$;
l. $f''(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0)$;
m. $f''(x) < 0$ si $x \in (0, +\infty)$.

2. Dar un bosquejo de la gráfica de una función f que cumple los requisitos siguientes:

a. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -3$;
b. $\lim_{x\to -4} f(x) = 0$;
c. $\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$;
d. $f'(x) > 0$ para $x < -2$;
e. $f''(x) > 0$ para $x < -2$;
f. $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 0$;
g. $f(0) = -3$;
h. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$;
i. $f'(x) < 0$ para $-2 < x < 1$;
j. $f''(x) < 0$ para $-2 < x < 1$;
k. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$;
l. $f(3) = -1$;
m. $f'(3) = 0$;
n. $f'(x) < 0$ para $1 < x < 3$;
o. $f'(x) > 0$ para $x > 3$;
p. $f''(x) > 0$ para $1 < x < 5$;
q. $f(5) = 0$;
r. $f''(x) < 0$ para $x > 5$;
s. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

3. Dibuje una gráfica de una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

a. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2$;
b. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$;
c. $f(0) = -1$;
d. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$;
e. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$;
f. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$;
g. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 4$;
h. $f(-1) = -2$;
i. $f'(-1)$ no existe;
j. $f''(1) = 0$;
k. $f''(x) < 0$ para $0 < x < 1$;
l. $f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

4. Trace una posible gráfica para una función f continua en su dominio: $(-\infty, 5] - \{-2, 3\}$ que satisfaga,

- $f(5) = 3$;
- $f(1) = \frac{1}{2}$;
- $\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$;
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$;

- $f'(1) = 0$;
- $f'(2) = 0$;
- $f'(4) = 0$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -2)$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (1, 4) - \{3\}$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (-2, 1)$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (4, 5)$.

Especifique los intervalos de concavidad de su gráfica, los máximos y mínimos locales, y absolutos.

5. Trace una posible gráfica para una función f continua en su dominio: $[-4, +\infty) - \{-3, 2\}$ y que satisfaga:

- $f(-4) = 2$;
- $f(1) = -1$;
- $\lim_{x \to -3} f(x) = 3$;
- $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$;

- $f'(-2) = 0$;
- $f'(-1) = 0$;
- $f'(1) = 0$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (-4, -2) - \{-3\}$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (-2, 1) - \{-1\}$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (1, 2)$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (2, \infty)$.

Especifique los intervalos de concavidad de su gráfica y los máximos y mínimos locales y absolutos.

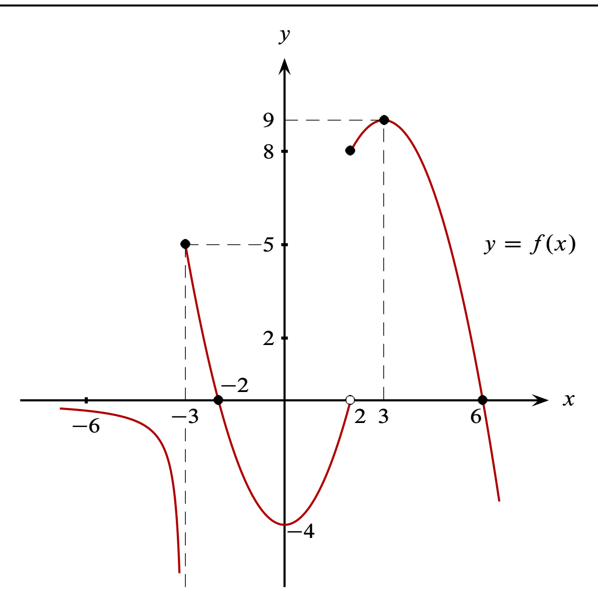
6. Dar un bosquejo de la gráfica de una función f que cumpla las siguientes condiciones:

- $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -2) \bigcup (-2, 4)$;
- $f'(x) < 0$ para $x \in (4, +\infty)$;
- tiene asíntota vertical en $x = -2$;
- $y = 1$ es asíntota horizontal de f.

Ejercicios 9.2.2 *Soluciones en la página* **??**

Interpretar la gráfica de una función.

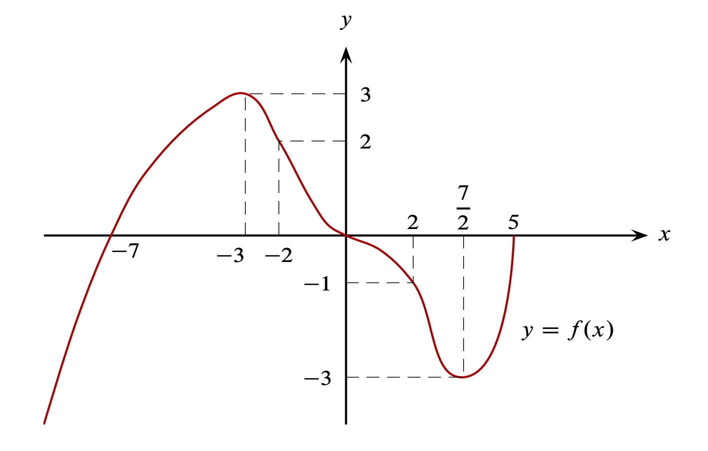
1. Considere la siguiente gráfica de la función f



y determine:

a. Los puntos donde la derivada no existe.
b. Los puntos donde $f'(x) = 0$.
c. Los intervalos donde $f'(x) > 0$.
d. Los intervalos donde $f'(x) < 0$.
e. Los intervalos donde $f''(x) > 0$.
f. Los intervalos donde $f''(x) < 0$.

2. Si la gráfica de f es

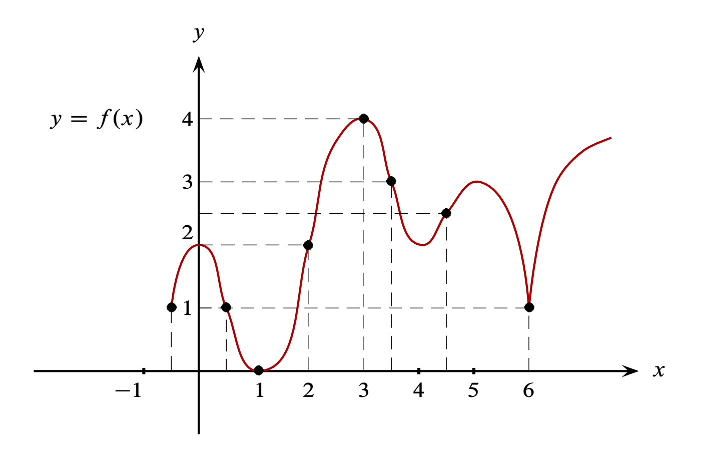


halle:

a. Dominio, raíces, paridad y rango.
b. Monotonía, máximos y mínimos locales y absolutos.
c. Concavidad y puntos de inflexión.
d. Intervalos donde $f'(x) > 0$, donde $f'(x) < 0$, donde $f''(x) > 0$ y donde $f''(x) < 0$.

e. Puntos donde $f'(x) = 0$ e intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$.

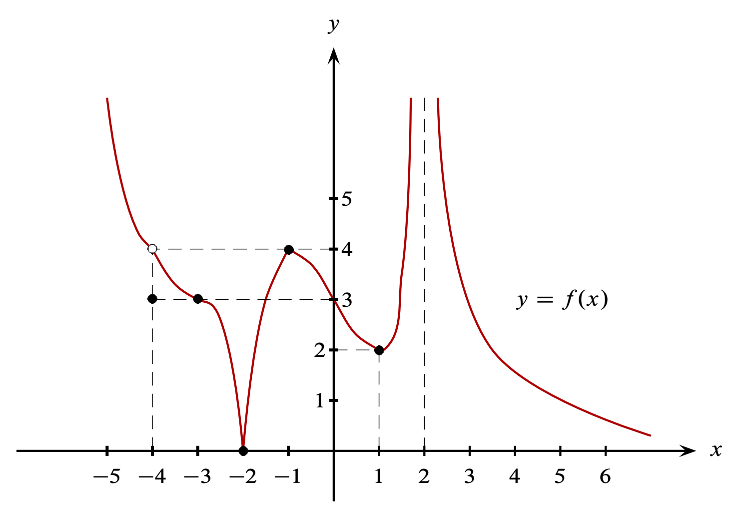
3. A partir de la gráfica dada de f, cuyo dominio es $[-0.5, \infty)$



determine:

a. Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento.
b. Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo.
c. Los máximos y mínimos relativos, los máximos y mínimos absolutos, y los puntos de inflexión.

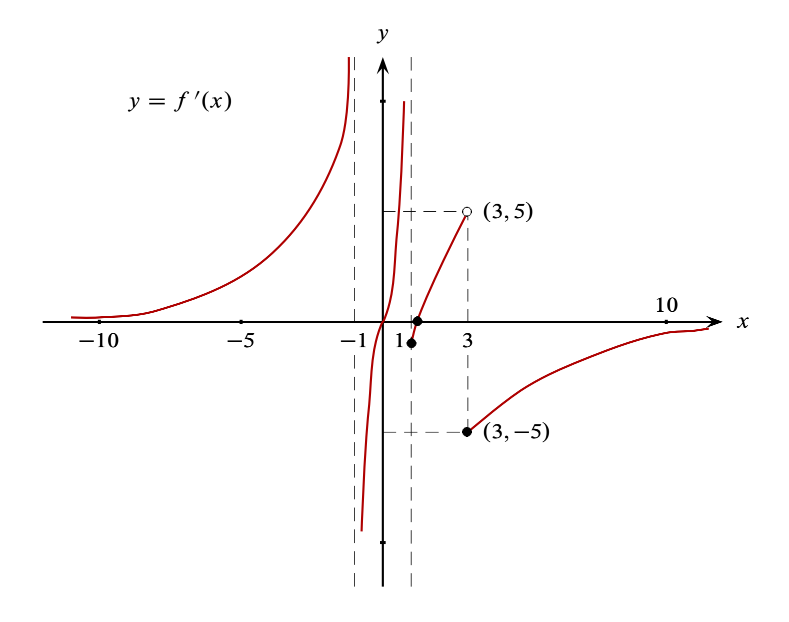
4. A partir de la gráfica de f



determine el conjunto de puntos del dominio de f que satisfacen:

a. $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$.
b. $f'' > 0$, $f''(x) < 0$, $f''(x) = 0$.
c. $f'(x)$ no existe.

5. La figura siguiente muestra la gráfica de la derivada de una función f la cual es continua en todos los reales.



A partir de ella, determine:

a. Intervalos donde f es creciente o decreciente.

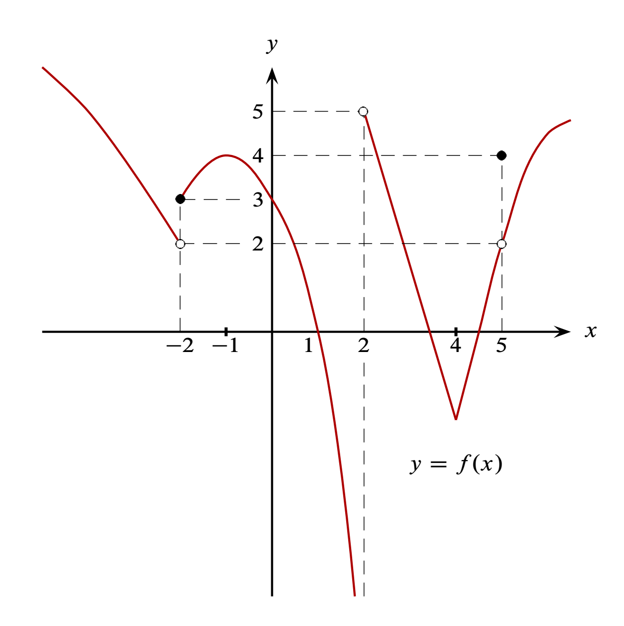
b. Puntos críticos de f.

c. Extremos relativos de f.

d. Concavidad de f.

e. Abscisas de los puntos de inflexión de f.

6. Sea f la función que tiene la siguiente gráfica



determine:

a. Los intervalos de continuidad y los siguientes valores

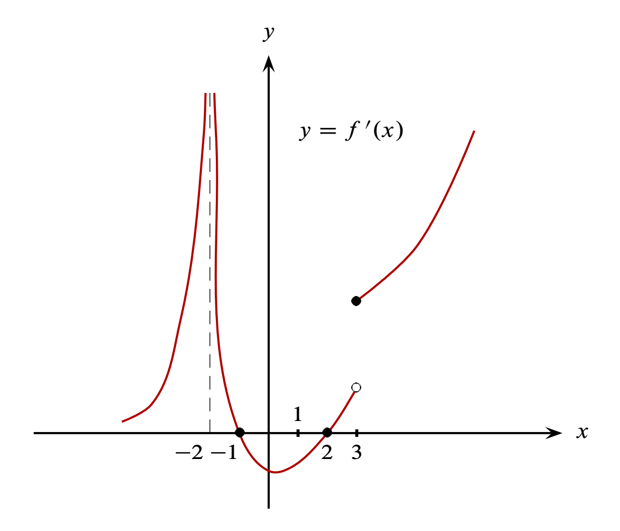
$$\lim_{x \to a^-} f(x), \ \lim_{x \to a^+} f(x), \ \lim_{x \to a} f(x) \ \& \ f(a)$$

para $a = -2, a = 2, a = 5$.

b. La clasificación de discontinuidades. ¿En cuáles puntos y con qué valores se puede redefinir $f(x)$ para convertirla en una función continua en esos puntos?

c. Los intervalos donde $f' > 0$, $f'(x) < 0$ y los puntos donde $f' = 0$, o donde no existe la derivada.

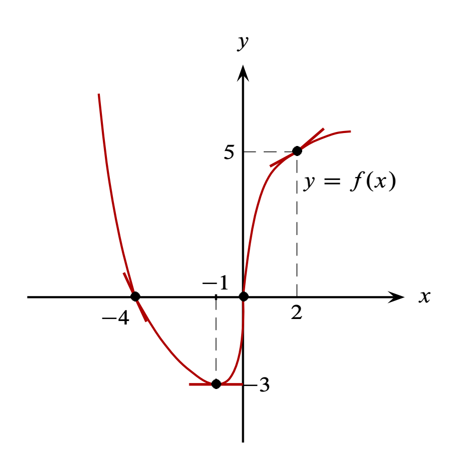
7. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ cuya primera derivada f' tiene la siguiente gráfica:



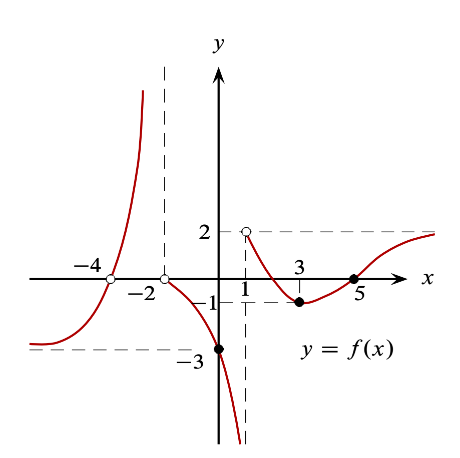
Determinar dónde la función f es creciente y dónde es decreciente. Explicar además, cómo es la tangente a la gráfica de f en $x = -2$, $x = -1$, $x = 2$ & $x = 3$.

Ejercicios 9.2.1 *Gráfica de una función sujeta a ciertas condiciones, página* **??**

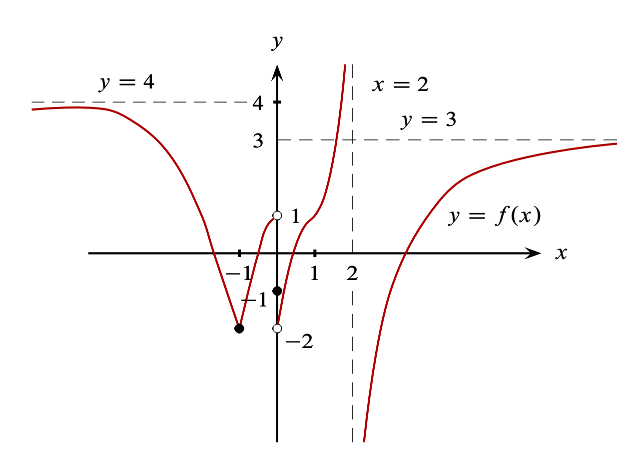
1.



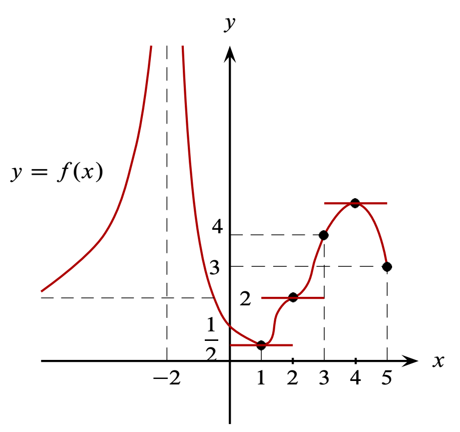
2.



3.



4.



Cóncava hacia arriba en $(-\infty,-2)\bigcup\left(-2,\dfrac{3}{2}\right)\bigcup(2,3)$;

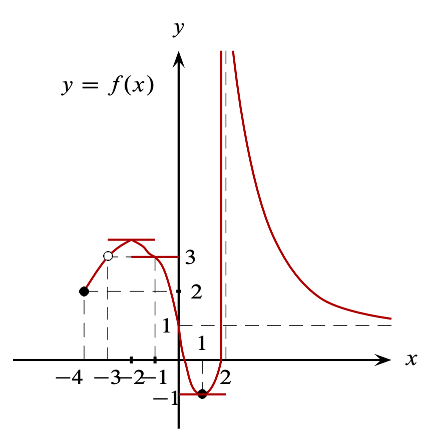
cóncava hacia abajo en $\left(\dfrac{3}{2},2\right)\bigcup(3,5)$;

en $x=1$ hay un mínimo local. Es mínimo absoluto;

en $x=4$ hay un máximo local;

no tiene máximos absolutos.

5.



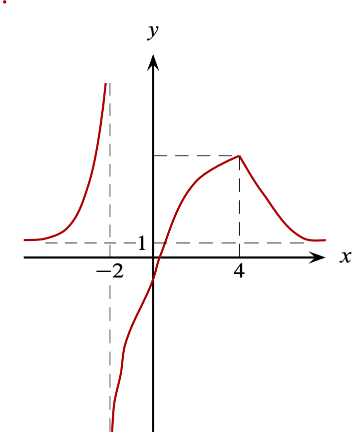
Cóncava hacia arriba en $\left(-\dfrac{3}{2},-1\right)$, $(0,2)$ y $(2,+.\infty)$;

cóncava hacia abajo en $\left(-4,-\dfrac{3}{2}\right)$, y en $(-1,0)$;

máximo local en $x=-2$;

mínimo local en $x=-1$ que es mínimo absoluto.

6.



Ejercicios 9.2.2 *Interpretar la gráfica de una función, página* **??**

1. a. $x = -3$ & $x = 2$;
   b. $x = 0$ & $x = 3$;
   c. $f' > 0$: $(0,2)$ y $(2,3)$;
   d. $f' < 0$: $(-\infty,-3)$, $(-3,0)$ y $(3,+\infty)$;
   e. $f'' > 0$: $(-3,2)$;
   f. $f'' < 0$: $(-\infty,-3)$ y $(2,+\infty)$.

2. a. $D_f = (-\infty, 5]$; raíces: $x = -7$, $x = 0$ & $x = 5$; no es par ni impar; $R_f = (-\infty, 3]$;
   b. creciente en $(-\infty,-3)$ y en $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$;
   decreciente en $\left(-3, \frac{7}{2}\right)$;
   máximo local en $(-3,3)$, es máximo absoluto;
   mínimo local en $\left(\frac{7}{2}, -3\right)$;
   no tiene mínimo absoluto;
   c. cóncava hacia arriba en $(-2,0)$ y en $(2,5)$;
   cóncava hacia abajo en $(-\infty,-2)$ y en $(0,2)$;
   $(-2,2)$, $(0,0)$ y $(2,-1)$ son puntos de inflexión;
   d. $f'(x) > 0$ en $(-\infty,-3)$ y en $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$;
   $f'(x) < 0$ en $(-3,0)$ y en $\left(0, \frac{7}{2}\right)$;
   $f''(x) > 0$ en $(-2,0)$ y en $(2,5)$;
   $f''(x) < 0$ en $(-\infty,-2)$ y en $(0,2)$;
   e. $f'(x) = 0$ en $(-3,3)$, en $(0,0)$ y en $\left(\frac{7}{2}, -3\right)$;
   $f(x) > 0$ en $(-7,0)$;
   $f(x) < 0$ en $(-\infty,-7)$ y en $(0,5)$.

3. a. Creciente en $[-0.5, 0]$, $[1,3]$, $[4,5]$ y en $[6,+\infty)$;
   decreciente en $[0,1]$, $[3,4]$ y en $[5,6]$;
   b. cóncava hacia arriba en $[0.5, 2]$ y en $[3.5, 4.5)$;
   cóncava hacia abajo en
   $[-0.5, 0.5]$, $[2, 3.5]$, $[4.5, 6]$ y $[6,+\infty)$;
   c. máximos relativos: $(0,2)$, $(3,4)$ y $(5,3)$
   mínimos relativos:
   $(-0.5, 1)$, $(1,0)$, $(4,2)$ y $(6,1)$;
   no tiene máximo absoluto y el mínimo absoluto es $(1,0)$;
   puntos de inflexión:
   $(0.5,1)$, $(2,2)$, $(3.5,3)$ y $(4.5, 2.5)$.

4. a. $f'(x) > 0$ en $(-2,-1) \bigcup (1,2)$;
   $f'(x) < 0$ en $(-\infty,-4) \bigcup (-4,-3) \bigcup (-3,-2) \bigcup \bigcup (-1,1) \bigcup (2,+\infty)$;
   $f'(x) = 0$ si $x = -3, -1$ o bien 1;
   b. $f'' > 0$ en $(-\infty,-4) \bigcup (-4,-3) \bigcup (0,2) \bigcup (2,+\infty)$;
   $f'' < 0$ en $(-3,-2) \bigcup (-2,0)$;
   $f'' = 0$ si $x = -3$ o bien $x = 0$;
   c. en $x = -4, -2$ & 2 no existe la derivada.

5. a. Creciente en $(-\infty,-1)$, $(0,1)$ y en $(1.2, 3)$;
   decreciente en $(-1,0)$, $(1, 1.2)$ y en $(3,+\infty)$;

b. puntos críticos: $x = 0$ & $x = 1.2$;

c. mínimo local estricto: $x = 0$ & $x = 1.2$;

d. cóncava hacia arriba: en $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 3)$ y en $(3, +\infty)$;

e. no tiene puntos de inflexión.

6. a. La función es continua en

$$(-\infty, -2) \bigcup [-2, 2) \bigcup (2, 5) \bigcup (5, +\infty) \ ;$$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ no existe; $f(-2) = 3$;

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe; $f(2)$ no está definido;

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 2$; $f(5) = 4$;

b. en $x = -2$ se tiene una discontinuidad de salto;

en $x = 2$ se tiene una discontinuidad esencial infinita;

en $x = 5$ se tiene una discontinuidad removible;

si redefinimos $f(5) = 2$, la función se hace continua en este punto;

c. $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -2)$, $(-1, 2)$ y en $(2, 4)$;

$f'(x) > 0$ en $(-2, -1)$ y en $(4, +\infty) - \{5\}$;

$f'(x) = 0$ en $x = -1$;

$f'(x)$ no existe en $x = -2$, $x = 2$, $x = 4$ ni en $x = 5$.

7. Creciente en $(-\infty, -2) \bigcup (-2, -1) \bigcup (2, +\infty)$;

decreciente en $(-1, 2)$;

en $x = -2$ hay tangente vertical;

en $x = -1$ hay tangente horizontal y un máximo local;

en $x = 2$ la tangente es horizontal y hay un mínimo local;

en $x = 3$ la tangente no existe. La gráfica tiene una discontinuidad de salto.

CAPÍTULO

10

Optimización

[1]

10.1 Problemas de optimización

Un problema de optimización consiste en minimizar o maximizar el valor de una variable. En otras palabras se trata de calcular o determinar el valor mínimo o el valor máximo de una función de una variable.
Se debe tener presente que la variable que se desea minimizar o maximizar debe ser expresada como función de otra de las variables relacionadas en el problema.
En ocasiones es preciso considerar las restricciones que se tengan en el problema, ya que éstas generan igualdades entre las variables que permiten la obtención de la función de una variable que se quiere minimizar o maximizar.
En este tipo de problemas se debe contestar correctamente las siguientes preguntas:

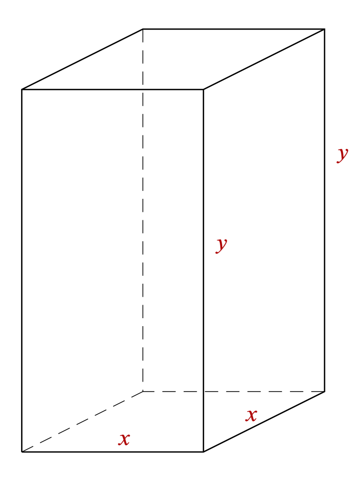
- ¿Qué se solicita en el problema?
- ¿Qué restricciones aparecen en el problema?

La respuesta correcta a la primera pregunta nos lleva a definir la función que deberá ser minimizada o maximizada.
La respuesta correcta a la segunda pregunta dará origen a (al menos) una ecuación que será auxiliar para lograr expresar a la función deseada precisamente como una función de una variable.

Ejemplo 10.1.1 *Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de* $50\ cm^3$*. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material que va a ser usado.*

▼ La siguiente figura representa la caja:

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



Volumen de la caja, según la figura:

$$V = x^2 y \ \& \ V = 50 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ 50 = x^2 y; \text{ esta igualdad relaciona las variables del problema.}$$

De esta ecuación podemos obtener y como función de x o viceversa, despejando la variable elegida.

El área de la caja sin tapa:

$$A = x^2 + 4xy\,.$$

Ésta es la cantidad de material que deseamos que sea mínima; vemos que es una función de dos variables.

Despejamos y de la restricción dada, esto es, de la fórmula del volumen:

$$y = \frac{50}{x^2}\,.$$

Sustituimos en el área y obtenemos una función de una sola variable:

$$A(x) = x^2 + 4x\left(\frac{50}{x^2}\right) = x^2 + \frac{200}{x} = x^2 + 200x^{-1}\,.$$

Derivando:

$$A'(x) = 2x - 200x^{-2} = 2x - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^3 - 200}{x^2};$$
$$A''(x) = 2 + 200\left(\frac{2}{x^3}\right) = 2 + \frac{400}{x^3} > 0\,.$$

Calculamos puntos críticos:

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 200 = 0 \Rightarrow x^3 = 100 \Rightarrow x = \sqrt[3]{100}\ \text{cm}.$$

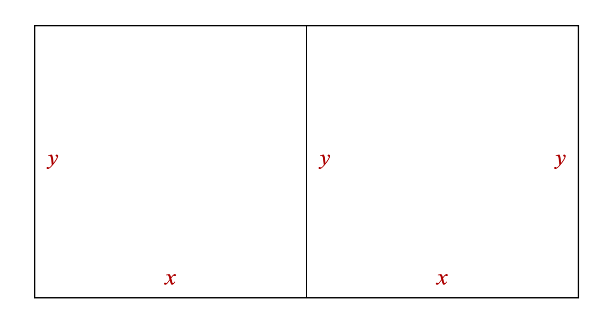
Es un mínimo absoluto pues $A''(x) > 0$ para cualquier $x > 0$. El valor correspondiente de la otra variable es

$$y = \frac{50}{100^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\frac{100}{100^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}100^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{100} = \frac{1}{2}x\ \text{cm}.$$

□

Ejemplo 10.1.2 *Un ranchero tiene* 300 *m de malla para cercar dos corrales rectangulares iguales y contiguos, es decir, que comparten un lado de la cerca. Determinar las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.*

▼ La siguiente figura representa los corrales contiguos:



Tenemos que el perímetro y el área de los corrales son, respectivamente:

$$P = 4x + 3y = 300 \quad \& \quad A = 2xy.$$

Pero como $y = \dfrac{300 - 4x}{3}$:

$$A(x) = \frac{2x(300 - 4x)}{3} = 200x - \frac{8}{3}x^2.$$

Derivando y obteniendo los puntos críticos:

$$A'(x) = 200 - \frac{16}{3}x = 0 \Leftrightarrow \frac{16}{3}x = 200 \Leftrightarrow x = \frac{3 \cdot 200}{16} = \frac{75}{2} \text{ es el punto crítico}$$

y como

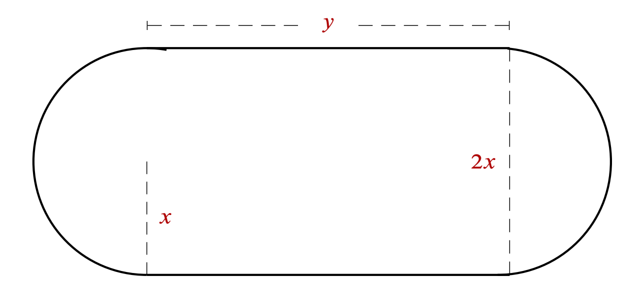
$$A''(x) = -\frac{16}{3} < 0, \text{entonces se trata de un máximo.}$$

El área máxima ocurre para $x = \dfrac{75}{2}$ m & $y = \dfrac{300 - 150}{3} = 50$ m, que son las dimensiones pedidas.

□

Ejemplo 10.1.3 *Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos en los extremos. Si el perímetro del terreno es de* 50 *m, encontrar las dimensiones del terreno para que tenga el área máxima.*

▼ El terreno lo representamos por la siguiente figura:



El área del terreno es

$$A = 2xy + \pi x^2 .$$

El perímetro, $P = 50$ m, está dado por $P = 2y + 2\pi x$, por lo que

$$2y + 2\pi x = 50 \Rightarrow y = \frac{50 - 2\pi x}{2} = 25 - \pi x.$$

Si sustituimos este valor en la fórmula del área, la tendremos expresada como función de una variable x:

$$A(x) = 2x(25 - \pi x) + \pi x^2 = 50x + x^2(\pi - 2\pi) = 50x - \pi x^2.$$

Su punto crítico se obtiene cuando $A'(x) = 0$. Esto es:

$$A'(x) = \left(50x - \pi x^2\right)' = 50 - 2\pi x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi}.$$

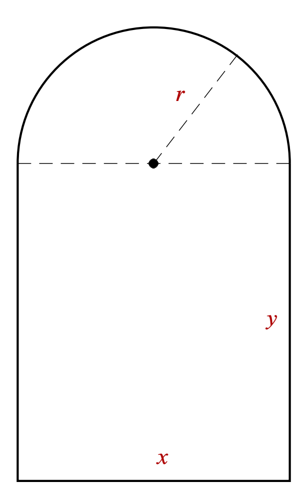
Como $A''(x) = -2\pi < 0$, se trata en efecto de un máximo; además $y = 25 - \pi\dfrac{25}{\pi} = 0$, es decir, el área máxima se obtiene cuando el terreno tiene la forma circular.

Éste fue un típico problema isoperimétrico, en el que se pide hallar una figura de área máxima teniendo el perímetro fijo, como se cuenta que se construyó la ciudad de Cartago sobre el máximo terreno que se pudiese abarcar con una cuerda hecha a partir de una piel de vaca.

□

Ejemplo 10.1.4 *Una ventana presenta forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana con área máxima, si su perímetro es de* 10 *m.*

▼ Un croquis de la ventana es el siguiente:



Si A es el área que deseamos que sea máxima y P es el perímetro de la ventana, entonces

$$A = xy + \frac{1}{2}\pi r^2 \ \& \ P = x + 2y + \pi r.$$

Pero debido a que $r = \dfrac{x}{2}$ y a que $P = 10$:

$$A = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \ \& \ 10 = x + 2y + \pi\left(\frac{x}{2}\right);$$
$$A = xy + \frac{\pi}{8}x^2 \ \& \ 10 = x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + 2y.$$

Es decir, tenemos una función de dos variables $\left(A = xy + \dfrac{\pi}{8}x^2\right)$ y una ecuación $\left[x\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right) + 2y = 10\right]$. De la ecuación despejamos la variable y para luego sustituirla en la función A.

$$\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x + 2y = 10 \ \Rightarrow \ 2y = 10 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x \ \Rightarrow \ y = \frac{1}{2}\left[10 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x\right] =$$
$$= \frac{10}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2+\pi}{2}\right)x \ \Rightarrow \ y = 5 - \frac{2+\pi}{4}x;$$

sustituyendo ahora en A:

$$A(x) = xy + \frac{\pi}{8}x^2 = x\left(5 - \frac{2+\pi}{4}x\right) + \frac{\pi}{8}x^2 = 5x - \frac{2+\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 =$$
$$= \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{2+\pi}{4}x^2 + 5x = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{2+\pi}{4}\right)x^2 + 5x =$$
$$= \frac{\pi - 2(2+\pi)}{8}x^2 + 5x = \frac{\pi - 4 - 2\pi}{8}x^2 + 5x =$$
$$= \frac{-\pi - 4}{8}x^2 + 5x \ \Rightarrow \ A(x) = -\frac{\pi + 4}{8}x^2 + 5x;$$

$A(x)$ es la función de la variable x que queremos maximizar. Derivando y calculando puntos críticos:

$$A'(x) = -\frac{\pi + 4}{8}(2x) + 5 = -\frac{\pi + 4}{4}x + 5;$$
$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi + 4}{4}x + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi + 4}{4}x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{20}{\pi + 4}.$$

Entonces, $A(x)$ tiene un punto crítico en $x_1 = \dfrac{20}{\pi + 4}$.

$$A'(x) = -\frac{\pi + 4}{4}x + 5 \Rightarrow A''(x) = -\frac{\pi + 4}{4} \text{ para cada } x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A''(x_1) = -\frac{\pi + 4}{4} \Rightarrow A''(x_1) < 0.$$

$A(x)$ tiene un máximo local estricto en $x_1 = \dfrac{20}{\pi + 4}$.

Entonces el área A de la ventana es máxima cuando $x = \dfrac{20}{\pi + 4}$ m, para la cual

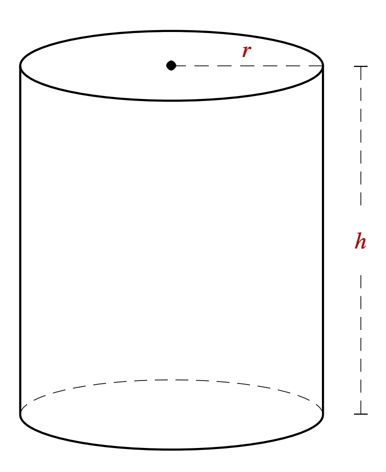
$$y = 5 - \frac{2 + \pi}{4}x = 5 - \left(\frac{\pi + 2}{4}\right)\left(\frac{20}{\pi + 4}\right) = 5 - \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 4} =$$
$$= 5\left(1 - \frac{\pi + 2}{\pi + 4}\right) = 5\left(\frac{\pi + 4 - \pi - 2}{\pi + 4}\right) = 5\left(\frac{2}{\pi + 4}\right) = \frac{10}{\pi + 4};$$

es decir, cuando $x = \dfrac{20}{\pi + 4}$ m y cuando $y = \dfrac{10}{\pi + 4}$ m. Vemos que $y = \dfrac{x}{2}$.

□

Ejemplo 10.1.5 *Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal con tapa que tenga una superficie total de 80 cm^2. Determine sus dimensiones de modo que tenga el mayor volumen posible.*

▼ La figura del cilindro es la siguiente:



Se desea maximizar el volumen $V = \pi r^2 h$ que depende de dos variables r & h.
Se sabe que el área total $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ debe ser igual a 80 cm^2.
Es decir, se sabe que $2\pi r^2 + 2\pi r h = 80$.
Tenemos entonces:

Una función $V = \pi r^2 h$;

Una ecuación $2\pi r^2 + 2\pi r h = 80$.

De la ecuación despejamos una de las variables (la que nos convenga) para sustituirla en la función. Conviene despejar h ya que para r se obtiene una ecuación cuadrática.

$$2\pi r^2 + 2\pi r h = 80 \Rightarrow \pi r^2 + \pi r h = 40 \Rightarrow \pi r h = 40 - \pi r^2 \Rightarrow h = \frac{40 - \pi r^2}{\pi r}.$$

Sustituyendo en V obtendremos el volumen V como función de una única variable: r
$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\dfrac{40 - \pi r^2}{\pi r}\right) = r(40 - \pi r^2) \Rightarrow V(r) = 40r - \pi r^3$ que es la función a maximizar.
Derivando y obteniendo puntos críticos:

$$\begin{aligned} V'(r) &= 40 - 3\pi r^2; \\ V'(r) &= 0 \Leftrightarrow 40 - 3\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{40}{3\pi} \approx 4.2441 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r = \pm\sqrt{4.2441} \approx \pm 2.0601. \end{aligned}$$

En el contexto del problema se ignora el valor negativo de r y sólo nos importa $r_1 \approx 2.0601$;

$$V'(r) = 40 - 3\pi r^2 \Rightarrow V''(r) = -6\pi r;$$
$$V''(r_1) = -6\pi r_1 \approx -6\pi(2.0601) < 0.$$

Por lo anterior, la función $V(r)$ tiene un máximo cuando $r = 2.0601$.
La altura h del cilindro entonces es

$$h_1 = \frac{40 - \pi r_1^2}{\pi r_1} \approx \frac{40 - \pi(2.0601)^2}{\pi(2.0601)} \approx 4.1203.$$

Por lo tanto, las dimensiones del cilindro con volumen máximo son

$$r_1 \approx 2.0601 \text{ cm } \ \& \ h_1 \approx 4.1203 \text{ cm}.$$

Observamos que $h_1 = 2r_1$, pues

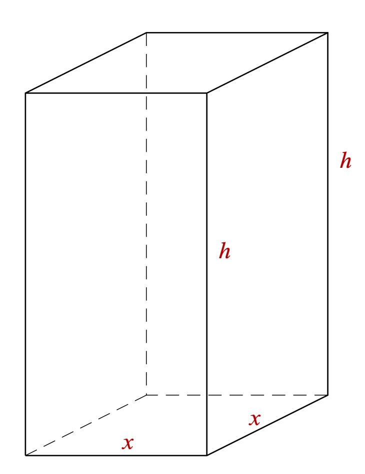
$$\frac{40 - \pi r_1^2}{\pi r_1} = 2r_1 \Leftrightarrow 40 - \pi r_1^2 = 2\pi r_1^2 \Leftrightarrow 40 = 3\pi r_1^2 \Leftrightarrow r_1^2 = \frac{40}{3\pi}, \text{ que es el caso.}$$

□

Ejemplo 10.1.6 *Se va a construir una cisterna rectangular con base y tapa cuadradas para almacenar* 12 000 $pies^3$ *de agua. Si el concreto para construir la base y los lados tiene un costo de* \$100 *por* pie^2 *y el material para construir la tapa cuesta* \$200 *por* pie^2 *¿cuáles son las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo de su construcción?*

▼ ¿Qué se quiere en el problema?
Determinar las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo de su construcción.
Suponiendo que las dimensiones de la cisterna son: x pies el lado de la base cuadrada y h pies su altura. ¿Cuál es el costo de su construcción?

La siguiente figura representa a la cisterna:



Para encontrar las dimensiones (x & h) que minimizan el costo de su construcción se necesita la expresión del costo de la cisterna. Usamos la tabla siguiente:

	Costo unitario (\$) por pie^2	*Área (pie*^{2}*)*	*Costo total* (\$)
Base	100	x^2	$100x^2$
Tapa	200	x^2	$200x^2$
Caras laterales	100	$4xh$	$400xh$
	Costo de la cisterna: $300x^2 + 400xh$		

El costo total de la contrucción de la cisterna es:

$$C = 300x^2 + 400xh \text{ pesos} .$$

En el problema aparece la siguiente restricción: el volumen de la cisterna debe ser igual a 12 000 pies^3, es decir, que $x^2h = 12\,000$.
Tenemos pues:
Una función $C = 300x^2 + 400xh$ y una ecuación $x^2h = 12\,000$.
De la ecuación despejamos una de las variables (la que más convenga) para sustituirla en la función. Conviene despejar h.

$$x^2h = 12\,000 \Rightarrow h = \frac{12\,000}{x^2} .$$

Sustituyendo en la función se obtiene

$$C = 300x^2 + 400xh = 300x^2 + 400x\left(\frac{12\,000}{x^2}\right) ;$$

$$C(x) = 300x^2 + \frac{4\,800\,000}{x} .$$

Ésta es la función (de una sola variable: x) que se quiere minimizar.

$$C(x) = 300x^2 + 4\,800\,000x^{-1} \Rightarrow C'(x) = 600x - 4\,800\,000x^{-2} .$$

Derivando y calculando sus puntos críticos:

$$C'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ 600x - \frac{4\,800\,000}{x^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ 600x = \frac{4\,800\,000}{x^2} \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ x^3 = \frac{4\,800\,000}{600} = 8\,000 \ \Leftrightarrow\ x = \sqrt[3]{8\,000} = 20\,.$$

Es decir, la función $C(x)$ tiene un punto crítico en $x = 20$. Ahora bien

$$C'(x) = 600x - 4\,800\,000x^{-2} \ \Rightarrow\ C''(x) = 600 + 9\,600\,000x^{-3} > 0 \text{ para cualquier } x > 0\,.$$

Lo cual implica que el punto crítico es un mínimo para $C(x)$ (por el criterio de la segunda derivada). El costo C de la cisterna es mínimo cuando $x = 20$ pies y por tanto

$$h = \frac{12\,000}{x^2} = \frac{12\,000}{(20)^2} = \frac{12\,000}{400} = 30\,.$$

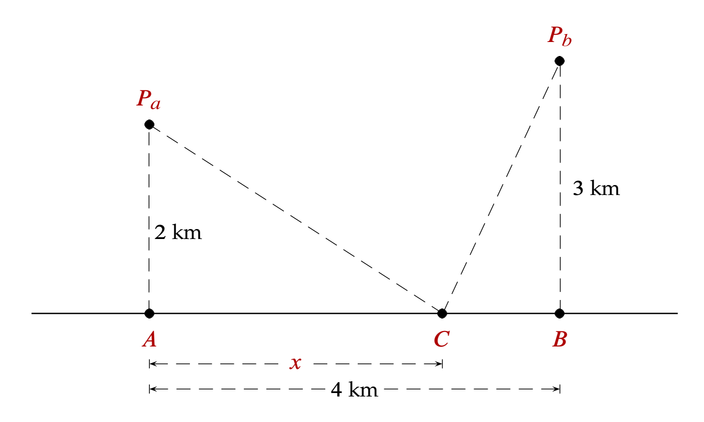
Esto es, el costo mínimo es cuando $x = 20$ pies y $h = 30$ pies. Con lo cual:

$$\begin{aligned} C &= 300x^2 + 400xh\,;\\ C_{\text{min}} &= C(20) = 300(20)^2 + 400(20)(30) = 120\,000 + 240\,000\,;\\ C_{\text{min}} &= \$360\,000\,. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 10.1.7 *Dos poblados P_a y P_b están a 2 km y 3 km, respectivamente, de los puntos más cercanos A y B sobre una línea de transmisión, los cuales están a 4 km uno del otro. Si los dos poblados se van a conectar con un cable a un mismo punto de la línea, ¿cuál debe ser la ubicación de dicho punto para utilizar el mínimo de cable?*





Sea C el punto de conexión ubicado, digamos, a x km del punto A y por supuesto a $4 - x$ km del punto B.
Si l es la longitud del cable utilizado para conectar P_a y P_b con C, entonces:

$$l = \overline{P_aC} + \overline{P_bC} = \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{(4 - x)^2 + 3^3}\,.$$

La función a minimizar es:

$$l(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{(4-x)^2+9} = (x^2+4)^{\frac{1}{2}} + \left[(4-x)^2+9\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Derivando y obteniendo puntos críticos:

$$l'(x) = \frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}2x + \frac{1}{2}\left[(4-x)^2+9\right]^{-\frac{1}{2}}2(4-x)(-1) ;$$

$$l'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+9}} ;$$

$$l'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+9}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+9}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\sqrt{(4-x)^2+9} = (4-x)\sqrt{x^2+4} .$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$x^2[(4-x)^2+9] = (4-x)^2(x^2+4) \Rightarrow x^2(4-x)^2 + 9x^2 = x^2(4-x)^2 + 4(4-x)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2 = 4(4-x)^2 \Rightarrow 9x^2 = 4(16-8x+x^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2 = 64 - 32x + 4x^2 \Rightarrow 5x^2 + 32x - 64 = 0 .$$

Esta última ecuación tiene por soluciones:

$$x = \frac{-32 \pm \sqrt{(32)^2 - 4(5)(-64)}}{2(5)} = \frac{-32 \pm \sqrt{2304}}{10} = \frac{-32 \pm 48}{10} .$$

De donde se obtienen dos puntos críticos que son:

$$x_1 = \frac{-32+48}{10} = \frac{16}{10} = 1.6 \text{ así como } x_2 = \frac{-32-48}{10} = \frac{-80}{10} = -8 .$$

Claramente el valor $x_2 = -8 < 0$ es descartado y sólo consideramos $x_1 = 1.6$.

Ya que

$$l''(x) = \frac{4}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{9}{[(4-x)^2+9]^{\frac{3}{2}}} ,$$

entonces $l''(x) > 0$ para cada x. En particular $l''(1.6) > 0$, por lo que $l(x)$ es mínima cuando $x = 1.6$ km.

Puesto que $0 \le x \le 4$, calculemos los números $l(0)$, $l(1.6)$ y $l(4)$ a manera de ejemplo:

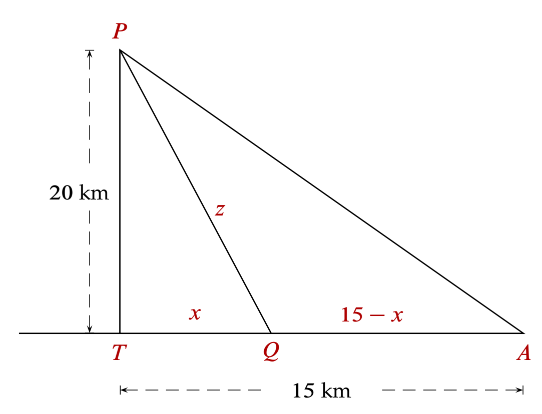
$$l(0) = \sqrt{0^2+4} + \sqrt{(4-0)^2+9} = 2 + \sqrt{25} = 2 + 5 = 7 ;$$
$$l(1.6) = \sqrt{(1.6)^2+4} + \sqrt{(4-1.6)^2+9} = \sqrt{6.56} + \sqrt{14.76} \approx 6.4 ;$$
$$l(4) = \sqrt{4^2+4} + \sqrt{(4-4)^2+9} = \sqrt{20} + 3 \approx 7.5 .$$

Se ve pues que $l(x)$ es menor cuando $x = 1.6$ km, siendo la longitud mínima del cable igual a 6.4 km aproximadamente.

□

Ejemplo 10.1.8 *Se requiere construir un oleoducto desde una plataforma marina que está localizada al norte 20 km mar adentro, hasta unos tanques de almacenamiento que están en la playa y 15 km al este. Si el costo de construcción de cada km de oleoducto en el mar es de 2 000 000 de dólares y en tierra es de 1 000 000, ¿a qué distancia hacia el este debe salir el oleoducto submarino a la playa para que el costo de la construcción sea mínimo?*

▼ Usamos la siguiente figura:



Consideremos que la plataforma está en P y que T es el punto de la playa más cercano a ella; que A es donde están los tanques de almacenamiento y Q es el punto de la playa donde debe de salir el oleoducto submarino.

Si x representa la distancia del punto T al punto Q, entonces considerando el triángulo rectángulo PTQ:

$$z^2 = x^2 + (20)^2 \;\Rightarrow\; z = \sqrt{x^2 + 400}\,,$$

que es la porción de oleoducto submarino; $\overline{QA} = 15 - x$ es la porción de oleoducto en tierra.

Es importante notar que $0 \le x \le 15$.

El costo de construir z kilómetros de oleoducto submarino, a razón de 2 000 000 de dólares por km es de $2z$ millones de dólares y el costo de construir $15 - x$ km de oleoducto terrestre, a razón de 1 000 000 de dólares por km es $1 \cdot (15 - x)$ millones de dólares. Entonces, el costo total de la construcción del oleoducto (en millones de dólares) es

$$C = 2z + (15 - x) = 2\sqrt{x^2 + 400} + 15 - x \;\Rightarrow\; C(x) = 2\sqrt{x^2 + 400} + 15 - x = 2(x^2 + 400)^{\frac{1}{2}} + 15 - x$$

que es la función a minimizar. Derivando y calculando puntos críticos:

$$C'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)(x^2 + 400)^{-\frac{1}{2}}2x - 1 = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 400}} - 1\,;$$

$$C'(x) = 0 \;\Rightarrow\; C'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 400}} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 400}} = 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2x = \sqrt{x^2 + 400} \;\Rightarrow\; 4x^2 = x^2 + 400 \;\Rightarrow\; 3x^2 = 400 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^2 = \frac{400}{3} \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{20}{\sqrt{3}}\,.$$

Por ser $x \geq 0$ podemos descartar $x = -\dfrac{20}{\sqrt{3}} < 0$ y solamente analizaremos el costo en $x = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$.

$$C'(x) = 2x(x^2+400)^{-\frac{1}{2}} - 1\,;$$
$$C''(x) = 2x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+400)^{-\frac{3}{2}}2x + 2(x^2+400)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-2x^2}{(x^2+400)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{(x^2+400)^{\frac{1}{2}}}\,;$$
$$C''(x) = \frac{-2x^2+2(x^2+400)}{(x^2+400)^{\frac{3}{2}}} = \frac{800}{(x^2+400)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Vemos que $C''(x) > 0$ para cualquier x.

Por lo cual $C(x)$ tiene un mínimo local estricto en $x = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$.

Ahora bien, no debemos olvidar que $0 \leq x \leq 15$.

¿Cuál será el costo $C(x)$ en los casos extremos $x = 0$ y en $x = 15$?

Ya que $C(x) = 2\sqrt{x^2+400} + 15 - x$, entonces

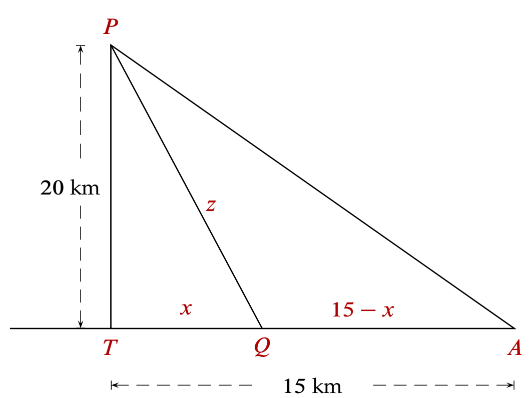
$$C(0) = 2\sqrt{400} + 15 = 55\,;$$
$$C\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{\frac{400}{9} + 400} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{400+3\,600}{9}} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{4\,000}{9}} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{2\sqrt{4\,000}}{3} + 15 - \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 45.6167\,;$$
$$C(15) = 2\sqrt{225+400} + 15 - 15 = 50\,.$$

El costo mínimo de la construcción del oleoducto es de 45.6167 millones de dólares y se tiene cuando $x = \dfrac{20}{\sqrt{3}} \approx 11.547$ km.

□

Ejemplo 10.1.9 *Se requiere construir un oleoducto desde una plataforma marina que está localizada al norte 20 km mar adentro, hasta unos tanques de almacenamiento que están en la playa y 15 km al este. Si el costo de construcción de cada kilómetro de oleoducto en el mar es de 3 000 000 y en tierra es de 2 000 000, ¿qué tan alejado debe salir el oleoducto submarino a la playa para que el costo de la construcción sea mínimo?*

▼ Usamos la siguiente figura:



El costo de construir z km de oleoducto submarino, a razón de 3 000 000 de dólares por km, es de $3z$ millones de dólares y el costo de construir $15 - x$ km de oleoducto terrestre, a razón de 2 000 000 de dólares por km, es $2(15 - x)$ millones de dólares.

Entonces, el costo total de la construcción del oleoducto es (en millones de dólares)

$$C = 3z + 2(15 - x) = 3\sqrt{x^2 + 400} + 2(15 - x)\,;$$
$$C(x) = 3\sqrt{x^2 + 400} + 2(15 - x) = 3(x^2 + 400)^{\frac{1}{2}} + 30 - 2x\,;$$

que es la función a minimizar. Derivando y obteniendo puntos críticos:

$$C'(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)(x^2 + 400)^{-\frac{1}{2}}2x - 2 = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 400}} - 2\,;$$
$$C'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 400}} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 400}} = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x = 2\sqrt{x^2 + 400} \Rightarrow 9x^2 = 4(x^2 + 400) \Rightarrow 5x^2 = 1\,600 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{1\,600}{5} = 320 \Rightarrow x = \pm\sqrt{320}\,.$$

Por ser $x \geq 0$, podemos descartar $x = -\sqrt{320}$.

Pero cuidado, $x = \sqrt{320} \approx 17.889$ no cumple con la restricción $0 \leq x \leq 15$. Esto nos indica que la función costo $C(x)$ no tiene puntos críticos en el intervalo cerrado $[0, 15]$, por lo cual no hay mínimo local estricto (ni máximo) para el costo $C(x)$ en $[0, 15]$.

Esto es, la función $C(x)$ es estrictamente creciente o decreciente en el intervalo $[0, 15]$.

Por lo tanto, el costo mínimo aparece en uno de los extremos del intervalo y, por ende, el costo máximo aparece en el otro extremo.

Valuamos pues $C(x)$ en $x = 0$ y en $x = 15$.

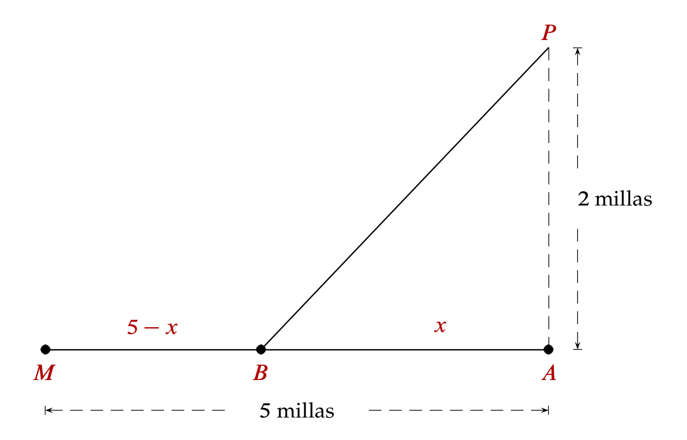
$$C(x = 0) = 3\sqrt{400} + 2(15) = 3(20) + 30 = 90\,;$$
$$C(x = 15) = 3\sqrt{225 + 400} + 2(0) = 3\sqrt{625} = 3(25) = 75\,.$$

Por lo tanto, el costo mínimo de la construcción del oleoducto es de 75 000 000 de dólares y se obtiene cuando todo el oleoducto es submarino y sale a la playa precisamente donde están los tanques de almacenamiento.
Notamos además que en $[0, 15]$ la función $C(x)$ es decreciente, ya que $C'(x) < 0$ si $0 \leq x < \sqrt{320} \approx 17.889$.

□

Ejemplo 10.1.10 *En un concurso de resistencia, los participantes están 2 millas mar adentro y tienen que llegar a un sitio en la orilla (tierra firme) que está a 5 millas al oeste (la orilla va de este a oeste). Suponiendo que un concursante puede nadar 4 millas por hora y correr 10 millas por hora, ¿hacia qué punto de la orilla debe nadar para minimizar el tiempo total de recorrido?*

▼ Usamos la figura siguiente:



Sean P el punto de partida, A el punto de la playa más cercano a P, M la meta y B el punto de la playa donde el concursante sale del mar.
Es decir: $\overline{PA} = 2$ millas, $\overline{MA} = 5$ millas, $\overline{PB}$ es el recorrido nadando y $\overline{BM}$ es el recorrido corriendo por la playa.
Si suponemos que B está a x millas de A, entonces

$$\overline{BA} = x \Rightarrow \overline{MB} = 5 - x \ \& \ \overline{BP} = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AP}^2} = \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 4}.$$

Si el concursante nada $\overline{PB} = \sqrt{x^2 + 4}$ millas a razón de 4 millas por hora, entonces el tiempo que tarda nadando es $t_n = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{4}$ horas.
Si el concursante corre $\overline{MB} = 5 - x$ millas a razón de 10 millas por hora, entonces el tiempo que tarda corriendo es $t_c = \dfrac{5 - x}{10}$ horas.
El tiempo total de recorrido del concursante es

$$t = t_n + t_c = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4} + \frac{5 - x}{10}.$$

Es decir,

$$t(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - \frac{x}{10} \text{ con } 0 \le x \le 5,$$

que es la función que debemos minimizar.

Derivando y obteniendo los puntos críticos:

$$t'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)(x^2+4)^{-1/2}2x - \frac{1}{10} = \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{10};$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{10} = 0 \Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x = 4\sqrt{x^2+4} \Rightarrow (10x)^2 = 4^2(x^2+4) \Rightarrow 100x^2 = 16x^2 + 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100x^2 - 16x^2 = 64 \Rightarrow 84x^2 = 64 \Rightarrow x^2 = \frac{64}{84} \approx 0.762 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \approx \pm\sqrt{0.762} \approx \pm 0.87.$$

Entonces $t(x)$ tiene un punto crítico en $x \approx 0.87$ millas.

Ya que $t''(x) = \dfrac{1}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$, entonces $t''(x) > 0$ para cada x. En particular $t''(0.87) > 0$ por lo que $tx)$ es mínimo cuando $x = 0.87$ millas.

A manera de ejemplo valuamos $t(x)$ en $x = 0.87$, $x = 0$ & $x = 5$, para comparar los tiempos obtenidos.

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \frac{5-x}{10};$$

$$t(0.87) = \frac{\sqrt{(0.87)^2+4}}{4} + \frac{5-0.87}{10} \approx 0.958 \text{ hora};$$

$$t(0) = \frac{\sqrt{0^2+4}}{4} + \frac{5-0}{10} = 1 \text{ hora};$$

$$t(5) = \frac{\sqrt{5^2+4}}{4} + \frac{5-5}{10} \approx 1.34629 \text{ h}.$$

Luego el tiempo mínimo es 0.958 de hora, esto es 57 min 29.727 s.

□

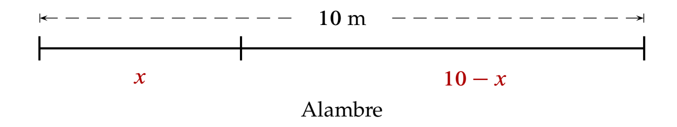
Ejemplo 10.1.11 *Un trozo de alambre de* 10 *m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. Hallar cómo debe cortarse el alambre de modo que el área encerrada sea:*

1. *Máxima.*

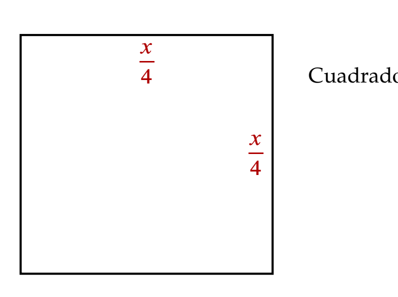
2. *Mínima.*

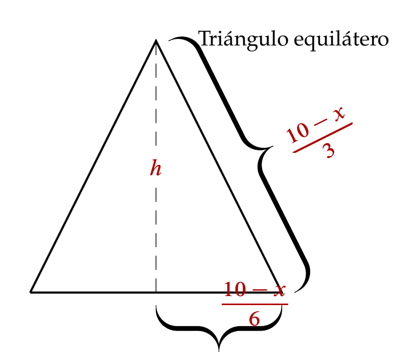
Interpretar prácticamente los resultados.

▼ Usando la siguiente figura



La parte x del alambre se usa para el cuadrado, por lo tanto cada lado tiene longitud $\dfrac{x}{4}$.
La parte $10-x$ del alambre se usa para el triángulo equilátero, por lo tanto cada lado tiene longitud $\dfrac{10-x}{3}$.





De la figura del triángulo, usando el teorema de Pitágoras, obtenemos la siguiente relación:

$$h^2+\left(\frac{10-x}{6}\right)^2=\left(\frac{10-x}{3}\right)^2 \Rightarrow h^2=\frac{1}{9}(10-x)^2-\frac{1}{36}(10-x)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2=\frac{3}{36}(10-x)^2 \Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{6}(10-x).$$

El área del cuadrado es

$$A_C(x)=\frac{x^2}{16}.$$

El área del triángulo es

$$A_T(x)=\frac{1}{2}\times\text{base}\times\text{altura}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}(10-x)\times\frac{\sqrt{3}}{6}(10-x)=\frac{\sqrt{3}}{36}(10-x)^2.$$

El área de ambas figuras es

$$A(x)=A_T(x)+A_C(x)=\frac{\sqrt{3}}{36}(10-x)^2+\frac{x^2}{16}.$$

Ésta es la función a la cual deseamos calcular sus máximo y mínimo.

Nótese que el dominio de esta función es $D_A=[0,10]$ (la longitud del alambre es de 10 m).

Calculamos la primera derivada:

$$A'(x)=\frac{1}{8}x+\frac{\sqrt{3}}{36}\times 2(10-x)(-1)=\frac{1}{8}x-\frac{\sqrt{3}}{18}(10-x)=$$
$$=\frac{1}{8}x-\frac{5\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{18}x=\frac{9+4\sqrt{3}}{72}x-\frac{5\sqrt{3}}{9}.$$

Calculamos el punto crítico:

$$A'(x)=0 \Rightarrow \frac{9+4\sqrt{3}}{72}x-\frac{5\sqrt{3}}{9}=0 \Rightarrow x=\frac{72(5\sqrt{3})}{9(9+4\sqrt{3})}=\frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}\approx 4.34965.$$

Puesto que al calcular la segunda derivada obtenemos:

$$A''(x) = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{72} > 0,$$

entonces el punto crítico anterior es un mínimo local.
Calculamos la función $A(x)$ en los extremos de su dominio:

$$A(0) = \frac{\sqrt{3}}{36}100 \approx 4.81125 \text{ y } A(10) = \frac{100}{16} = 6.25.$$

Vemos entonces que la máxima área encerrada es cuando $x = 10$, es decir, cuando sólo se construye el cuadrado.
Y la mínima área encerrada es cuando $x = 4.34965$, caso en el que se construyen ambas figuras.

□

Ejemplo 10.1.12 *Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R.*

▼ Consideramos un cilindro recto con base circular de radio r y altura h (inscrito en una esfera). Suponiendo (imaginando) que tanto la esfera como el cilindro son transparentes y que sólo sus contornos se ven, esto es, si consideramos una sección transversal del cuerpo, la figura representativa de ellos es la misma que se tiene para una circunferencia de radio R y un rectángulo inscrito en ella de base $2r$ y altura h.

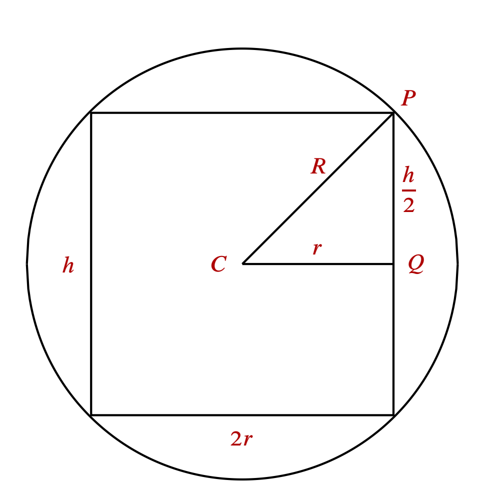
El volumen del cilindro es

$$V = \pi r^2 h$$

que es una función de dos variables (r y h).
En el triángulo rectángulo CQP (por el teorema de Pitágoras) obtenemos

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

que es una ecuación representativa de una restricción, (la esfera es de radio R).



Tenemos pues una función:

$$V = \pi r^2 h$$

y por el teorema de Pitágoras obtenemos la ecuación:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 .$$

De la ecuación despejaremos una de las variables para luego sustituirla en la función.
¿Cuál variable se despeja? La que más convenga.
En este caso conviene despejar r^2, a saber:

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} .$$

Sustituyendo en la función:

$$V = \pi r^2 h = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h = \pi(R^2 h - \frac{1}{4}h^3) .$$

Así tenemos (R es una constante):

$$V(h) = \pi\left(R^2 h - \frac{1}{4}h^3\right) ;$$

que es la función a maximizar. Derivando para obtener puntos críticos:

$$V'(h) = \pi(R^2 - \frac{3}{4}h^2) ;$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow \pi(R^2 - \frac{3}{4}h^2) = 0 \Rightarrow R^2 - \frac{3}{4}h^2 = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}h^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{4}{3}R^2 \Rightarrow h = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}R .$$

Esto implica que la función $V(h)$ tiene dos puntos críticos, uno para $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$ y el otro para $h = -\frac{2}{\sqrt{3}}R$. Pero este último $\left(h = -\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)$ no tiene significado en el contexto del problema por ser un valor negativo (que daría lugar a una altura negativa).
Por lo tanto veamos qué tipo de punto crítico tiene $V(h)$ para $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$:

$$V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}h^2\right) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi h^2 ;$$

$$V''(h) = -\frac{3}{2}\pi h < 0, \text{ para cualquier } h > 0 .$$

Luego $V(h)$ tiene un máximo local estricto cuando $h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$. Además

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}h^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}R^2\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}}R .$$

Por lo tanto el volumen del cilindro es máximo cuando

$$h = \frac{2}{\sqrt{3}}R \text{ y } r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R\,.$$

Dicho volumen máximo es

$$V_{max} = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R\right)^2 (\frac{2}{\sqrt{3}}R) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3\,.$$

Notemos que

$$V(h) = \pi h(R^2 - \frac{1}{4}h^2) \text{ con } 0 \le h \le 2R\,.$$

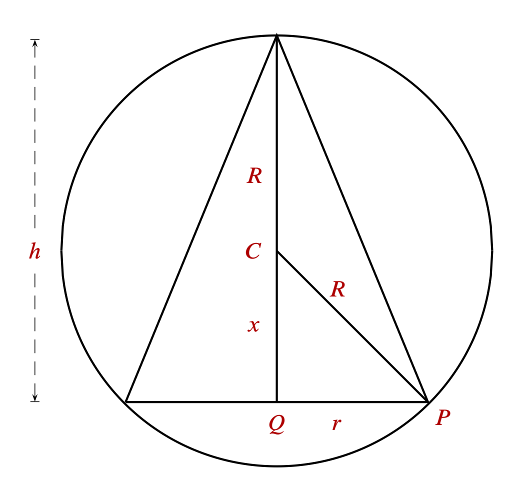
También que $h = 0 \;\Rightarrow\; V(h = 0) = 0$ y además que $h = 2R \;\Rightarrow\; V(h = 2R) = 0$.

□

Ejemplo 10.1.13 *Determinar las dimensiones del cono circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R.*

▼ Consideramos una esfera de radio $R > 0$ y un cono que tiene base circular de radio $r > 0$ y altura $h > 0$.

Una sección transversal perpendicular a la base del cono y que pase por su eje se muestra en el croquis siguiente:



El volumen del cono es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

que es una función de dos variables (r & h).
En el triángulo rectángulo CQP, por el teorema de Pitágoras, vemos que $R^2 = x^2 + r^2$ con $x = h - R$, por lo que $R^2 = (h - R)^2 + r^2$, es decir, la ecuación asociada a la restricción en el problema (que la esfera sea de radio R).

Tenemos pues una función :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

y una ecuación:
$$R^2 = (h-R)^2 + r^2 .$$
De la ecuación despejamos (por conveniencia) r^2
$$r^2 = R^2 - (h-R)^2 = R^2 - h^2 + 2hR - R^2 = 2hR - h^2 .$$
Y sustituyendo en la función:
$$V = \frac{1}{3}\pi(2hR - h^2)h .$$
Así tenemos (R es una constante):
$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(2Rh^2 - h^3) ,$$
que es la función a maximizar. Derivando para obtener puntos críticos:
$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) ;$$
$$V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) = 0 \Rightarrow h(4R - 3h) = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ o bien } h = \frac{4}{3}R .$$
Esto implica que la función $V(h)$ tiene dos puntos críticos, uno para $h = 0$ y otro para $h = \frac{4}{3}R$. En el contexto del problema, el caso $h = 0$ queda descartado (ya que el volumen sería $V = 0$). Sólo consideramos el caso en que $h = \frac{4}{3}R$.
$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) \Rightarrow V''(h) = \frac{1}{3}\pi(4R - 6h) .$$
Así:
$$V''(h = \frac{4}{3}R) = \frac{1}{3}\pi\left[4R - 6\left(\frac{4}{3}R\right)\right] = \frac{1}{3}\pi[4R - 8R] = -\frac{4}{3}\pi R < 0 .$$
Luego $V(h)$ tiene un máximo local estricto cuando $h = \frac{4}{3}R$.

Además,
$$r = \sqrt{R^2 - (h-R)^2} = \sqrt{R^2 - (\frac{4}{3}R - R)^2} \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - \frac{1}{9}R^2} = \frac{\sqrt{8}}{3}R = \frac{2\sqrt{2}}{3}R .$$
Por lo tanto, el volumen del cono es máximo cuando $h = \frac{4}{3}R$ y cuando $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$.
Dicho volumen máximo es:
$$V_{max} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R\right)^2\left(\frac{4}{3}R\right) = \frac{32}{81}\pi R^3 .$$
Notemos que
$$V(h) = \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h) \text{ con } 0 \le h \le 2R .$$

Además,

$$h = 0 \Rightarrow V(h = 0) = 0$$

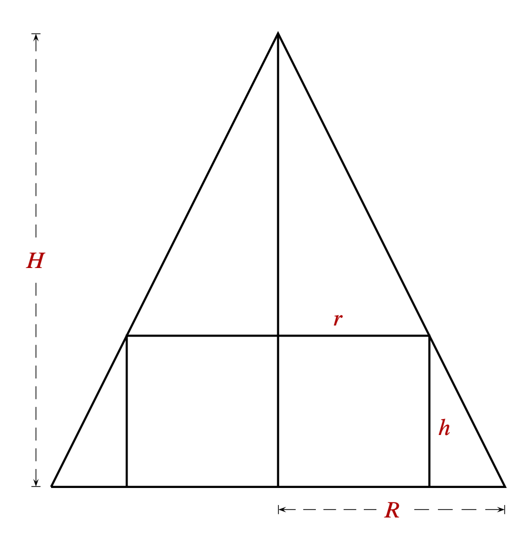
así como

$$h = 2R \Rightarrow V(h = 2R) = 0\,.$$

□

Ejemplo 10.1.14 *Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que puede ser inscrito en un cono circular recto de radio R y altura H.*

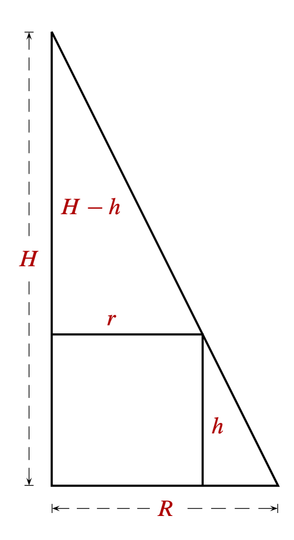
▼ Consideramos que el cilindro tiene radio r y altura h.
Una sección transversal perpendicular a la base del cono y que pase por su eje, se muestra en el croquis siguiente:



El volumen del cilindro es

$$V = \pi r^2 h\,,$$

que es una función de dos variables (r y h).
Para tener una ecuación con las mismas variables r, h veamos los dos triángulos semejantes que hay en la figura.



Por semejanza se cumple la proporción:

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{H - h}\,.$$

De donde se obtiene la ecuación: $R(H-h) = rH$, de la cual despejaremos una de las variables para después sustituirla en la función volumen.

Despejaremos r:

$$rH = R(H-h) \;\Rightarrow\; r = \frac{R}{H}(H-h)\,;$$

sustituyendo

$$V = \pi r^2 h = \pi\left[\frac{R}{H}(H-h)\right]^2 h = \pi\frac{R^2}{H^2}(H-h)^2 h = \frac{\pi R^2}{H^2}(H^2 - 2Hh + h^2)h\,.$$

Así tenemos:

$$V(h) = \frac{\pi R^2}{H^2}(H^2 h - 2Hh^2 + h^3)\,,$$

que es la función a maximizar. Derivamos para obtener los puntos críticos:

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{H^2}(H^2 - 4Hh + 3h^2) = \frac{\pi R^2}{H^2}(3h^2 - 4Hh + H^2)\,;$$

$$V'(h) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\pi R^2}{H^2}\left(3h^2 - 4Hh + H^2\right) = 0 \;\Rightarrow\; 3h^2 - 4Hh + H^2 = 0\,.$$

Tenemos que:

$$h = \frac{4H \pm \sqrt{(-4H)^2 - 4(3)H^2}}{2(3)} = \frac{4H \pm \sqrt{16H^2 - 12H^2}}{6} = \\ = \frac{4H \pm \sqrt{4H^2}}{6} = \frac{4H \pm 2H}{6}\,.$$

Entonces:

$$h_1 = \frac{4H + 2H}{6} = \frac{6H}{6} = H$$

y

$$h_2 = \frac{4H - 2H}{6} = \frac{2H}{6} = \frac{1}{3}H\,.$$

Luego la función $V(h)$ tiene dos puntos críticos: uno cuando $h = h_1 = H$ y otro cuando $h = h_2 = \frac{1}{3}H$.

$V'(h) = \frac{\pi R^2}{H^2}(3h^2 - 4Hh + H^2) \Rightarrow V''(h) = \frac{\pi R^2}{H^2}(6h - 4H).$
Así:

$$V''(h_1) = \frac{\pi R^2}{H^2}(6h_1 - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}(6H - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}2H > 0\,;$$

$V''(h_1) > 0 \Rightarrow V(h)$ tiene un mínimo local estricto para $h_1 = H$.

Además:

$$V''(h_2) = \frac{\pi R^2}{H^2}(6h_2 - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}\left[6(\frac{1}{3}H) - 4H\right] = \frac{\pi R^2}{H^2}(2H - 4H) = \frac{\pi R^2}{H^2}(-2H) < 0\,;$$

$V''(h_2) = -\frac{2\pi R^2}{H} < 0 \Rightarrow V(h)$ tiene un máximo local estricto para $h_2 = \frac{H}{3}$.

Por lo tanto el volumen $V(h)$ es máximo cuando $h = h_2 = \frac{1}{3}H$.
¿Qué sucede en los extremos del intervalo $[0, H]$?
$V(h = 0) = 0$ y $V(h = H) = 0$.
Por lo anterior concluimos que dicho volumen máximo es:

$$\begin{aligned} V_{max} &= \frac{\pi R^2}{H^2}\left(H - \frac{1}{3}H\right)^2 \frac{1}{3}H = \\ &= \frac{\pi R^2}{H^2}\left(\frac{2}{3}H\right)^2 \frac{1}{3}H = \\ &= \frac{\pi R^2}{H^2}\frac{4}{9}H^2\frac{1}{3}H = \\ &= \frac{4}{27}\pi R^2 H\,. \end{aligned}$$

Este volumen máximo se obtiene para el cilindro de altura $h_2 = \frac{1}{3}H$
y radio

$$r_2 = \frac{R}{H}(H - h_2) = \frac{R}{H}(H - \frac{1}{3}H) = \frac{2}{3}R\,.$$

□

Ejercicios 10.1.1 *Soluciones en la página 28*

1. Hallar dos números positivos cuya suma sea S y cuyo producto sea máximo.
2. Hallar dos números positivos cuyo producto sea P y cuya suma sea mínima.
3. Hallar dos números positivos cuyo producto sea P y la suma del primero más tres veces el segundo sea mínima.
4. Hallar dos números positivos tales que el segundo número sea el inverso multiplicativo del primero y la suma sea mínima.

5. Hallar dos números positivos tales que el primero más n veces el segundo sumen S y el producto sea máximo.

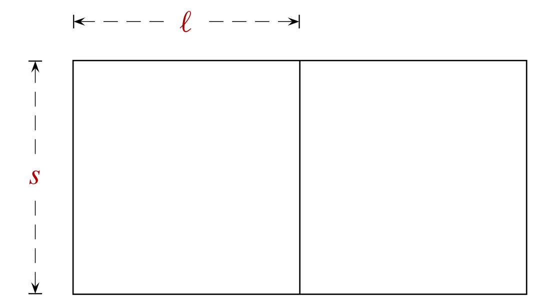
6. La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible.

7. Un granjero que tiene 24 m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en tres corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los tres corrales?

8. Un granjero que tiene C m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en cuatro corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los cuatro corrales?

9. Un granjero que tiene C m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en n corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los n corrales?

10. Un ranchero quiere bardear dos corrales rectangulares adyacentes idénticos, cada uno de 300 m^2 de área como se muestra en la figura.



¿Cuánto deben medir s & ℓ para que se utilice la mínima cantidad de barda?

11. Un ganadero desea cercar un prado rectangular junto a un río. El prado ha de tener 180 000 m^2 para proporcionar suficiente pasto. ¿Qué dimensiones debe tener el prado para que requiera la menor cantidad de cerca posible, teniendo en cuenta que no hay que cercar en el lado que da al río?

12. Un terreno rectangular está delimitado por un río en un lado y por una cerca eléctrica de un solo cable en los otros tres lados.

    ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que nos dan el área máxima?

    ¿Cuál es la mayor área que pueda cercarse con un cable de 800 m?

13. Se desea hacer una caja abierta con una pieza cuadrada de material de 12 cm de lado, cortando cuadritos iguales de cada esquina. Hallar el máximo volumen que puede lograrse con una caja así.

14. Se va a construir una caja con la parte superior abierta a partir de un trozo cuadrado de cartón que tiene L metros de lado, recortando un cuadrado en cada una de las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Encuentre el volumen más grande que puede tener la caja.

15. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un círculo de radio r.

16. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de V cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

17. Una caja con base y tapa cuadradas debe tener un volumen de 50 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

18. Una caja con base y tapa cuadradas debe tener un volumen de V cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

19. Se quiere construir una cisterna con base rectangular y sin tapa, de manera tal que el ancho de la base sea el doble de la altura de la cisterna. Calcular las dimensiones que debe tener la cisterna para que el volumen sea de 20 m^3 y se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

20. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de V m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta B pesos el metro cuadrado. El material para los costados cuesta L pesos el metro cuadrado. Encuentre las dimensiones para tener el más barato de esos recipientes.

21. Si se cuenta con 1 000 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

22. Si se cuenta con M cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

23. Si se cuenta con 1 000 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

24. Si se cuenta con M cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

25. Demuestre que, de todos los rectángulos con un área dada, el que tiene el menor perímetro es un cuadrado.

26. Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado el que tiene el área máxima es un cuadrado.

27. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de 10 m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta 3 pesos el metro cuadrado. El material para los costados cuesta 2 pesos el metro cuadrado. Encuentre las dimensiones para tener el más barato de esos recipientes.

28. Halle el punto de la recta $y = -2x + 3$ más cercano al origen.

29. Halle el punto de la recta $y = mx + b$ más cercano al origen.

30. Una ventana normanda tiene forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de P m, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz.

31. Una pista de entrenamiento consta de dos semicírculos adosados en los lados opuestos de un rectángulo. Si su perímetro es de P m, hallar las dimensiones que hacen máxima el área de la región rectangular.

32. Un triágulo rectángulo está formado por los semiejes positivos y una recta que pasa por el punto (a, b). Hallar los vértices de modo que su área sea mínima.

33. Se quiere construir un recipiente cilíndrico de base circular con tapa y una capacidad para 600 ℓ. Calcular las dimensiones que debe tener para que se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

    (Considerar que 1 ℓ = 1 dm^3.)

34. Un cilindro circular recto ha de contener V cm^3 de refresco y usar la mínima cantidad posible de material para su construcción. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones?

35. Determine el volumen máximo posible de un cilindro circular recto si el área total de su superficie, incluyendo las dos bases circulares, es de 150π m^2.

36. Dos puntos A, B se encuentran en la orilla de una playa recta, separados 6 km entre sí. Un punto C esta frente a B a 3 km en el mar. Cuesta \$400.00 tender 1 km de tubería en la playa y \$500.00 en el mar. Determine la forma más económica de trazar la tubería desde A hasta C. (No necesariamente debe pasar por B.)

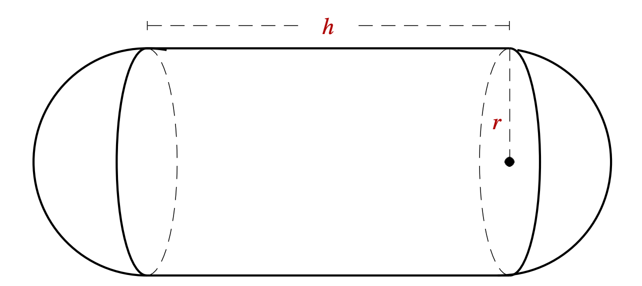
37. Dos barcos salen al mismo tiempo; uno de un muelle, con dirección sur y con velocidad de 20 km/h. El otro parte hacia el muelle desde un punto que se encuentra a 15 km al oeste, a 10 km/h. ¿En qué momento se encuentran más próximos estos dos navíos?

38. A las 13:00 horas un barco A se encuentra 20 millas al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 millas/h. El barco B navega hacia el oeste a 10 millas/h. ¿A qué hora se alcanza la distancia mínima entre las dos embarcaciones?

39. Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen de 10 ℓ en forma de un cilindro circular recto rematado por dos hemisferios (medias esferas). Tomando en cuenta que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que la superficie es $4\pi r^2$, encontrar las dimensiones del tanque que minimicen la cantidad de metal.

40. Una lata de aceite tiene la forma de un cilindro con fondo plano en la base y una semiesfera en la parte superior. Si esta lata debe contener un volumen de 1 000 pulgadas cúbicas y se desprecia el espesor del material, determine las dimensiones que minimizan la cantidad de material necesario para fabricarla.

41. Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 10π pies^3?



42. Una página ha de contener 30 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. Hallar las dimensiones de la página que permiten ahorrar más papel.

43. Los costos de la empresa Alfa están dados por la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, donde x representa miles de artículos vendidos. Se pronostica que los costos serán mínimos si se venden entre 1 700 y 1 800 artículos.

    ¿Es verdadero el pronóstico? Justifique su respuesta.

44. Un hombre se encuentra en un punto A de la orilla de un río rectilíneo de 2 km de ancho. Sea C el punto enfrente de A en la otra orilla. El hombre desea llegar a un punto B situado a 8 km a la derecha y en la misma orilla de C.

    El hombre puede remar en su bote cruzando el río hasta el punto D entre B y C. Si rema a 6 km/h y corre a 8 km/h ¿a qué distancia debe estar D del punto C, para llegar al punto B lo más pronto posible?

45. La suma del perímetro de un círculo y un cuadrado es de 16 cm. Hallar las dimensiones de las dos figuras que hacen mínima el área total encerrada por ambas figuras.

Soluciones

Soluciones a los ejercicios del capt'ítulo 10

Ejercicios 10.1.1 *Optimización, página 23*

1. $x = \dfrac{S}{2}$ & $y = \dfrac{S}{2}$.
2. $x = \sqrt{P}$ & $y = \dfrac{P}{\sqrt{P}} = \sqrt{P}$.
3. $x = \sqrt{3P}$ & $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{3P}$.
4. $x = 1$ & $y = 1$.
5. $x = \dfrac{S}{2}$ & $y = \dfrac{S}{2n}$.
6. $x = y = z = 10$.
7. $A = 18$ para $x = 3$ & $y = 6$.
8. $A = \dfrac{C^2}{40}$ para $x = \dfrac{C}{10}$ & $y = \dfrac{5}{2}\dfrac{C}{10}$.
9. $A = \dfrac{C^2}{8(n+1)}$ m^2 para $x = \dfrac{C}{2(n+1)}$ & $y = \dfrac{C}{4}$.
10. $s = 20$ & $l = 15$ m.
11. $x = 300$ m & $y = 600$ m.
12. $y = 200$; $x = 2y = 400$ & $A = 80\,000$.
13. Volumen máximo: $V(3) = 108$ cm^3.
14. $V\left(\dfrac{L}{6}\right) = \dfrac{2}{27}L^3$.
15. $x = \dfrac{2}{\sqrt{2}}r = y$.
16. $x = \sqrt[3]{2V}$ & $y = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.
17. $x = \sqrt[3]{50}$ & $y = \sqrt[3]{50}$.
18. $x = \sqrt[3]{V}$ & $y = \sqrt[3]{V}$.
19. Base cuadrada de lado $2 \times 5^{\frac{1}{3}}$ y con altura $5^{\frac{1}{3}}$.
20. $x = \sqrt[3]{\dfrac{3LV}{4B}}$ & $y = \dfrac{2}{3}\dfrac{B}{L}\left(\dfrac{3LV}{4B}\right)^{\frac{1}{3}}$.
21. $V = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1\,000}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ para
    $x = \sqrt{\dfrac{1\,000}{3}}$ & $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1\,000}{3}}$.
22. $V = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$.
23. $V = \dfrac{500}{3}\sqrt{\dfrac{500}{3}}$.
24. $V = \dfrac{M}{6}\sqrt{\dfrac{M}{6}}$.
25. $y = \sqrt{A} = x$.
26. $y = \dfrac{P}{4} = x$.
27. $y = \sqrt[3]{5} = x$.
28. $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$.
29. $\left(-\dfrac{bm}{1+m^2}, \dfrac{b}{1+m^2}\right)$.
30. $x = \dfrac{2P}{4+\pi}$; $y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2P}{4+\pi}\right)$.
31. $y = \dfrac{P}{2\pi}$ & $x = \dfrac{\pi}{2}y = \dfrac{P}{4}$.
32. $x = 2a$ & $y = 2b$.
33. $r = \sqrt{\dfrac{300}{\pi}}$ & $h = 2r$.
34. $r = \left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$; $h = 2\left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2r$.
35. $V = 250\pi$ m^3.
36. El costo es 3 300 pesos.
37. $t = \dfrac{3}{10}$ h.

38. $13 + \dfrac{12}{13}$ h.

39. $r = 1.3365$ & $l = 0$.

40. $r \approx 5.75882$ & $h = r$.

41. $r \approx 1.233$ & $h \approx 4.932$.

42. $x = \sqrt{15}$ & $y = 2x$.

43. Es verdadero, pues el costo es mínimo cuando se venden 1 732.058 artículos.

44. A 2.27 km de C.

45. $x = \dfrac{16}{\pi + 4}$ & $r = \dfrac{8}{\pi + 4} = \dfrac{1}{2}x$.